



CSTAM 2012-B03-0165

超临界 Marangoni-Bénard 对流波数分析

吴笛，段俐，康琦

中国科学院力学研究所国家微重力实验室

第七届全国流体力学学术会议

2012年11月12—14日 广西·桂林

超临界 Marangoni-Bénard 对流波数分析¹⁾

吴笛, 段俐, 康琦²⁾

(中国科学院力学研究所国家微重力实验室, 北京海淀区 100190)

摘要 本文通过理论和实验研究底部均匀加热大宽厚比 Marangoni-Bénard 对流的波数选择问题。通过红外热像仪观测液层在缓慢线性升温 and 降温过程中的表面温度场。并对红外图像进行 2D-Fourier 变换, 分析温度场的频谱特征。发现真实涡胞的频谱是由基波和对应的谐波叠加而成。基波是由三个互成 120° 的波叠加, 而高次谐波部分主要由两部分组成: 与基波方向一致 2 次谐波波和与基波方向成 30° 的 $\sqrt{3}$ 次谐波。实验发现随着温差的上升, 谐波与基波的强度比经历了一个先增加后减小的过程, 存在一个极大值点。同时发现涡胞尺寸经历了一个先减小后增大的过程, 也就是基波的波数先增加后减小, 并且也存在一个极大值点。实验表明这两个极值点是一致的, 因此谐波与基波的强度比与涡胞的大小有关。实验发现谐波与基波的强度比增大时, 基频波数也增大, 涡胞减小, 谐波与基波的强度比减小时, 基频波数也减小, 涡胞增大。

关键词 Marangoni-Bénard 对流, 超临界, 2D-Fourier 变换, 斑图形成, 波数选择

引言

Bénard 对流是自然界常见的一种对流形式。最早由 Bénard^[1]在实验中观察到下加热的液层会出现六边形结构的对流, 人们把这种对流结构称为 Bénard 涡胞。Bénard 是指具有上自由表面初始静止的液体层, 在底部加热, 上自由表面散热的条件下, 当液层温差超过一定临界值时, 流体发生失稳流动。产生流动的机制有两种, 一种是浮力对流机制^[2], 一种是表面张力产生的热毛细对流机制^[3]。把浮力引起的流动称为 Rayleigh-Bénard 对流, 把表面张力引起的流动称为 Marangoni-Bénard 对流, 其中 Rayleigh-Bénard 对流结构为卷轴结构, 而 Marangoni-Bénard 对流结构为六边形结构。

线性稳定性理论^[2-4]和实验^[5]大多侧重于分析由静止到失稳流动的临界条件, 得到了各种边界条件下失稳的 Ma 数或者 Ra 数。研究发现 Marangoni-Bénard 对流, 采用下壁面恒温, 上表面绝热且不变形的边界条件时, 得到临界条件 $Ma_c=79.9$, 并且得到临界波数为 $k_c=1.99$, 最接近实验的情况。然而关于失稳后对流波数的分析还比较少, 其中, 超临界对流的波数选择问题至今仍然是一个难题。

波数选择问题研究的是, 当 Ma 数超过临界值时, 实际对流波数与超临界数 ε ($\varepsilon=(Ma-Ma_c)/Ma_c$) 之间的关系。由于在超临界条件下, 存在一个波段的扰动波都是不稳定的, 系统选择也哪一个波数的对流波数进行失稳, 可以直观地反映到涡胞尺寸的大小。Bénard^[1]指出涡胞尺寸随温差增加先是减小, 然后是增大。由于波数与涡胞的尺寸成反比, 因此 Bénard 的结果表明波数会随着 Ma 数的增加, 先增加后减小。对于单纯浮力引起的 Rayleigh-Bénard 对流的波数选择^[6], 有不少工作开展, 研究发现波数随着 Ra 数的增加而减小。但是对于 Marangoni-Bénard 的波数选择问题的研究却很少有报导。Cerisier 等^[7]发现, 涡胞会随着温差的增加一直增大, 但却没有观察到涡胞减小的过程。直到 Koschmieder 等^[8]通过阴影法实验证实了 Bénard 的发现, 但是采用统计涡胞数量的方法, 局限于定性分析, 没有绘制精确的超临界数与波数的关系曲线。对比 Rayleigh-Bénard 对流波数随温差一直减小, Koschmieder 推测 Marangoni-Bénard 对流中涡胞先增大是由热毛细效应占主导引起的, 而后的减小是由浮力效应占主导引起的, 但缺乏理论和实验的支持。

1) 国家自然科学基金(11032011, 10972224)和三期创新方向性项目(KJ CX2-YW-L08)资助项目

2) Email: kq@imech.ac.cn

其实，实际对流中的波数是有基波和高次谐波组成，其中基波为涡胞的尺寸。目前的所有关于超临界波数选择的研究，都是对流场中影响最为显著的基波进行分析，缺乏对高次谐波的认识。严格地说，超临界波数选择问题包含了两个方面：对基波的选择和对高次谐波的选择。高次谐波将会影响涡胞内部的温度场和流场结构。特别是在高超临界流动中，高次谐波的影响更为显著。基波和高次谐波之间存在着相互作用，影响着整个流场的发展。本文通过红外热像仪的实验结果结合理论分析，探讨了基波与高次谐波的构成以及形成机理，并且通过实验发现了高次谐波和基波之间存在相互影响，给出了选择的波数与高次谐波所占比重的之间的规律。

1 实验系统及方法

为了尽量排除边界条件的影响，实现大宽厚比的实验，采用的是 $180\text{mm} \times 180\text{mm}$ 的底加热矩形液池进行实验，实验中宽厚比可达 $\Gamma=60$ 。底部自上而下由铜板，硅胶板，铝板组成。由于硅胶板的导热性差，起到热镇流的作用。底部由电热膜加热，加热的额定功率为 38W 。加热电压由英国欧陆(ERUOTHERM) 3306 型温度调节器采用 PID 算法进行控制。温度的稳定性为 0.01°C ，并可以根据设定程序线性升温或者控制在某一温度。下加热板的水平度调整是借助于从德国 Physik Instrument 公司引进的三维位移机构 (M-525.21、M-510.11 型) 完成的，水平误差在 $\pm 0.01\text{mm}$ 内。为了考察底板上表面温度均匀性，对下板加热后进行了测定。测量结果显示，当下表面温度高于室温 10°C 时，除模型边缘外，平板温度分布不

均匀性低于 0.2°C 。四周由厚度为 10mm 的 K9 玻璃组成的四边形边框。

采用 FLIR E60 红外热像仪获得液层上表面温度场，其采样率最高可达到 60 帧/秒，空间分辨率为 $320 \text{ pixels} \times 240 \text{ pixels}$ ，测温范围为 $-20^\circ\text{C} \sim +120^\circ\text{C}$ 或 $0^\circ\text{C} \sim +650^\circ\text{C}$ ，实验中选用前者，灵敏度为 0.05°C 。实验中测量的温度为 $20^\circ\text{C} \sim 80^\circ\text{C}$ ，拍摄区域为 $98.5 \text{ mm} \times 86.2 \text{ mm}$ 。经数据线连接电脑，通过专业热像仪分析软件 FLIR ResearchIR 得到温度分布的数字图像并且进行分析。实验系统如图 1 所示。

在实验中，以日本 Shin-Etsu Chemical 公司的 50 号硅油作为实验介质，50 号硅油属性如表 1 所示。为了使系统在升温过程中总是处于热平衡的状态，采用 $0.2^\circ\text{C}/\text{min}$ 的极慢升温速率，从室温 (约 20°C) 升高至 80°C ，然后再以 $0.2^\circ\text{C}/\text{min}$ 的速率线性降温。图 2 为实验过程中上表面平均温度随时间变化，呈很好的线性度。因此认为在升温过程中，硅油液层上下温差也称线性变化，并且与上表面温度存在线性关系。在升温过程中，当液层上下温差超 ΔT 超过临界值 T_c 时，才会出现对流。实际情况中，这一个过程并不是瞬间发生的，而是由局部对流发展到完全对流 (如图 3 所示)。将完全对流出现的时刻定义为临界流动开始发生。随后任意时刻的，临界数 ε 可表示为：

$$\varepsilon = (\Delta T - T_c) / T_c = (T_s - T_0) / (T_{sc} - T_0) - 1 \quad (1)$$

其中， ΔT 为液层温差， T_0 为初始温度， T_s 为上表面平均温度， T_{sc} 为发生临界流动时上表面的平均温度。实验中超临界数在 $0 \sim 3$ 之间变化。本文实验结果均来自于对 50 号硅油 3mm 和 3.5mm 的液层的实验结果。

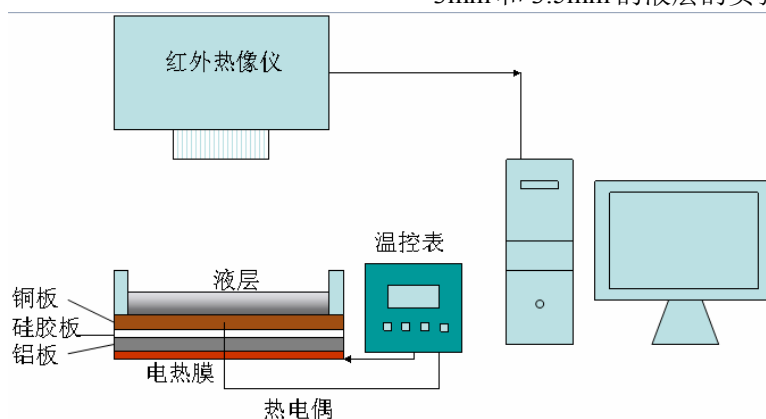


图 1 实验系统示意图

表 1 50 号硅油属性参数

参数	密度 $\rho / (\text{Kg/m}^3)$	热容 $C_p / (\text{J/kg K})$	热扩散系数 $\kappa / (\text{m}^2/\text{s})$	热膨胀系数 $\alpha / (\text{K}^{-1})$	运动学粘性 系数 $\nu / (\text{m}^2/\text{s})$	表面张力温度 系数 $\sigma / (\text{N/m K})$
50 号硅油	960	1512	1.07×10^{-7}	0.96×10^{-3}	1×10^{-6}	7.50×10^{-6}

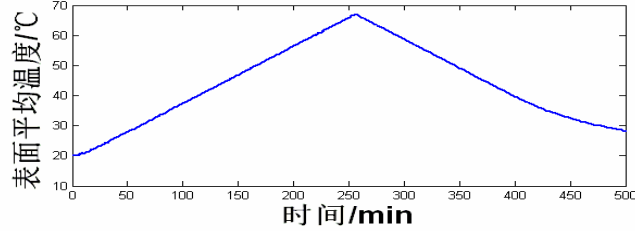
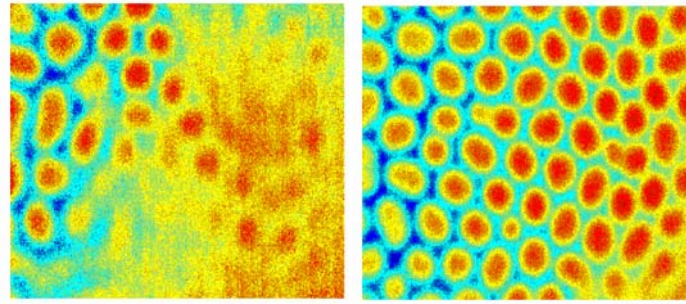


图 2 上表面平均温度随时间变化



(a) 开始对流 (61min)

(b) 完全对流 (66min)

图 3 开始对流和完全对流温度场

2 涡胞形成理论

Maragani-Bénard 是指在一个具有上自由表面处于静止状态的薄液层，当液层上下温差超过某一临界值时，液体由于界面张力梯度的作用失去稳定性而流动。其产生机理可简单做如下阐述：假设某处存在一个小扰动，使得流体自下向上运动，底端高温流体会被带到表面，导致该点表面温度比周围高，由于表面张力的大小随温度增加而减小，在表面张力梯度的作用下，流体向四周运动，这样又使得底端高温流体继续向上补充，使得整个运动过程得以维持。实现临界流动的条件可以通过基于 N-S 方程的稳定性分析得到。基本思路是：在基本流场上加入小扰动，得到小扰动方程后，转化为本征值问题的，得到临界条件。扰动方程可以写成：

$$L(U) = \mu M(U) + \Theta\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right) + N(U, U), U \subset E \quad (2)$$

其中，扰动场 $U = (\vec{v}, p, T)$ ，L, M, Θ 为线性算子，N 为二阶非线性算子。E 为边界条件。线性稳定性分析中往忽略非线性项，且中性稳定时 $\partial U / \partial t = 0$ ，所以得到：

$$L(U) = \mu M(U) \quad (3)$$

其非平凡解为：

$$U_{\vec{k}} = A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) U_{0\vec{k}} \quad (4)$$

带入式 (3) 得到本征值问题 $F(U, \mu; \lambda) = 0$ 。Marangoni-Bénard 对流的中性稳定性曲线为^[3]，

$$Ma = \frac{16k(k \cosh[k] + Bi \sin[k])(2k - \sinh[2k])}{4k^3 \cosh[k] + 3 \sinh[k] + \sinh[3k]} \quad (5)$$

无量纲数为

$$Ma = \frac{(-\partial\sigma/\partial T)\Delta T d}{\mu\kappa}, Bi = \frac{hd}{k}$$

其中， $\partial\sigma/\partial T$ 为表面张力温度系数， ΔT 为液层上下温差， h 为自由面散热系数， μ 液

体粘性系数, κ 为热扩散系数, k 为热导率。在 $Bi=0$ 时, 发生对流的临界条件为, $Ma_c=79.6$, $k_c=1.99$ 。

当 $Ma=Ma_c$ 时, 也并不是满足系统选择波数($k_c=1.99$)的各个方向的扰动波都会发展为失稳对流。如果那样成立, 整个流场结构将处于空间的混沌状态。考虑非线性项的作用, 不同方向的扰动波不是简单的叠加, 而是会相互促进或抑制彼此的增长。

若不同方向的波相互抑制增长, 最后流场仅仅保留单一方向的波, 其流场结构为(为了与实验对比, 本文仅仅考虑温度场的形式), $T = A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + c.c.$ (卷轴结构) (6)

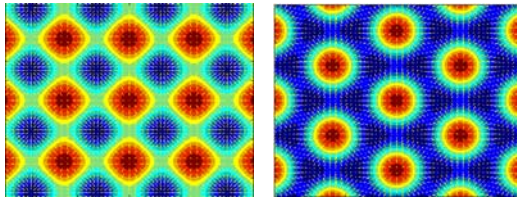
若互成 90° 的波之间相互促进增长, 则最后流场发展为(如图 4 (a)):
 $T = A_1 \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + A_2 \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + c.c.$ (四边形结构) (7)

若 3 个波之间互成 120° , 则 $\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0$, 会出现三波共振的情况, 这是因为二阶非线性项有:

$$N(\exp(-i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}), \exp(-i\vec{k}_3 \cdot \vec{r})) = \delta \exp(-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) \cdot \vec{r}) = \delta \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r})'$$

这使得 \vec{k}_2, \vec{k}_3 的波直接作用于 \vec{k}_1 , 产生共振项, 使得这三个方向的波相互增长。在 Rayleigh-Bénard 对流中, $\delta = 0$, 所以没有共振作用, 就是为什么在 Rayleigh-Bénard 出现的是卷轴结构, 而在 Marangoni-Bénard 出现的是六边形结构(如图 4 (b))。

$$T = A_1 \exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + A_2 \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + A_3 \exp(i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}) + c.c. \quad (\text{六边形结构}) \quad (8)$$



(a) 四边形结构 (b) 六边形结构

图 4 六边形涡胞和四边形涡胞的一阶线性解

由于不同扰动波之间存在非线性相互作用, 使得有的波数相互增长或抑制, 表现为六边形结构、四边形结构以及卷轴结构相互竞争。Colinet 等^[9]指出, Marangoni-Bénard 对流

中, 互成 120° 的波会相互共振, 通常情况下以六边形涡胞形式失稳。Nitschke^[10]等通过实验观察到六边形结构和四边形结构存在竞争, 在超临界流动会出现六边形结构向四边形结构转变的 2 次不稳定。Bestehorn^[11]的理论分析与 Nitschke 的实验结果定性相互一致。在超临界下 ($\varepsilon > 1$) 弱非线性分析失效, 需要通过实验来研究超临界对流蕴含的丰富现象。

图 5 给出了不同超临界数下, Marangoni-Bénard 对流上表面流场分布。图 5 (a) 中, 为流动刚好完全建立时 ($\varepsilon=0$), 上表面的温度场分布。在临界流动附近时, 涡胞以六边形结构为主, 但存在一些不规则形状的涡胞。随着超临界数 ε 的逐渐增加至 0.5 时(图 1.b), 发现不规则涡胞数目减小, 六边形涡胞数目增加。因此在临界对流附近时, 涡胞并不是最规则的图案, 而是在弱超临界对流状态下涡胞逐渐变为规则六边形结构。图 5 (c) ($\varepsilon=2.5$) 出现了许多四边形的涡胞结构。这种由六边形对流结构向四边对流结构转换叫做二次不稳定性。Nitschke 等^[9]对宽厚比 Γ 为 23 的液层进行实验发现当 $\varepsilon=2.35$ 时, 对流发生二次不稳定, 与本文在 $\varepsilon=2.5$ 的结果吻合

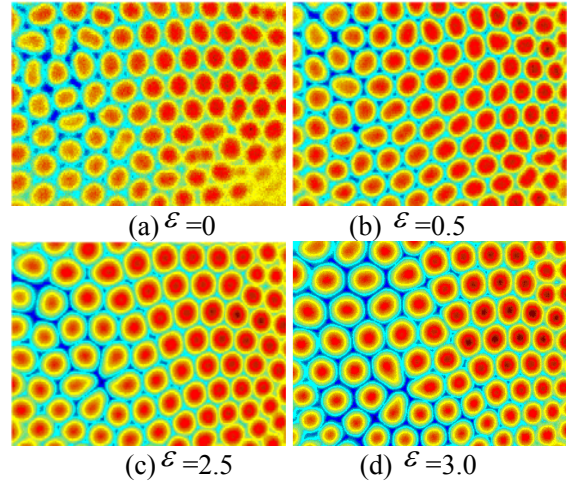


图 5 超临界条件下涡胞分布

理想条件下, 临界对流附近会出现规则的六边形对流结构。实验中, 在升温过程中的对流结构往往存在缺陷。然而缓慢线性降温至临界条件附近时却很容易出现非常规则的六边形涡胞结构。这说明了升温过程中没有出现六边形结构, 不是因为底面热边界条件不均匀导致, 而是因为涡胞结构的调整和变换的时间尺

度非常慢，所以当升温时，涡胞结构没有足够的时间从初始状态调整形成规则的六边形结构（图 5 (a)）。而降温时，前面已经经历了一个足够长的过程，使得涡胞能够由不规则结构调整到规则六边形结构（图 6）。

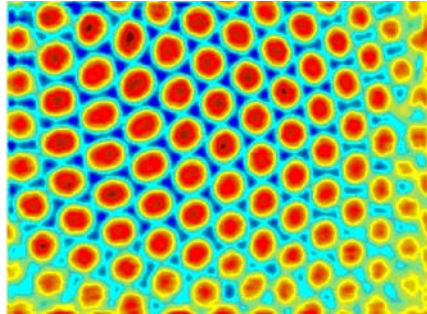


图 6 规则六边形涡胞

3 涡胞波数分析

六边形涡胞、四边形涡胞以及其他缺陷结构是对流中常见的结构。通过对比六边形、四边形涡胞表面温度分布形貌的实验结果和式 (7)、式 (8) 所述形式（图 7）。发现涡胞表面温度的三维形貌实验结果比理论的更“胖”，但是总体来说，二者是相一致的。这是因为理论上的涡胞只是基波，没有考虑比基波更高频的高次谐波。由于高次谐波的存在会改变涡胞的形态，要准确的表示涡胞的温度场分布，必须要考虑高次谐波的影响。特别是在高超临界的强非线性情况下，高次谐波的影响更为明显，会导致涡胞亚结构的出现。因此，分析温度场的各个频率的成分，以及对流场的影响，变得十分重要。

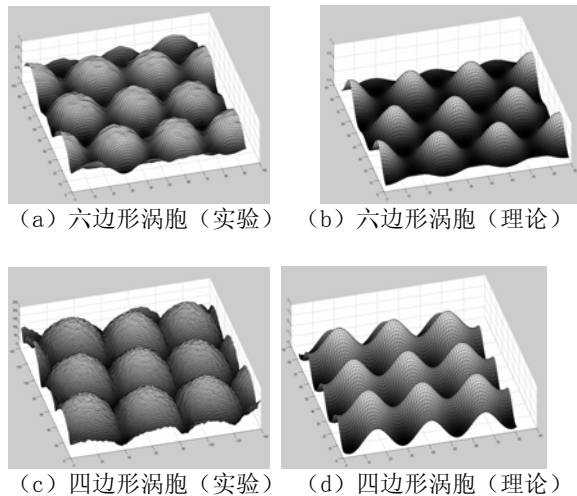


图 7 规则六边形涡胞

通过对红外热像仪采集的降温至临界点时的极规则六边形涡胞图像进行 2D-Fourier 分析，得到二维的频谱图。由于涡胞理论解的形式 ($A \exp(i\vec{k} \cdot \vec{r}) + c.c.$) 与 2D-Fourier 变换的基是一致的，可以直接与理论进行对比。图 8 是图 6 的二维频谱图有效信号部分放大图。

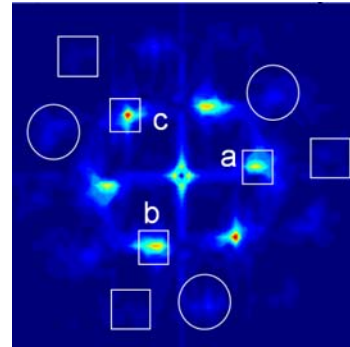


图 8 规则六边形涡胞频谱

由于温度场为实数，所以频谱是关于原点共轭对称的。图中存在六个比较亮的峰值，反映的是三个不同的方向的波在叠加，分别将频域 a,b,c 进行 2D-Fourier 逆变换得到图 9(a)、(b)、(c)。得到三个互成 120 度的波。证明了规则六边形涡胞结构是由于三个方向的波叠加的结果。频域 a,b,c 是温度场分布的基频信号，把所有基频信号进行 2D-Fourier 逆变换，得到图 9(d)，和原始温度场(图 6)相比，二者的涡胞的大小和排列完全一致。涡胞内部的温度分布与理论结果（图 4 (a)）一致。图 8 中的 a,b,c 与式(8)中的， \vec{k}_1 、 \vec{k}_2 、 \vec{k}_3 相对应。因此温度场 2D-Fourier 基频信号决定涡胞的大小和排列。

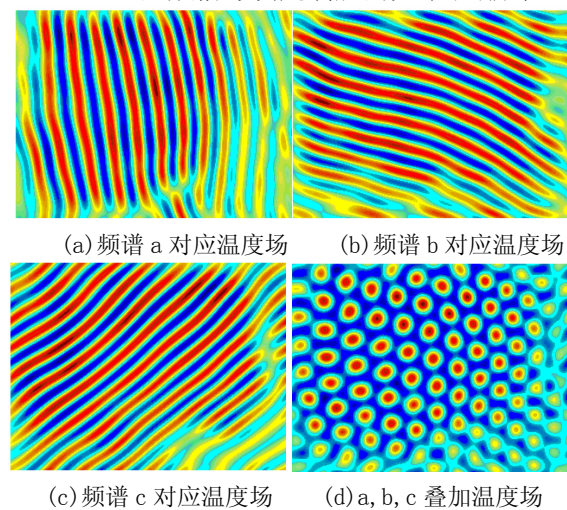


图 9 规则六边形涡胞结构及其频谱特征

图 9(d)与实际温度场是有差别的, 因为实际的温度场是由基波温度场与谐波温度场的叠加。谐波部分影响温度场分布, 使得涡胞表面温度三维图更为偏“胖”。高次谐波部分主要由两部分组成: 与基波方向一致、波数为基波的 2 倍的 2 次谐波和与基波方向成 30° 、波数为基波的 $\sqrt{3}$ 倍的 $\sqrt{3}$ 次谐波。2 倍频是一维二阶非线性振动的重要特征。在二维的系统中 $\sqrt{3}$ 倍频数是怎样产生的呢?

在弱超临界条件下, 只有波矢量落入临界环的扰动波才具有正增长率, 而其他的增长率均为负增长率。即存在一个集合 $P = \{\vec{k} \in R^2 \mid |\vec{k}| = k_c\}$, 当 $\vec{k} \in P$, 增长率大于 0, 称为主动模态 (Active mode), 当 $\vec{k} \notin P$, 增长率小于 0, 称为被动模态 (Passive mode) [13]。Marangoni-Bénard 存在三波共振, 因此主动模态如式 (8) 所示。由各向同性, 所以扰动最终有 $A_1 = A_2 = A_3 = \varepsilon$ 。 ε 是一个小量。考虑高阶项式 (8) 可以写为:

$$T = \varepsilon T_1 + \varepsilon^2 T_2 = \varepsilon \left[\exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + \exp(i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}) + c.c. \right] + \varepsilon^2 T_2 \quad (9)$$

式 (9) 带入式 (2) 得到:

$$\varepsilon^2 : L(T_2) = \mu M(T_2) + \Theta \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} \right) + N(T_1, T_1) \quad (10)$$

其中非线性项为:

$$\begin{aligned} N(T_1, T_1) &= \delta \left[\exp(i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \exp(i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + \exp(i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}) + c.c. \right]^2 \\ &= \delta \left\{ \underbrace{\exp(2i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \exp(2i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + \exp(2i\vec{k}_3 \cdot \vec{r})}_{2\text{倍频项}} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \times \underbrace{\left[\exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_3 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] \right]}_{\sqrt{3}\text{倍频项}} \right\} \\ &\quad + 2 \times \underbrace{\left\{ \exp[-i(\vec{k}_2 + \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \exp[-i(\vec{k}_3 + \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] + \exp[-i(\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] \right\}}_{\text{共振项}} + c.c. \end{aligned} \quad (11)$$

由线性叠加原理, 将 T_2 分为两部分, $T_2 = T_{2,\sqrt{3}k} + T_{2,2k}$, 有

$$\begin{aligned} L(T_{2,\sqrt{3}k}) &= \mu M(T_{2,\sqrt{3}k}) + \Theta \left(\frac{\partial T_{2,\sqrt{3}k}}{\partial t} \right) + \\ &\quad 2\delta \left\{ \exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_3 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] + \right. \\ &\quad \left. \exp[i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] \right\} + c.c. \end{aligned}$$

(12)

$$\begin{aligned} L(T_{2,2k}) &= \mu M(T_{2,2k}) + \Theta \left(\frac{\partial T_{2,2k}}{\partial t} \right) + \\ &\quad \delta \left\{ \exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_3 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] + \right. \\ &\quad \left. \exp[i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] \right\} + c.c. \end{aligned} \quad (13)$$

式 (12)、式 (13) 的解的形式为:

$$\begin{aligned} T_{2,\sqrt{3}k} &= 2\delta \cdot \beta(\sqrt{3}) \cdot \left\{ \exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \right. \\ &\quad \left. \exp[i(\vec{k}_3 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] \right\} + c.c. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} T_{2,2k} &= \delta \cdot \beta(2) \cdot \left\{ \exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \right. \\ &\quad \left. \exp[i(\vec{k}_3 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] \right\} + c.c. \end{aligned} \quad (15)$$

其中 β 为放大因子。 $T_{2,\sqrt{3}k}$ 、 $T_{2,2k}$ 是被主动模态 T_1 所激发的两个被动模态。图 10 所示为 T_1 、 $T_{2,\sqrt{3}k}$ 、 $T_{2,2k}$ 中所包含的所有波矢量。对比图(8)和图(10), 证明关于频谱成分的理论结果与实验结果几乎完全一致。与波 \vec{k}_1 互成 30° 的波 $\vec{k}_1 - \vec{k}_3$ 的产生机理是: 临界环上的波 \vec{k}_1 与波 $-\vec{k}_3$ (波 \vec{k}_3 的共轭) 非线性作用而激励产生的被动模态。对于四边形的情况同理可分析, 还存在 $\sqrt{2}$ 次谐波。

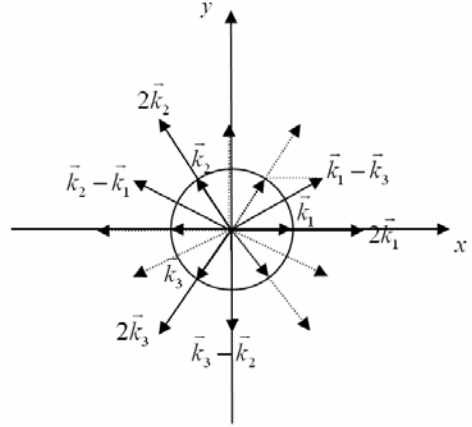


图 10 各次谐波波矢量分布

由于 2 次谐波和 $\sqrt{3}$ 次谐波离共振波数较远, 且 $\sqrt{3}$ 与 2 接近, 二者的放大因子近似相等, 既 $\beta(\sqrt{3}) \approx \beta(2)$, 所以 $\sqrt{3}$ 次谐波的幅值约为 2 次谐波的幅值的两倍。因此二阶高频部分可以写成:

$$\begin{aligned} T_2 &= A_2 \left\{ \exp(2i\vec{k}_1 \cdot \vec{r}) + \exp(2i\vec{k}_2 \cdot \vec{r}) + \exp(2i\vec{k}_3 \cdot \vec{r}) + \right. \\ &\quad \left. 2 \left[\exp[i(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_3 - \vec{k}_2) \cdot \vec{r}] + \exp[i(\vec{k}_2 - \vec{k}_1) \cdot \vec{r}] \right] + c.c. \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

在实验中，二阶高频的作用使得涡胞变得更“胖”，中心热点附近的温度有所提升，因此 A_2 为负值， T_2 的温度如下图分布，叠加至基波温度场（图 7（b）），能实现使涡胞变胖的效果。

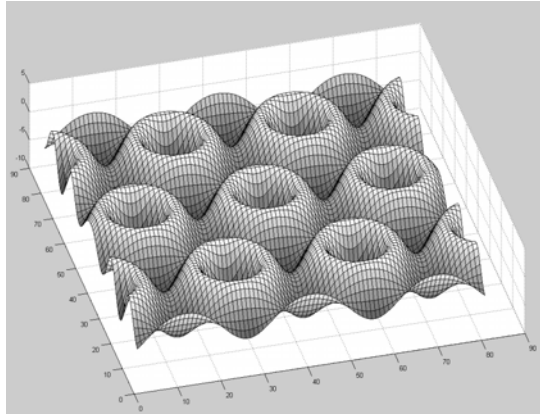
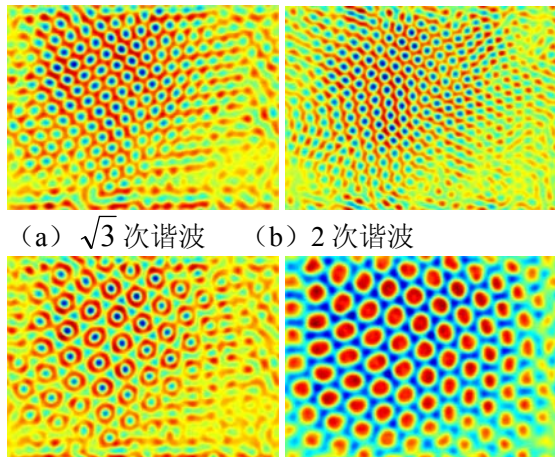


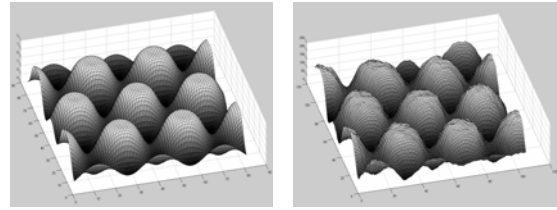
图 11 二阶高频模态形貌分布

为了验证 $\sqrt{3}$ 次谐波与 2 次谐波的幅值存在 2:1 的关系。分别提取 $\sqrt{3}$ 次谐波和 2 次谐波的频域信号，进行了 2D-Fourier 逆变换。结果如图所示。求得 $\sqrt{3}$ 次谐波对应的峰峰值为 0.093°C ，求得 2 次谐波对应的峰峰值为 0.046°C ，二者比例为 2.02: 1。基波为的峰峰值为 0.3611°C 。基波， $\sqrt{3}$ 次谐波的和 2 次谐波的强度之间的比例约：7.9: 2: 1。根据这一比例可以构造温度场。令 $A_1 = 1, A_2 = -0.125$ ，得到涡胞表面的分布图（图 13（a）），对比实验情况（图 13（b）），二者非常吻合，比起之前的理论，结果得到了明显的改善。



(c) $\sqrt{3}, 2$ 次谐波叠加 (d) 基波, $\sqrt{3}, 2$ 次谐波叠加

图 12 各次谐波的 2D-Fourier 逆变换



(a) 理论结果

(b) 实验结果

图 13 二阶理论构造涡胞与实验结果

4 超临界波数分析

流场结构的基波决定了涡胞的大小和分布，流场的高次谐波是改变涡胞内部的流场的分布。基频部分在流场结构上直接表现为涡胞的尺寸，对流的一个重要的特征。六边形结构中，波数 k 与涡胞大小（六边形内切圆的直径）的关系为：

$$L = \frac{4\pi d}{\sqrt{3}k} \quad (17)$$

在临界对流 $Ma=79.8$ 时，临界波数的实验结果与理论值 ($k=1.99$) 吻合的较好。这是因为在临界条件下只有一个波数是呈正增长。然而在超临界流动中，系统选择以哪一个波数的对流结构失稳至今还是一个难题。因为超临界条件下 ($Ma > Ma_c$) 时，理论上存在一个波段增长率是大于零的。然而在实际对流中往往只选择波段中的某一个波数。失稳波数确定还没有有效的理论方法。确定超临界波数的只有通过实验的方法。

Benard^[1]最早在文章中指出，涡胞尺寸随温差增加先是减小，然后是增大。由于波数与涡胞的尺寸成反比，既波数会随着 Ma 数的增加，先增加后减小。Koschmieder 等^[8]通过阴影法实验证实了 Bénard 的发现，但是采用统计涡胞数量的方法，局限于定性分析，没有绘制精确的超临界数与波数的关系曲线。通过前面的分析，只需分析表面温度场的 2D-Fourier 谱的基波的波数，即可直接的给出涡胞对应的波数。如图 8 中，只要求出 a、b、c 基波对应波矢量的模的平均值，即可得到对流波数。对于不规则结构，主频附近的一个圆环都会有信号，因此我们将基频波数附近的一个带宽内，所有波数取加权平均值，权重为波数的幅值，即可求得平均波数。

图 14 所示为 50 号硅油 3mm 和 3.5mm 厚液层的平均波数随着超临界数变化曲线的实验结果。3mm 和 3.5mm 的实验中，发生对流的临界波数分布为 $k_c=2.148$ 和 $k_c=2.141$ ，略比界面无散热 ($Bi=0$, $Bi=h d / k$, h 界面散热系数, d 液层厚度, k 流体热导率) 临界波数 $k_c=1.99$ 高, 这是由于两方面的原因造成的: 首先, 实际条件下, 自由表面存在界面散热, 当存在界面散热时, 临界 Ma 数和临界波数都比无散热条件下的大, 若实验中取界面散热系数 $h=10$ ($W/(m^2K)$), 得到实际条件下, $Bi=0.2$, 由式 (5) 得, 临界 $Ma=87.195$, 临界波数 $k_c=2.060$; 其次, 临界点的选取有一定偏差, 采用的是流动由局部发展到整个流场时作为临界点, 而流动早于此出现。

可以非常明显观察到, 当增大超临界数时, 波数先增大后减小, 并且两组实验符合的较好。3.0 mm 液层, $\varepsilon=0.597$ 时, 最大波数 $k_{max}=2.281$, 3.5 mm 液层, $\varepsilon=0.678$ 时, 最大波数 $k_{max}=2.285$ 。由涡胞的尺寸与波数的换算关系可得, 3 mm 临界对流平均涡胞尺寸 $L=10.2$ mm, 最大波数的涡胞尺寸 $L=9.6$ mm。在整个波数增大的过程中, 涡胞尺寸仅减小 0.6 mm, 但在实验中能清晰的分辨, 说明此方法具有较高的精度和灵敏度。波数在整个演化的过程中并不是平缓地变换, 而是以一定的波动上升或者下降, 这是因为涡胞并不是以同一种阵列形式均匀的向四周缩小或者扩张, 在整个演化过程中伴随有涡胞的生成和分裂, 甚至发生涡胞在水平方向漂移。因此, 实验中波数演化的曲线不可能是光滑的。

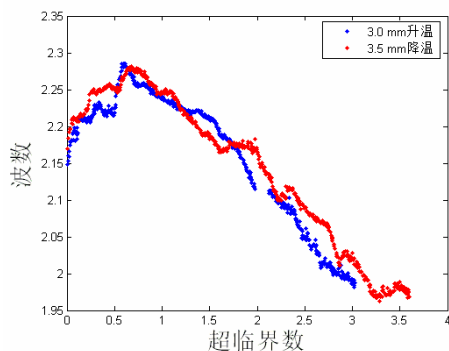


图 14 超临界数与波数关系曲线

涡胞为什么会先增大再减小, 目前来说机理还不明确。涡胞作为一种耗散结构, 能将液层底部的热量传导出。如果假设成立, 随着上下温差的增加, 为了尽快地把热量导出, 应该增大涡胞的个数, 增大对流的波数。事实却是涡胞先增加后减小。因此在升温的过程中涡胞的性质发生了变化, 这种变化应该在涡胞的温度场内部温度场结构有所体现, 即在谐波和基波的强度比有所改变。考虑二阶扰动项时, 高频包含了 $\sqrt{3}$ 次谐波和 2 次谐波。当流场结构不是规则六边形, 两个谐波的在频谱上混叠在一起, 不容易分开。因此, 本文根据求得的平均波数 k , 分别单独提取基波频带

$|\bar{k}| \in [0.5k, (1 + \sqrt{3}k) / 2]$ 和高阶谐波频带 $|\bar{k}| \in [(1 + \sqrt{3})k / 2, 2.5k]$ 的频域信号进行 2D-Fourier 逆变换得到基波温度分布和高阶谐波温度分布。高阶谐波是 $\sqrt{3}$ 次谐波和 2 次谐波的叠加。如, 图 6 所示温度场的基波为图 9(d) 所示, 高次谐波为图 12(c) 所示。高频谐波与基波的峰峰之比 χ 可以反应基波和高次谐波之间的强度分布, 可以表征涡胞的内部温度分布。对 3mm 厚 50 号硅油的升温实验得到谐波与基波的强度比如图 15 所示。

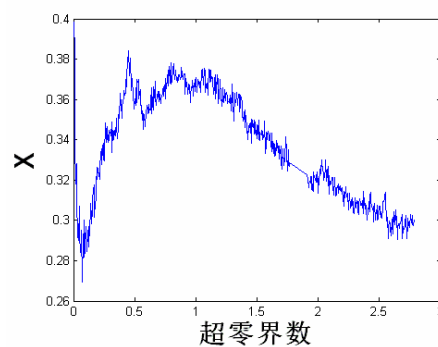


图 15 超临界数和谐波、基波强度比关系曲线

实验表明, 随着超临界数的增加, 谐波与基波的强度比也同样经历了先增加的后减小的过程。这与直观的理解是矛盾的, 随着超临界数的增加, 非线性作用越强, 所以高频的能量就越大, 然而当 $\varepsilon > 1$ 时, 高频能量却是减小的。也就是说, 温差增大, 对流增强, 涡胞并没有一直变胖, 而是经历了先变“胖”再变“瘦”的过程。对比图 15 和图 14 我们发现两条曲线具有同样的趋势, 而且极值点的位置是一致的。当高频占的比重也增大, 基波波数增

大时，高频占的比重也减小时，当基波波数减小。直观的物理图像是：当涡胞尺寸减小时，涡胞的形状变“胖”，当涡胞的尺寸变大时涡胞的形状变“瘦”。波数的选择是基波和高次谐波相互作用的结果，和高次谐波与基波的强度比有关系。因此，波数的随超临界数先增后减可能与是否有浮力对流的作用无关，而是和能量在基波和高次谐波的分布有关。

另外，对比升温过程和降温过程的波数演化，发现降温的过程中波数并不会沿着升温的路径原路返回，在较高临界数区域，降温过程的波数比升温过程小，在波数极大值附近区域，比升温过程的波数大，然而在临界数附近 ($\varepsilon=0$) 波数比升温时超临界波数小。3.0 mm 与 3.5mm 的实验中，都得到了同样的趋势，图 5 所示为液层为 3.0 mm 厚的实验情况。降温时的最大波数 $k_{max}=2.337$ 明显高于升温时最大波数。降温临界波数为 $k_c=2.055$ ，与考虑散热条件下的临界波数 $k_c=2.060$ ，吻合得相当好。

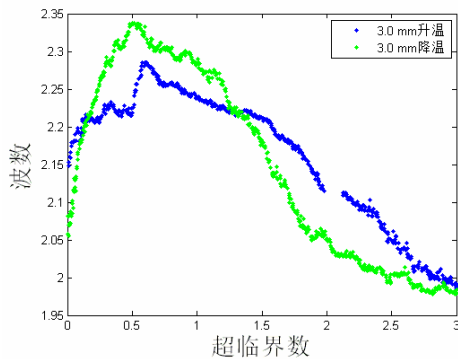


图 16 升温和降温过程超临界数与波数关系曲线

本文认为，升温与降温过程中波数选择不一致，是属于非线性迟滞 (hysteresis) 的现象。按照线性理论，随着超临界数的增大，增长率最快的波数也增大，也就是说波数随着超临界数的单调递增，然而这与实际情况不符，不能用线性的理论简单地进行解释。实验中 $\varepsilon=3$ ，也超出了弱非线性理论 ($\varepsilon \ll 1$) 能够提供可靠解释的范畴。非线性迟滞已经在 Bénard 对流中发现^[10]，但是波数的非线性迟滞还没有人提出。Koschmeider 等^[8]，发现升温 and 降温过程涡胞的数目不一致，但他们认为这不是非线性迟滞效应。在他们的实验中超临界数极大值

$\varepsilon=0.75$ ，1.2 mm 和 1.9 mm 的实验都表明，在最大超临界波数附近，降温时波数比升温时的要大。然而他们认为这些误差是由边界的效应引起，因为在涡胞的增加和减小主要是在边界处产生，所以认为升温 and 降温涡胞和边界的作用不同，导致两个过程涡胞数不相同。然而在本实验中，红外热像仪拍摄的区域为液池中央，面积不到整个液池面积的一半，所以不可能引入边界的影响。因此，认为这种升温与降温过程中波数选择不一致是非线性迟滞现象。

5 结 论

本文通过理论结合实验，介绍了各种结构的涡胞 (卷轴，四边形，六变形) 的形成机理，它是不同方向的扰动波之间相互作用、相互竞争的结果。通过实验得到流场结构转换的基本物理图像，发现在升温过程中略微超临界条件下更容易得到六边形结构。随着超临界数的增加，四边形的结构增多，与 Nitschke 等发现的二次不稳定现象相一致。并且发现在降温阶段更容易出现规则的六变形结构。对降温时规则六边形涡胞进行 2D-Fourier 分析，发现实际的涡胞并不是由单一频段的扰动波形成的，而是由基波和高次谐波组成。基波是由三个互成 120° 的波叠加，而高次谐波部分主要由两部分组成：与基波方向一致 2 次谐波和与基波方向成 30° 的 $\sqrt{3}$ 次谐波。从理论上证明了二者的强度比为 1:2，并且得到了实验的验证。高次谐波的存在使得涡胞表面温度的三维图变得更“胖”。在考虑高次谐波的影响情况下，构造出的涡胞与实验结果十分的接近。在此基础上，从基波与谐波相互作用的角度，研究了超临界波数选择问题。首先，得到超临界数与波数的关系曲线，观测到对流波数先增加后减小的过程，且两种厚度下吻合的较好。同时给出了超临界数和谐波与基波强度比的关系曲线，对比超临界数-曲线，发现变化二者趋势相同，而且极值点相一致。因此，谐波与基波的强度比与涡胞的大小有关。实验发现谐波与基波的强度比增大时，基频波数也增大，涡胞减小；谐波与基波的强度比减小时，基频波数也减小，涡胞增大。同时，发现升温 and 降温过程存在波数的差异，说明升温 and 降温过程存在非线性迟滞效应。

致 谢 感谢国家自然科学基金 (11032011, 10972224) 和三期创新方向性项目 (KJXC2-YW-L08) 的资助。

参考文献

- 1 H. Bénard, Les Tourbillons Cellulaires dans un Nappe Liquide. Rev General Sci Pur Appl 1900: 1261~1271
- 2 Rayleigh, L., On convection currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side Philosophical Magazine, 1916. 32: 529~546
- 3 Pearson, J.R.A., On Convection Cells Induced by Surface Tension. Journal of Fluid Mechanics 1958. 4: 489~500
- 4 Nield, D.A., Surface Tension and Buoyancy Effects in Cellular Convection. J. Fluid Mech, 1964. 19: 341~352
- 5 Koschmieder E. L., Biggerstaff M. I., Onset Of Surface-Tension-Driven Bénard Convection. J Fluid Mech, 1986. 167: 49-64
- 6 John R. Royer, Patrick O' Neill, Nathan Becker, et al. Wave-number selection by target patterns and sidewalls in Rayleigh-Bénard convection, Phys. Rev. E, 2004, 70, 036313
- 7 P. Cerisier, C. Perez-Garcia, C. Jamond, et al. Wavelength Selection in Bénard-Marangoni Convection, Phys. Rev. A, 1987, 35, 1949-1952
- 8 Koschmieder E. L., Switzer D. W., The Wavenumbers of Supercritical Surface-tension-driven Bénard Convection, J. Fluid Mech., 1992, 240: 533-548
- 9 Pierre Colinet, J. C. Legros, M. G. Velarde, Nonlinear Dynamics of Surface-Tension-Driven Instabilities, Wiley, (2005)
- 10 Nitschke K., Thess A., Secondary instability in surface-tension-driven Benard convection, Physical Review E, 1995. 52: 5772-5775
- 11 M. Bestehorn, Square patterns in Benard-Marangoni convection, Phys. Rev. Lett. 76, 46-49(1996).
- 12 Schatz, M. F., VanHook, S. J., McCormick, W. D., et al., Onset of surface-tension-driven Bénard convection. Phys. Rev. Lett., 1995, 75, 1938-1941.
- 13 P. Manneville, Dissipative Structures and Weak Turbulence, Academic Press, San Diego, 1990.

THE WAVENUMBERS ANALYSIS OF SUPERCRITICAL MARANGONI-BENARD CONVECTION

WU Di DUAN Li KANG Qi

(National Micro-gravity Laboratory, Institute of Mechanics, C A S, No.15 Beisihuanxi Road, Beijing 100190, China)

Abstract The wavenumbers selection of supercritical Marangoni-Bénard convection has been studied theoretically and experimentally in a single liquid layer at a large aspect ratio, which has been heated uniformly below. The surface temperature has been measured by the infrared thermography camera. The two dimensional Fourier transformation has carried on the thermographic image to analyse the wavenumbers of the temperature field. The spectrum are consist of fundamental waves and the harmonic waves. The fundamental waves are superposed by 3 waves at angle 120° to each other. The harmonic waves can be divided into 2 parts: 2 order harmonic waves and $\sqrt{3}$ order harmonic waves. The amplitude ratio of harmonic waves to fundamental waves increases first before the decreases as the increase of temperature difference, and maximum points exist. The wavenumber of fundamental waves experience the same case that the wavenumber firstly increase then decrease. The two maximum points are coincident. It means that the amplitude ratio of harmonic waves to fundamental waves is relate to fundamental wavenumber. It conclude that the wavenumber increase when the ratio increase, while decrease when the ratio decrease.

Key words Marangoni-Bénard convection, supercritical, 2D-Fourier, pattern formation, wavenumbers selection