



CSTAM 2012-B03-0021

**广义有限 Hankel 变换及其在分形生物组织中的应用**

蒋晓芸

山东大学数学学院应用数学所

**第七届全国流体力学学术会议**

**2012 年 11 月 12—14 日 广西·桂林**

# 广义有限Hankel变换及其在分形生物组织中的应用<sup>1)</sup>

蒋晓芸<sup>\*, 2)</sup>

\* (山东大学数学学院应用数学所, 济南 250100)

**摘要** 本研究成果将分形维数引入分形介质, 讨论分数维空间的反常扩散方程的初边值问题, 为求解上述定解问题, 我们利用正交基理论建立了分形空间有限 Hankel 变换及反演变换理论, 新的积分变换为求解具有分形维数的柱坐标及球坐标下的各类初边值问题提供了新的解析工具。此外借助分形理论建立了分形空间人体组织热传导方程, 应用所得到的积分变换公式研究了分形生物组织传热方程及其解, 得到了许多有意义的结论。

**关键词** 分形空间, 生物传热, 广义有限 Hankel 变换

## 引言

积分变换方法被广泛应用于解数学物理的初边值问题, 为求解初边值问题提供了一种有效的方法。它涉足于线性系统、热学、流体力学、量子力学等领域。Hankel积分变换是一种求解柱坐标系下数理方程十分有效的方法, Sneddon<sup>[1]</sup> 首先提出了有限Hankel积分变换, Ali and Kalla<sup>[2]</sup> 介绍了一种广义有限Hankel变换, 最近, Eldabe *et al*<sup>[3]</sup> 给出了有限Hankel变换的另外一个定义。目前许多研究考虑d-维欧氏空间的扩散方程, 分形空间的扩散方程还没有引起太多的注意。本文的目的是建立分形空间的分数阶Hankel变换, Sneddon<sup>[1]</sup> 介绍的有限Hankel变换将作为本文的特例而被包含。此外借助分形理论建立了分形空间人体组织热传导方程, 应用所得到的积分变换公式研究了分形生物组织传热方程及其解, 得到了许多有意义的结论。

## 1 广义有限 Hankel 变换

自然界和工程技术中, 绝大多数重要的反应都是非匀相反应, 这些反应界面的几何结构非常复杂, 具有分形结构的特征, 其扩散现象不能用经典的扩散来描述, 称之为“反常扩散”, 本研究成果将分形维数引入分形介质, 讨论了如下形式的扩散方程:

$$\frac{1}{r^{d_f-1}} \frac{\partial}{\partial r} [r^{d_f-1} D_0 r^{-\theta} (\frac{\partial p(r,t)}{\partial r})] = \frac{\partial p(r,t)}{\partial t},$$

其中  $d_f$  是 Hausdorff 维数,  $D_0 r^{-\theta}$  是分形扩散系数。

本节我们考虑方程 (1) 及下面边条件引入有限 Hankel 变换。

$$p(r,t)|_{r=R} = 0. \quad (2)$$

为求解上述问题我们考虑下面的本征值问题:

$$\frac{1}{r^{d_f-1}} \frac{d}{dr} (r^\eta \frac{d\varphi}{dr}) + \lambda_m^2 \varphi = 0, \quad (3)$$

$$\varphi|_{r=R} = 0, |\varphi(\lambda_m, 0)| < \infty, \quad (4)$$

这里  $\lambda_m (m=1, 2, 3, \dots)$  是本征值,  $\eta = d_f - 1 - \theta \geq 0$ . 特征函数  $\varphi(\lambda_m, r)$  对于权函数  $r^{d_f-1}$  是正交的, 即

$$\int_0^R r^{d_f-1} \varphi(\lambda_m, r) \varphi(\lambda_n, r) dr = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ N(\lambda_m), & m = n, \end{cases} \quad (5)$$

其中范数定义为:

$$N(\lambda_m) = \int_0^R r^{d_f-1} (\varphi(\lambda_m, r))^2 dr. \quad (6)$$

在  $(0, R)$  内定义的函数  $P(r, t)$  用特征函数  $\varphi(\lambda_m, r)$  表示为

$$P(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m(t) \varphi(\lambda_m, r) \quad \text{in } R. \quad (7)$$

用算子  $\int_0^b r^{d_f-1} \varphi(\lambda_m, r) dr$  对上式两边运算, 并利用正交关系 (5) 得

1) 国家自然科学基金(No. 11072134, No: 91130017)资助项目  
2) Email: wjxyf@sdu.edu.cn

$$C_m(t) = \frac{1}{N(\lambda_m)} \int_0^R r^{d_f-1} \varphi(\lambda_m, r) P(r, t) dr \quad (8)$$

方程 (8) 代入方程 (7) 得

$$P(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(\lambda_m, r)}{N(\lambda_m)} \int_0^R r^{d_f-1} \varphi(\lambda_m, r') P(r', t) dr' \quad (9)$$

基于上面的分析我们介绍广义有限 Hankel 变换如下:

**定义 1.** 若函数  $f(r)$  在区间  $[0, R]$  上连续二阶可导, 则广义有限 Hankel 变换定义为

$$\mathfrak{R}_\mu \{f(r)\} = \tilde{f}_\mu(\lambda_m) \quad , \quad (10)$$

$$= \int_0^R r^{d_f-1} f(r) \varphi_\mu(\lambda_m, r) dr$$

逆变换定义为

$$\mathfrak{R}_\mu^{-1} \{\tilde{f}_\mu(\lambda_m)\} = f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi_\mu(\lambda_m, r)}{N(\lambda_m)} \tilde{f}_\mu(\lambda_m) \quad , \quad (11)$$

其中  $\lambda_m$  是下列方程的正根:

$$J_\mu(\lambda_m b R^a) = 0 \quad , \quad (12)$$

特征函数为

$$\varphi_\mu(\lambda_m, r) \begin{cases} 1 & \lambda_m = 0 \\ r^{\frac{1-\eta}{2}} J_\mu(\lambda_m b r^a) & \lambda_m > 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$\mu = 1 - \frac{d_f}{\theta + 2}, a = \frac{2 + \theta}{2}, b = \frac{2}{2 + \theta}.$$

**定理 1** [4] 如果  $f(r)$  在区间  $[0, R]$  上连续二阶可导且满足边条件 (4), 那么  $f(r)$  可表示成如下的 Fourier-Bessel 级数

$$f(r) = \frac{2r^{\frac{1-\eta}{2}}}{bR^{2a}} \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{f}_\mu(\lambda_m) \frac{J_\mu(\lambda_m b r^a)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_m b R^a)} \quad (14)$$

**定理 2** 如果  $f(r)$  在区间  $[0, R]$  上有定义

$$\mathfrak{R}_\mu \{f(r)\} = \tilde{f}_\mu(\lambda_m), \text{ 那么}$$

$$\mathfrak{R}_\mu \left\{ \frac{1}{r^{d_f-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta \frac{\partial f(r)}{\partial r}) \right\} = R^\eta \left[ f \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial r} \right]_{r=R} - \lambda_m^2 \tilde{f}_\mu(\lambda_m) \quad \circ$$

**证明:** 利用定义 1

$$\mathfrak{R}_\mu \left\{ \frac{1}{r^{d_f-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta \frac{\partial f(r)}{\partial r}) \right\} = \int_0^R \frac{\partial}{\partial r} (r^{d_f-1-\theta} \frac{\partial f(r)}{\partial r}) \varphi_\mu(\lambda_m r) dr.$$

对上式右侧应用分部积分得

$$r^\eta \frac{\partial f}{\partial r} \varphi_\mu(\lambda_m r) \Big|_0^R - \int_0^R r^\eta \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial r} dr$$

$$= R^\eta (\varphi_\mu \frac{\partial f}{\partial r} - f \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial r}) \Big|_{r=R} + \int_0^R f \frac{\partial}{\partial r} (r^\eta \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial r}) dr.$$

利用边条件 (4) 定理 2 得证。

当  $d_f = 2, \theta = 0$  时, 定义 1、定理 1、定理 2 即为经典的有限 Hankel 变换 [1], 因此经典有限 Hankel 变换是本文的特例。结果 (14) 可以用来解分形空间的初边值问题。

## 2. 分形生物组织传热模型及其解

生物传热学已广泛应用于肿瘤的热疗, 冷疗, 低温外科手术等, 为临床医学的发展提供了依据 [5,6]。不少学者对于传热模型的研究做出了大量贡献, 其中被广泛采用的是 Pennes 生物组织传热模型 [7], 即

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla (k \nabla T) + W_b C_b (T_b - T) + Q_m \quad ,$$

其中,  $T$  是组织温度,  $k$  是组织热传导率,  $W_b$  是血液灌注率,  $C_b$  是血液比热容,  $T_b$  是动脉血温度,  $Q_m$  是代谢产热,  $\rho$  是组织密度,  $C$  是组织比热容。

前人大多是在欧氏空间中研究生物组织温度的分布情况 [8,9]。大量的文献表明生物体在基因、生物细胞、生物大分子、组织和器官等层次上均表现出明显的分形性质, 人体组织也具有分形结构 [10]。基于这些研究成果, 本文讨论分形生物组织传热方程及其解析解, 并把经典的圆柱坐标系下传热方程的解作为特例进行讨论。

考虑导热过程发生在一个分形维数为  $d_f$  的有限尺度的生物组织中。令  $Q(r, t)$  为组织中半径为  $r$  和  $r + dr$  之间球壳在时间  $t$  时的热容量,  $J(r, t)$  为流过半径为  $r$  的球面的总热流, 假定  $T(r, t)$  为半径为  $r$  和  $r + dr$  之间微元球壳中的平均温度, 类似欧氏空间有 [11]

$$Q(r, t) \propto r^{d_f-1} \rho C T(r, t) \quad , \quad (15)$$

则分形介质中流过半径为  $r$  的球面的总热流可表达为

$$J(r, t) = D(r) r^{d_f-1} \frac{\partial T(r, t)}{\partial r} \quad , \quad (16)$$

其中,  $D(r) = kr^{-\phi}$  为分形人体组织导热系数,  $k$  是欧氏空间组织热传导率。

将 (15), (16) 式代入下列能量守恒方程 [11]

$$\frac{\partial Q(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial J(r, t)}{\partial r} \quad ,$$

并考虑到人体组织传热的血液灌注项和代谢产热项得到如下分形生物组织传热方程:

$$k \frac{1}{r^{df-1}} \frac{\partial}{\partial r} (r^{df-1-\phi} \frac{\partial T(r,t)}{\partial r}) + W_b C_b (T_b - T(r,t)) + Q_m = \rho C \frac{\partial T(r,t)}{\partial t}, \quad (17)$$

这里，我们假设人体组织温度  $T$  是二阶连续可微的。

考虑以下初边界条件：

$$\frac{\partial T(r,t)}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad (18)$$

$$T(r,t) = T_c, \quad r = R, \quad (19)$$

$$T(r,t) = T_0, \quad t = 0. \quad (20)$$

其中体表定义为  $r = 0$ ，体核定义为  $r = R$ 。在体表采用绝热边界条件，在体核处考虑体核温度恒定。考虑  $\phi = 0$ ，引入无量纲变量<sup>[12]</sup>：

$$r^* = \frac{r}{R}, \quad t^* = \frac{kt}{\rho CR^2}, \quad T^* = \frac{T - T_0}{T_c - T_0},$$

则得到无量纲方程及其初边界条件：

$$\frac{1}{(r^*)^{df-1}} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r^*)^{df-1} \frac{\partial T^*}{\partial r^*}) + \frac{W_b C_b R^2}{k} (\frac{T_b - T_0}{T_c - T_0} - T^*) + \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} = \frac{\partial T^*}{\partial t^*} \quad (21)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial r^*} = 0, \quad r^* = 0, \quad (22)$$

$$T^* = 1, \quad r^* = 1, \quad (23)$$

$$T^* = 0, \quad t^* = 0. \quad (24)$$

$$\text{引入变量 } \theta^* = T^* - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0}, \quad (25)$$

则 (21) - (24) 式变为：

$$\frac{1}{(r^*)^{df-1}} \frac{\partial}{\partial r^*} ((r^*)^{df-1} \frac{\partial \theta^*}{\partial r^*}) - \frac{W_b C_b R^2}{k} \theta^* + \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} = \frac{\partial \theta^*}{\partial t^*} \quad (26)$$

$$\frac{\partial \theta^*}{\partial r^*} = 0, \quad r^* = 0, \quad (27)$$

$$\theta^* = 1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0}, \quad r^* = 1, \quad (28)$$

$$\theta^* = -\frac{T_b - T_0}{T_c - T_0}, \quad t^* = 0. \quad (29)$$

对 (21) - (24) 式中的空间变量  $r^*$  作广义有限 Hankel 变换 (10) 并利用定理 2，得到：

$$-(1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0})(\lambda_n J_\mu'(\lambda_n)) - \lambda_n^2 \bar{\theta}^* \quad (19)$$

$$- \frac{W_b C_b R^2}{k} \bar{\theta}^* + Q = \frac{\partial \bar{\theta}^*}{\partial t^*},$$

$$\bar{\theta}^* = q, \quad t^* = 0, \quad (20)$$

其中  $\varphi_\mu(\lambda_n, r^*) = (r^*)^\mu J_\mu(\lambda_n r^*)$ ，

$\mu = 1 - \frac{df}{2}$ ， $\lambda_n$  是超越方程  $J_\mu(\lambda_n) = 0$  的正根，

$$Q = \int_0^1 (r^*)^{df-1} \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} \varphi_\mu(\lambda_n, r^*) dr^* \quad (21)$$

$$= \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} \frac{J_{\mu+1}(\lambda_n)}{\lambda_n},$$

$$q = \int_0^1 (r^*)^{df-1} \frac{T_0 - T_b}{T_c - T_0} \varphi_\mu(\lambda_n, r^*) dr^* \quad (22)$$

$$= \frac{T_0 - T_b}{T_c - T_0} \frac{J_{\mu+1}(\lambda_n)}{\lambda_n}.$$

这里我们利用了关系式  $J_{\mu-1}(\lambda_n) = -J_{\mu+1}(\lambda_n)$ 。

对 (19)，(20) 式中的时间变量  $t^*$  作 Laplace 变换，得到：

$$s^{-1} [-(1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0})(\lambda_n J_\mu'(\lambda_n))] - \lambda_n^2 \hat{\theta}^* - \frac{W_b C_b R^2}{k} \hat{\theta}^* + s^{-1} Q,$$

$$= s \hat{\theta}^* - q,$$

整理得：

$$\hat{\theta}^* = \frac{s^{-1} [Q - (1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0})(\lambda_n J_\mu'(\lambda_n))] + q}{s + \lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}}$$

对上式作逆 Laplace 变换，得

$$\bar{\theta}^* = [Q - (1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0})(\lambda_n J_\mu'(\lambda_n))] t^* \quad (23)$$

$$\times E_{1,2}(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}) t^*)$$

$$+ q \exp(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}) t^*).$$

利用广义有限 Hankel 逆变换 (11) 式：

$$\theta^* = 2(r^*)^\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\mu(\lambda_n r^*)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_n)} \bar{\theta}^*, \quad (24)$$

将 (21)、(22)、(23) 式代入 (24) 式，得到解析解为：

$$\theta^* = 2(r^*)^\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\mu(\lambda_n r^*)}{J_{\mu+1}^2(\lambda_n)} [( \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} \frac{J_{\mu+1}(\lambda_n)}{\lambda_n} - (1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0})(\lambda_n J_\mu'(\lambda_n)) ) \times \exp(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}) t^*) - 1 + \frac{T_0 - T_b}{T_c - T_0} \frac{J_{\mu+1}(\lambda_n)}{\lambda_n} \exp(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}) t^*)]$$

$$- (\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}) \quad (25)$$

这里，我们利用了关系式

$$E_{1,2}(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k})t^*) = \frac{\exp(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k})t^*) - 1}{-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k})t^*}$$

特别地，当  $t \rightarrow \infty$  时，得到稳态时方程的解析解为：

$$\theta^* = 2(r^*)^\mu \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_\mu(\lambda_n r^*)}{J_{\mu+1}(\lambda_n)} \left[ \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} \frac{J_{\mu+1}(\lambda_n)}{\lambda_n} - \left(1 - \frac{T_b - T_0}{T_c - T_0}\right) (\lambda_n J_\mu(\lambda_n)) \right] \times \frac{1}{\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k}}$$

当  $df = 2$  时，方程（17）退化为经典的圆柱坐标系下的 Pennes 方程，且令  $T_c = T_b$ ，则其解为：

$$\theta^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2J_0(\lambda_n r^*)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)} \left[ \frac{Q_m R^2}{(T_c - T_0)k} \frac{\exp(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k})t^*) - 1}{-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k})} - \exp(-(\lambda_n^2 + \frac{W_b C_b R^2}{k})t^*) \right]$$

### 3 结果及分析

根据（25）式我们得到如下图所示的温度变化情况，参照文献[12]参数取值如下：

$$\begin{aligned} r^* &= 0.35, \quad R = 0.05m, \\ Q_m &= 1085 W / m^3, \quad T_0 = T_b = 36.5^\circ C, \\ T_c &= 37^\circ C, \quad \rho = 1000 Kg / m^3, \\ C &= 4190J / (Kg \cdot ^\circ C), \quad W_b = 3Kg / (s \cdot m^3), \\ C_b &= 3850J / (Kg \cdot ^\circ C), \quad k = 0.48W / (m \cdot ^\circ C). \end{aligned}$$

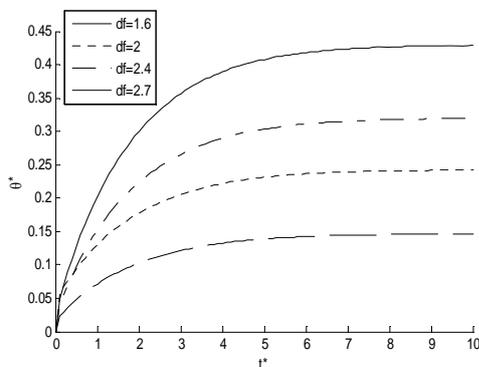


图1  $df$  取不同值时  $\theta^*$  随时间  $t^*$  的变化情况

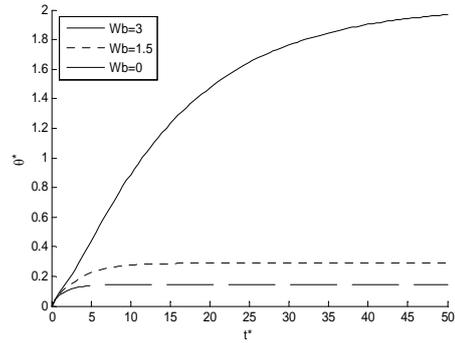


图2  $W_b$  取不同值时  $\theta^*$  随时间  $t^*$  的变化情况

由图1可以看出，在  $\theta^*$  达到稳定状态之前，分形维数  $df$  越大， $\theta^*$  变化越快。同一时间点上， $\theta^*$  随着  $df$  的增加而增加。由图2可知，在  $\theta^*$  达到稳定状态之前，血液灌注率  $W_b$  越大，组织温度变化越慢，并且血液灌注率  $W_b$  越大，达到稳定状态所需的时间越短。这说明血液灌注率在生物组织传热过程中起着非常重要的作用。

### 4 结论

本文建立了分形生物组织传热方程，利用广义有限 Hankel 变换，Laplace 变换及其相应的逆变换，得出了该模型的解析解并通过作图分析了解的变化情况，分别讨论了稳态情况下和经典的圆柱坐标系下生物组织传热方程的解。

### 参考文献

- 1 Sneddon IN. Finite Hankel transforms, Phil. Mag. 1946, 37:17-25
- 2 Ali I, Kalla S. A generalized Hankel transform and its use for solving certain partial differential equations. J. Aust. Math. Soc. B, 1999, 41: 105-117
- 3 Eldabe NT, El-Shahed M, Shawkey M. An extension of the finite Hankel transform, Appl. Math. Comput., 2004, 151:713~717
- 4 Jiang XY, Xu MY. The fractional finite Hankel transform and its applications in fractal space. J. Phys. A: Math. Theor., 2009, 42:385201 (11pp)
- 5 刘静, 王存成. 生物传热学. 北京: 科学出版社, 1997.

- 6 梁超英, 钱志余. 人体组织传热及应用研究. 生物医学工程研究, 2007, 26(2):212~215
- 7 Pennes HH. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. Journal of Applied Physiology, 1948, 1(1):93~122
- 8 江世臣, 李和杰, 马宁等. 皮肤组织热水烫伤传热分析. 航天医学与医学工程, 2003, 16(1):44~47
- 9 迪丽娜. 马合木提, 江世臣, 张学学. 皮肤组织传热过程研究. 西安交通大学学报, 2006, 40(3):369~372.
- 10 蒋丽君, 李志宏, 吴东. 分形、混沌与人体浅谈. 中国人体科学, 1999, 9(1):25~29
- 11 施明恒, 樊荟. 多孔介质导热的分形模型. 热科学与技术, 2002, 1(1):28~31.
- 12 Yue K, Zhang X, Yu F. An analytic solution of one-dimensional steady-state Pennes' bioheat transfer equation in cylindrical coordinates. Journal of Thermal Science, 2004, 13(3): 255~258

## GENERALIZED FINITE HANKEL TRANSFORM AND ITS APPLICATION IN FRACTAL BIOLOGICAL TISSUE

JIANG Xiaoyun

(School of Mathematics, Shandong University, Jinan 250100, Shandong, China)

**Abstract** In this paper, a generalized finite Hankel transform is derived which is useful in solving equations in fractal dimension  $d_f$  and involving a fractal diffusion coefficient  $D_r^{-\phi}$ . The bioheat transfer equation in fractal tissue is established. By applying the generalized finite Hankel transform, Laplace transform and their inverse transforms, we obtain the analytical solution of the equation. And classical bioheat transfer equation in cylindrical coordinates as a special case is proved.

**Key words** fractal, bioheat transfer, fractional finite Hankel transform, Laplace transform