

## Study on WSN Multilateral Localization Algorithm Based on Tikhonov Regularization Method<sup>\*</sup>

WANG Lei<sup>\*</sup>, LI Hongming, DU Xiaotong

(Department of Measurement and Instrumentation, School of Control Science and Engineering, Shandong University, Jinan 250061, China)

**Abstract**: Node localization plays a critical role in wireless sensor networks (WSN) to complex monitoring and tracking in wide applications. A localization algorithm based on Tikhonov regularization method is proposed for the ill-posed problem in the multilateral localization, in which the location model, the regularization parameter and the optimal reference node number are studied. Test results show that the location precision of this proposed algorithm is better than that of the Maximum Likelihood Estimation (MLE) method, and the estimate error is less than 1 meter while regularization parameter is about 600 and the reference node number is 5.

**Key words**: wireless sensor networks; localization; ill-posed problem; regularization

EEACC: 7230; 7320; 6150P

## 基于 Tikhonov 正则化的 WSN 多边定位算法研究<sup>\*</sup>

王 雷<sup>\*</sup>, 李宏明, 杜晓通

(山东大学控制科学与工程学院测控技术与仪器系, 济南 250061)

**摘 要**: 节点定位是无线传感器网络实现监测和跟踪的一个重要前提。针对多边定位中的不适定问题, 提出了一种基于 Tikhonov 正则化方法的定位算法, 研究了定位模型的建立、正则化参数的选取方法以及最优定位参考点数的选取等问题。实验结果表明本算法与典型的极大似然估计法相比, 较大幅度地提高了定位精度, 当  $\lambda$  值选取 600, 采用 5 个参考节点时, 定位精度可达到 1 米。

**关键词**: 无线传感器网络; 定位; 不适定问题; 正则化

中图分类号: TP393

文献标识码: A 文章编号: 1004-1699(2009)06-0852-05

无线传感器网络 (Wireless Sensor Networks, WSN) 是由部署在监测区域内部或附近的大量的、具有通信、感测及计算能力的微型传感器节点通过自组织构成的智能测控网络。这些微型无线传感器具有无线通信、数据采集和处理、协同合作等功能, 由此组成的传感器网络通过特定的协议进行通信, 能够获取周围环境的信息并相互协同工作完成特定的任务。在军事、农业、环境监测、医疗卫生、工业、智能交通、建筑物监测、空间探索等领域有着广阔的应用前景<sup>[1]</sup>。

对节点准确地进行定位是无线传感器网络应用的一个重要前提条件。在许多应用领域, 包括人类

不适合进入的区域、敌对区域, 或者是追踪的目标处于不断的运动之中, 节点的位置都是随机和未知的。然而节点所采集到的数据信息必须结合其定位信息才具有实际意义。因此, 节点定位技术引起广泛关注并成为 WSN 研究热点之一<sup>[2-3]</sup>。

目前无线传感器网络节点定位方法主要分为两类: 不基于测距的 (Range-free) 方法和基于测距的 (Range-based) 方法。不基于测距的定位方法无需测量节点和已知节点之间的距离信息, 或者不直接利用这些信息, 仅根据网络的连通性等信息来实现未知节点的定位。基于测距的定位方法需要测量未知节点与已知节点之间的距离信息<sup>[4-5]</sup>。

基金项目: 山东省中青年科学家奖励基金资助 (2007BS01009)

收稿日期: 2008-07-21 修改日期: 2009-04-08

两种方法分别具有一定的优缺点。不基于测距的方法<sup>[6-7]</sup>主要有:质心法、基于距离矢量计算跳数的算法(DV-hop)、无定形的(Amorphous)算法和以三角形内的点近似定位(APIT)算法等。不基于测距的方法对硬件的要求比较低,只需要一定的通信开销和计算复杂度即可进行定位,在成本和功耗方面具有一定的优势;但它需要大量的节点,且要求节点是密集统一的,同时,不基于测距的定位方法属于粗精度的定位方法。

基于测距的定位方法<sup>[8-9]</sup>利用测量所得的未知节点和已知节点之间的距离信息,然后使用三边测量法、多边测量法或极大似然估计法计算未知节点的位置。基于测距的方法定位精度较高,并且计算复杂度也不高,但这种方法的缺点是测距方面需要相应的硬件设备,造价增高,增加了节点的体积,消耗了有限的电池资源,而且在测量距离的准确性方面需要相应的研究。常用的测距方法有信号强度测距法(RSSI)、到达时间测距法(TOA)、时间差测距法(TDOA)等。其中,信号强度测距法(RSSI)技术的基本原理是通过射频信号的强度来进行距离估计,即已知发射功率,在接收节点测量接收功率,计算传播损耗,使用理论或经验信号传播模型将传播损耗转化为距离。因传感器节点本身就具有无线通信能力,故其是一种低功率、廉价的测距技术,具有低成本、设备少、距离远、易获取的特点,因此成为定位研究的热点之一<sup>[10-13]</sup>。但是由于环境影响所造成的信号传播模型的建模复杂性:反射、多径传播、非视距、天线增益、一致性等问题,都会对相同距离产生显著不同的传播损耗。由此使节点定位问题成为一个不稳定的反问题求解过程,针对定位的不适定性<sup>[12]</sup>本文提出基于 Tikhonov 正则化的多点定位算法,用于解决定位的不适定问题。实验结果表明本文提出的定位算法较大幅度地提高了定位精度。

### 1 基于 RSSI 的多边定位模型

设已知节点  $A_1 A_2, \dots, A_n$  的位置坐标分别为  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ , 未知节点  $O$  的坐标为  $(x, y)$ , 则由平面上两点之间的距离公式可得:

$$\begin{cases} (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 = d_1^2 \\ (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 = d_2^2 \\ \dots \\ (x_n - x)^2 + (y_n - y)^2 = d_n^2 \end{cases} \quad (1)$$

其中  $d_1, d_2, \dots, d_n$  分别表示未知节点到已知节点 1 至  $n$  的距离。将上述第 1 至  $n - 1$  个等式分别

与第  $n$  个等式相减,可得到:

$$\begin{cases} 2(x_n - x_1)x + 2(y_n - y_1)y = d_1^2 - d_n^2 + y_n^2 + x_n^2 - y_1^2 - x_1^2 \\ 2(x_n - x_2)x + 2(y_n - y_2)y = d_2^2 - d_n^2 + y_n^2 + x_n^2 - y_2^2 - x_2^2 \\ \dots \\ 2(x_n - x_{n-1})x + 2(y_n - y_{n-1})y = d_{n-1}^2 - d_n^2 + y_n^2 + x_n^2 - y_{n-1}^2 - x_{n-1}^2 \end{cases} \quad (2)$$

令上式等号右端分别为  $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ , 则可得如下方程:

$$\begin{bmatrix} 2(x_n - x_1) & 2(y_n - y_1) \\ \dots & \dots \\ 2(x_n - x_{n-1}) & 2(y_n - y_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_{n-1} \end{bmatrix} \quad (3)$$

式(3)可记作

$$AX = b \quad (4)$$

其中  $A$  为方程的系数矩阵,向量  $X$  为未知节点的坐标,  $b$  为和距离有关的参数向量。对未知节点进行定位的过程就是求解此方程组的过程。

在无边定位过程中,已知节点和未知节点间的距离可由接收信号强度(RSSI)确定。常用的无线信道的数学模型如下:

$$PL(d) = PL(d_0) - 10n \lg\left(\frac{d}{d_0}\right) \quad (5)$$

式中,  $d$  是发送节点和接收节点之间的距离;  $d_0$  为参考距离;  $n$  为信道衰减指数,一般取值为  $2 \sim 4$ ;  $PL(d)$  为距离接收节点  $d$  处的信号强度;  $PL(d_0)$  是距离接收节点  $d_0$  处的信号强度。

将测得的 RSSI 代入上述各式可得到已知节点和未知节点间的距离,即式(4)右端的参数向量。式(4)中的  $b$  是理想状态下的参数向量,但在实际中由于节点之间接收信号强度存在各种干扰,以及后期在处理信号强度数据的过程中存在计算机计算舍入误差和节点间距离算法经验模型的误差等造成的影响,得到的只是一个近似的向量  $b + \Delta$ , 其中  $\Delta$  为误差向量,即实际求解的方程为:  $AX = b + \Delta$ , 令  $B = b + \Delta$ , 则可表示为:

$$AX = B \quad (6)$$

误差的引入导致定位成为一个不适定问题<sup>[14]</sup>, 不适定问题的本质难点在于其解是不连续依赖于其输入数据的。式(6)是一个超定方程,其解可能不存在或者存在无穷多组解,这与实际相矛盾:因为未知节点的坐标是真实存在且唯一的。为了求解未知节点的位置信息,就要对式(6)所表示的不适定问题进行求解。求解不适定问题的普遍方法是:用一组与原不适定问题相“邻近”的适定问题的解去逼近原问

题的解,这种方法就称为正则化方法。比较常用的正则化方法有 Tikhonov 正则化方法、截断奇异值分解(TSVD)正则化方法、各种迭代方法以及其他一些改进方法,本文采用经典 Tikhonov 正则化方法处理定位中的不适定问题。

## 2 基于 Tikhonov 正则化的定位算法

Tikhonov 正则化方法适用于解算各种病态方程,其解决不适定问题的关键是选择合理的正则化矩阵以及确定合理的正则化参数,其核心是确定正则化参数。Tikhonov 正则化方法提出把满足不等式

$$AX - B \leq \epsilon \quad (7)$$

的向量  $X$  中具有最小范数的  $X$  看作式(6)的解,其中  $\epsilon = \epsilon_0$ 。即在满足式(7)的条件下求二次泛函

$$F(X) = \|X\|^2 \quad (8)$$

的最小值。泛函(8)的最小值只要在使条件(7)中取等式,即满足条件

$$AX - B = \epsilon \quad (9)$$

的那些向量  $X$  中去找即可,因此可以提出极小化问题

$$\min F(X), \{X \mid AX - B = \epsilon\} \quad (10)$$

该问题又可以用 Lagrange 乘子转换为关于泛函

$$AX - B \|^2 + \lambda \|X\|^2 \quad (11)$$

的极小化问题。此极小化泛函等价于求解方程组

$$(I + A^T A) X = A^T B \quad (12)$$

方程组的解  $X$  对一切正  $\lambda$  都唯一,且

$$X = (I + A^T A)^{-1} A^T B \quad (13)$$

上式称为的 Tikhonov 一般正则化方法<sup>[15]</sup>,其中参数  $\lambda$  称为正则化参数, $X$  即为病态方程的正规解。

由式(13)可见,求解  $X$  的关键在于正则化参数的选取。一般说来,当  $\lambda$  取值越小时,得到的解向量逐渐收敛于式(6)的拟正规解,从这方面看来,应尽量将  $\lambda$  取较小的值。但是,当  $\lambda$  减小时,会使式(13)的病态变坏,从这方面考虑我们又希望  $\lambda$  的值可以取的大一些,但是  $\lambda$  过大又会给方程引入过大的人为干扰。因此,选一个折衷的  $\lambda$  值是解决此问题的重点。

由 Tikhonov 的正则化的一般方法可知,  $\lambda$  的数量级应当与范数  $\|A\|$  具有相同的数量级。在本文所进行的实验中尝试使用下述方法进行  $\lambda$  值的预测估计,然后在预测的基础上利用实验数据对  $\lambda$  值进行进一步的调整。

式(10)的极小值问题也可转换为引入

Lagrange 乘子后泛函:

$$\|X\|^2 + \lambda \|AX - B\|^2 \quad (14)$$

的极小化问题,此泛函极小化应满足下述条件:

$$(A^T A X - A^T B) + 2\lambda X = 0 \quad (15)$$

$$\text{即} \quad X = C^+ (-2\lambda X) \quad (16)$$

其中  $C^+$  为  $(A^T A X - A^T B)$  的广义逆矩阵。

在实验过程中,使用的待测节点的真实坐标是可测的,在实际的应用时,可以选择某一已知节点的坐标代入式(16)中的向量  $X$ ,可以解出  $\lambda$  的一个值。由  $\lambda$  对正则化参数  $\lambda$  进行估计:

$$\lambda = \frac{1}{\dots} \quad (17)$$

上述对  $\lambda$  值进行估计的方法是根据 Morozov 偏差原理进行的,是比较有效的正则参数选择方法<sup>[14-15]</sup>。通过该原理可以确定  $\lambda$  值的大体范围,根据具体的实验数据进行调整后得到的  $\lambda$  是比较实用的。正则参数确定后即可用来进行定位计算。

## 3 实验研究

实验以接收信号强度(RSSI)测距为定位基础,以 MATLAB 为数据处理平台,研究参考节点数目及正则化参数  $\lambda$  的不同取值对定位结果的影响;最后对 Tikhonov 正则化算法和极大似然方法的定位结果进行了比较。

实验具体方法 实验场地选择为较为空旷的小广场,区域为 40 m · 30 m 的矩形。在所选矩形的四边上分别选取 16 个点 1, 2, ..., 15, 16 作为多边形定位已知节点的备选位置。处于四周的 16 个点分别为已知节点,从原点(0, 0)处按逆时针方向分别记作 1 号, 2 号, ..., 15 号, 16 号。实验中使用自行研制的无线传感器节点,实验时使节点垂直高度保持在 1.1 m,便于信号更好的发送和接收。

### 3.1 RSSI 测距模型中 $n$ 的选择

实验中对每一对已知节点和未知节点的 RSSI 测量 10 次,分别求出相应的  $PL$  值,利用求得的平均数作为节点之间的距离  $d$ 。为了确定式(5)中的  $n$  取值,连续地取  $n$  为 2~4 中的某一数值,将计算结果与实际距离进行比较,选取误差较小的  $n$  进行距离估计。选择 3 号点为参考节点,待测节点  $O$  为接收节点,选取 9, 10, 11, 12, 13 号点分别作为发送节点,将由式(5)得到的距离和节点间的真实距离进行比较,随着  $n$  值的变化,5 组的距离误差变化如图 1 所示。

由图 1 可知,随着  $n$  的增大,图中自上向下第 1、2 组误差曲线呈衰减的趋势,下面的 3 组误差曲

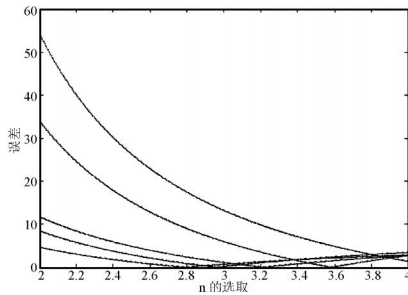


图 1 n 的选取与距离误差的关系

线呈先衰减后增大的趋势,当  $n$  的取值在 3.8~4 左右时,5 组曲线的距离误差综合表现比较理想,在以下的计算过程中, $n$  的值取为 4。代入  $n=4$  进行计算,可以得到 16 个参考节点和待测节点之间由信号强度得出的计算距离。

### 3.2 节点数目对定位误差的影响

首先选取 3 个已知节点进行定位计算,然后依次增加 1 个节点再次进行定位计算,直至增加到 6 个,分析节点数目对定位误差的影响,确定最优参考点数目。计算的过程中误差评价标准为计算坐标和真实坐标之间的范数,即取  $\|X - X_0\|$  来表示定位误差,其中  $X$  为计算坐标, $X_0$  为真实坐标,定位误差如图 2 所示。

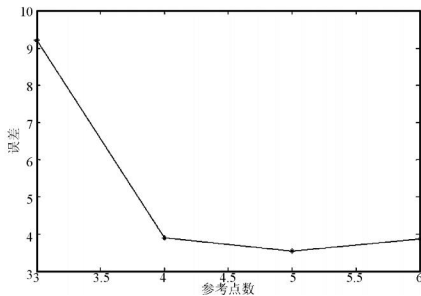


图 2 参考点数与定位误差

从图 2 可以看出,当参考点数为 4、5 时,定位结果明显优于参考点数为 3 点时的定位结果;当参考点数增加到 6 个点时,定位结果并没有明显的改善,定位精度反而低于 5 点时的定位结果。从定位的精度、计算复杂度以及实际应用中节点成本等方面考虑,使用 4 点和 5 点定位效果较好。

### 3.3 参数选择对定位误差的影响

首先利用 5 个参考节点进行定位。分别选取 3 组参考节点,第 1 组的参考节点为 2 号,4 号,7 号,11 号,15 号;第 2 组的参考节点分别为 6 号,7 号,8 号,15 号,16 号;第 3 组的参考节点分别为 6 号,7 号,8 号,14 号,15 号。分别计算 3 组正则化参数,由式 (17) 可得,  $\lambda_1 = 544.81$ ,  $\lambda_2 = 356.55$ ,  $\lambda_3 = 204.97$ ,三组数据的  $\lambda$  不同,但具有相同的数量级。令  $\lambda$  的取值范围为 200~700,利用 Tikhonov 正则化算

法进行计算,得到的定位误差趋势图,如图 3 所示。

由图 3 可知,第 1 组的定位误差随着  $\lambda$  的增大而减小,第 2、3 组的定位误差呈先减小后增大的趋势。当  $\lambda$  取值在 600 附近时,可以使 3 组节点的定位误差均控制在 1 m 左右,结果比较理想。

然后利用 4 个节点进行定位,选取两组参考节点,分别为:第 1 组 2 号,4 号,7 号,11 号;第 2 组 2 号,4 号,8 号,12 号;首先计算 2 组的正则化参数,由式 (17) 可得,  $\lambda_1 = 491.15$ ,  $\lambda_2 = 629.92$ ,两者同样具有相同的数量级。令  $\lambda$  取值范围为 500~1500,的变化趋势和定位误差的变化如图 4 所示。由图可知,当  $\lambda$  取值在 1200~1300 左右时,改善效果较好。

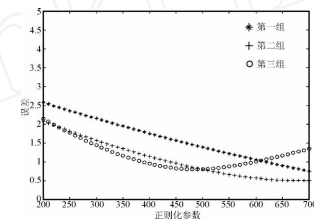


图 3 正则化参数的取值变化和定位误差变化(参考点数 5)

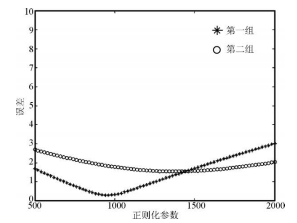


图 4 正则化参数的变化与误差变化(参考点数 4)

### 3.4 Tikhonov 正则化方法与极大似然法定位结果

Tikhonov 正则化方法与极大似然法分别采用 5 个参考点进行定位计算,如图 5 和图 6 所示。比较可以看出,Tikhonov 正则化算法的定位结果比极大似然法的定位结果有较大的改进。

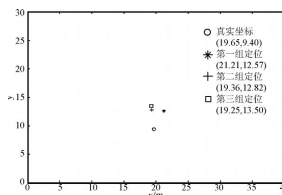


图 5 极大似然方法 5 点定位结果

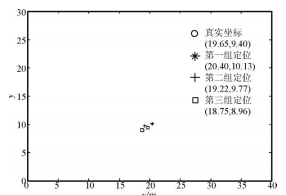


图 6 正则化参数为 600 时五点定位结果

同理,采用 4 个参考点时两种算法的定位结果分别如图 7,图 8 所示。可以看出采用 4 个参考点进行定位时,Tikhonov 正则化算法的定位结果同样有明显的改进。

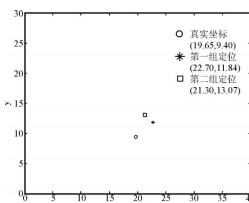


图 7 极大似然方法定位结果(参考点数 4)

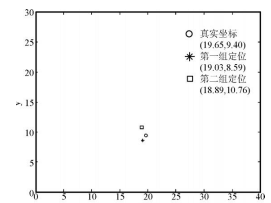


图 8 正则化参数为 1260 时定位结果(参考点数 4)

### 3.5 跟踪实验

在未知节点移动时进行了定位跟踪实验。实验中使用四个参考节点,未知节点沿直线移动,定位结果如图9所示。

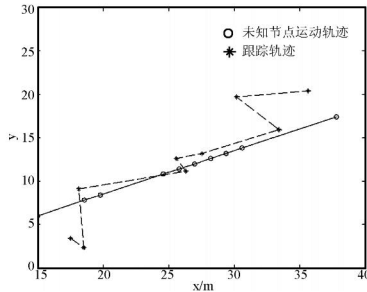


图9 定位跟踪实验

由图可知,大多数位置的定位结果处于真实位置的附近,个别位置由于受环境及测量数据误差的影响定位误差较大。

## 4 结论

本文针对基于测距的多边定位过程中的不定问题,提出了一种基于 Tikhonov 正则化方法的定位算法。

研究了最优参考点数的选择以及正则化参数的选择,并对不同的参考点数和正则化参数取值时的定位结果进行了比较。实验表明:当参考节点数取4或者5时,定位精度高且较节省资源。正则化参数取值可以先利用 Morozov 偏差原理进行预估,然后作适当调整即可。

通过对基于 Tikhonov 正则化方法和极大似然方法的定位方法进行比较发现:二者具有相同的计算开销,但前者能够较大幅度地提高定位精度,可使部分定位误差小于1m;正则化参数的加入对一定范围内的节点定位精度有明显的改善,而且没有增加定位的计算开销;定位环境的不同、定位范围大小的不同对正则化参数的选择和定位的结果均有一定的影响,实际应用时可根据具体的使用环境和数据信息选择合适的正则化参数。

通过分析定位跟踪结果发现,定位误差较大的点均出现在距离参考点较近的地方,下一步计划通过改善测距模型进行改进。

### 参考文献:

- [1] Akyildiz F, Su W, Sankarasubramaniam Y, et al. Wireless Sensor Networks: a Survey[J]. Computer Networks, 2002, 38(4): 393-442.
- [2] Rabacy JJ, Ammer MJ, da Silva Jr. JL, Patel D, Roundy S. Picoradio Supports Ad Hoc Ultra-Low Power Networking[J].

Computer, 2000, 33(7): 42-48.

- [3] D Ganesan, B Krishnamachari, A Woo, et al. Complex Behavior at Scale: An Experimental Study of Low-Power Wireless Sensor Networks[R]. Technical Report UCLA/CSD-TR 02-0013, 2002.
- [4] Patwari N, Ash J N, Kyperountas S, et al. Locating the Nodes: Cooperative Localization in Wireless Sensor Networks[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(4): 54-69.
- [5] 杨凤,史浩山,朱灵波等.一种基于测距的无线传感器网络智能定位算法[J].传感技术学报,2008,21(1):139-144.
- [6] Bulusu N, Heidemann J, Estrin D. GPS-Less Low Cost Outdoor Localization for Very Small Devices[J]. IEEE Personal Communications Magazine. 2000, 7: 28-34.
- [7] Niculescu D, Nath B. Ad-hoc Positioning System[C]// Proceedings of Global Telecommunications Conference. San Antonio, TX: IEEE, 2001: 2926-2931.
- [8] Priyantha N, Chakraborty A, Balakrishnan H. The Cricket Location-Support System[C]// Proceedings of International Conference on Mobile Computing and Networking 2000. New York: ACM Press, 2000: 32-43.
- [9] Nasipuri A, Li K. A Directionality Based Location Discovery Scheme for Wireless Sensor Networks[C]// Proceedings of the 1st ACM international workshop on Wireless sensor networks and applications. New York: ACM Press, 2002: 105-111.
- [10] Capkun S, Maher Hamdi, Hubaux J P. GPS-Free Positioning in Mobile Ad-Hoc Networks[J]. Cluster Computing. 2002, 5(2): 157-167.
- [11] 杨宗凯,冯缜,刘威等.传感器网络节点位置不确定性研究[J].传感技术学报,2007,20(11):2470-2475.
- [12] Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems[M]. New York: Springer, 1996.
- [13] 王福豹,史龙,任丰原.无线传感器网络中的自身定位系统和算法[J].软件学报,2005,16(5):857-868.
- [14] 王彦飞.反演问题的计算方法及其应用[M].北京:高等教育出版社,2007:76-77.
- [15] 肖庭延,于慎根,王彦飞.反问题的数值解法[M].北京:科学出版社,2003:1-32.



王雷(1970-),副教授,2004年浙江大学控制系获控制科学与工程博士学位。现为山东大学控制学院过程控制与检测技术研究所副所长,智能建筑与节能技术研究所副所长。主要研究方向:无线传感器网络、中央空调节能控制、多相流检测、过程层析成像技术等。主要兼职为:中国自动化学会智能建筑与楼宇自动化专业委员会委员,中国建筑业协会智能建筑专业委员会专家委员,国家首批注册自动化师等,leiwang@sdu.edu.cn