

## Research on the Capacity of Ad Hoc Networks Based on Euclidean Minimum Spanning Tree\*

GUO Zhong-hua, SHI Hao-shan\*

(School of Electronics and Information, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The network capacity is a focus of current research on wireless Ad Hoc networks. Under the Protocol Models and Physical Models of communication proposed by Gupta and Kumar, this paper derives the theory result of unicast and multicast capacity of Ad Hoc networks based on Euclidean Minimum Spanning Tree (EMST) and indicates that multicast capacity of Ad Hoc networks is larger than the unicast capacity, when the group size is small compared to the total number of nodes in the network. The results of simulations based on NS-2 verify that the upper multicast capacity bounds for wireless Ad hoc networks is valid.

**Key words:** wireless Ad Hoc networks; network capacity; Euclidean Minimum Spanning Tree; multicast group size

EEACC: 6150P; 6210C; 6250F

## 基于欧氏最小生成树的无线 Ad Hoc 网络容量研究\*

郭中华, 史浩山\*

(西北工业大学电子信息学院, 西安 710072)

**摘 要:** 无线 Ad hoc 网络容量是当前研究的一个热点。在 Gupta 和 Kumar 提出的协议模型和物理模型基础上, 推导了无线 Ad hoc 网络基于欧氏最小生成树的单播、多播容量, 且指出当多播组尺寸小于总的网络节点数时, 多播容量比单播容量大。基于 NS-2 的仿真实验验证了多播容量上限是有效的。

**关键词:** 无线 Ad hoc 网络; 网络容量; 欧氏最小生成树; 多播组尺寸

中图分类号: TP393.01

文献标识码: A

文章编号: 1004-1699(2008)10-1750-05

无线 Ad Hoc 网络容量的计算问题越来越受到关注。网络容量是评估无线 Ad Hoc 网络性能的重要参数, 同时容量分析与评估也是规划设计无线网络的基础性工作。其定义是网络中数据传输量与传输距离积的总和, 度量单位是 bit · m, 即 1 bit 数据在 1 m 距离上成功传输, 称为 1 bit · m, 它代表网络支持的可用数据传输速率。无线 Ad Hoc 网络的容量受到诸多因素的影响, 例如网络结构与拓扑、传输模式、网络节点密度、每个节点所用的信道数量、发射功率等级以及节点移动性等。

Gupta 和 Kumar 对无线 Ad Hoc 网络容量的分析与计算进行了开创性研究。他们的研究表明:

对于 Ad hoc 网络, 假设在  $1 \text{ m}^2$  范围内分布有  $N$  个通信节点, 每个节点传输速率均为  $W$  bit/s。数据包通过多跳方式从源节点传递到目的节点, 中间节点承担数据缓冲和转发任务。那么在协议模型下网络传输容量为  $\Theta(W \sqrt{N})$  (bit · m)/s; 在物理模型下网络容量可达  $c(W \sqrt{N})$  (bit · m)/s, 但无法达到  $c'WN^{\alpha-1/\alpha}$  (bit · m)/s。这里  $c$  和  $c'$  是特定常数<sup>[1]</sup>。Dousse 和 Thiran 对物理模型进行研究指出当衰减函数在原点处一致收敛时, 每个节点的可获得容量以  $\Theta(\frac{1}{N})$  的阶减少<sup>[2]</sup>。若考虑常规衰落信道时, Toupnis 和 Goldsmith 研究指出在静态网络中, 单

基金项目: 国家自然科学基金项目资助(60472074); 教育部博士点基金项目资助(20050699037); 国防科工委基础研究计划资助(D3320060259)

收稿日期: 2008-04-08 修改日期: 2008-06-25

个节点容量  $\Theta(N^{-\frac{1}{2}}[\log(N)]^{-\frac{1}{2}})$  是可以达到的; 在动态网络中, 同阶的单个节点容量也是可以达到的, 但存在一个独立于节点数目的最大传输延迟<sup>[3]</sup>。文献[4]建立了超宽带(UWB)通信模型, 限定最大传输功率是  $P$ 。链路带宽是  $W$ , 在节点静态和  $W \rightarrow \infty$  时推导出节点的网络平均容量上限  $O[(N \log N)^{\frac{1}{2}}]$ , 下限  $O[N^{\frac{1}{2}}/(\log N)^{\frac{1}{2}}]$ 。文献[5]建立资源(带宽、功率等)消耗的线性规划方程, 利用图论的方法对问题求解, 认为使网络传输消耗资源最小, 则网络容量达到最大。Yi 等人文献[6]的研究表明: 在随机网络中使用波束宽度为  $\alpha$  的有向发射天线, 网络容量可以提高  $2\pi/\alpha$  倍; 使用波束宽度为  $\beta$  的有向接收天线, 网络容量可以提高  $2\pi/\beta$  倍; 如果使用上述的有向发射和接收天线, 则容量可提高  $4\pi^2/\alpha\beta$  倍。Franceschetti 等人文献[7]的研究指出: 在物理模型下, 使用渗透理论(Percolation Theory)设计路由策略, 得出比文献[1]中的结果更加紧密的容量上下界值, 即单个容量的界值是  $\Theta(N^{-1/2})$ 。文献[8]利用协议模型研究了多跳无线网络的广播容量, 提出了新的广播容量上下边界为  $\Theta(W/\max(1, \Delta^d))$ , 这里  $W$  是无线信道容量,  $\Delta$  是干扰参数,  $d$  是网络的空间维数。

研究和总结以上文献后, 可以看出当前无线 Ad Hoc 网络容量研究的方法和策略有两类: 一类是根据假设建立网络模型, 推导出网络容量的界值; 另一类是利用当前的一些新技术新方法(如采用有向天线、超宽带 UWB 等)来提高网络容量。在本文中, 我们的工作主要是在 Gupta 和 Kumar 提出的网络模型基础上, 提出基于欧氏最小生成树的方法, 推导了无线 Ad hoc 网络的单播、多播容量理论值, 且指出当多播组尺寸  $n$  小于总的网络节点数  $N$  时, 多播容量比单播容量大  $O(\sqrt{n})$ 。最后对理论分析结果进行了数值模拟和基于 NS-2 的仿真实验, 验证了多播容量上限是有效的。

本文组织如下: 第 1 节对 Gupta 和 Kumar 提出的协议模型和物理模型进行了简要描述; 第 2 节推导了基于欧氏最小生成树的单播、多播容量; 第 3 节对推导出的理论分析容量进行了数值模拟和基于 NS-2 的仿真分析; 第 4 节对全文进行了总结。

## 1 网络模型

在本节将介绍无线网络的协议模型和物理模型。不失一般性, 我们考虑一个由  $N$  个节点组成的

无线网络。设  $X_i (i = 1, 2, \dots, N)$  为不同节点的位置, 为简单起见, 用  $X_i$  还表示第  $i$  个节点本身。设所有节点同质, 例如所有节点的发射功率或通信覆盖范围相同, 或以相同的比特速率发送数据等。

### 1.1 协议模型

假设所有节点使用相同的发射功率, 获得相同的通信覆盖范围  $r$ , 节点  $X_i$  传送一个分组到节点  $X_j$ , 节点  $X_j$  成功接收的条件是:

① 节点  $X_i$  与  $X_j$  间的欧氏距离要小于  $r$ , 即  $|X_i - X_j| \leq r$ ; ② 在节点  $X_i$  与  $X_j$  间传输过程中, 对于其它节点  $X_k$  要求  $|X_k - X_j| \geq (1 + \Delta)r$ 。

这里  $\Delta$  是传输域的保护间隔。

### 1.2 物理模型

由于节点传输功率和通信覆盖范围相同, 令所有节点发射功率为  $P$ ,  $\{X_k; k \in T\}$  是同一时刻在一个特定子信道同时进行传输的节点的子集。则从节点  $X_i (i \in T)$  成功发送到  $X_j (j \in T)$  的条件是接收性干比(SIR)要大于等于  $\beta$ , 即:

$$\frac{P}{|X_i - X_j|^\alpha} \geq \beta \left( N_0 + \sum_{k \in T, k \neq i} \frac{P}{|X_k - X_j|^\alpha} \right)$$

这里,  $\beta$  是性干比(SIR)阈值,  $N_0$  是环境噪声功率, 信号随传输距离  $d$  按  $\frac{1}{d^\alpha}$  衰减, 通常  $\alpha > 2$ 。

## 2 基于欧氏最小生成树的单播、多播容量

### 2.1 符号说明

由于无线 Ad hoc 网络拓扑形式的任意性, 很难获得精确的容量表达。虽然在具体网络中可能会得到精确容量, 但这种表示显然不具有普遍意义。因此, 当前大部分关于自组网容量分析都用到了渐近容量来表示。而对于具体网络, 精确容量只是对渐近容量的常系数和低阶项进行表达。在渐近容量的表示中, 有一些渐近记号需要事先说明。

记号 1  $\Theta$ : 给定函数  $g(x)$ , 对于任一函数  $f(x)$ , 若存在正常数  $c_1$  和  $c_2$ , 当  $x$  充分大时,  $f(x)$  能位于  $c_1 g(x)$  和  $c_2 g(x)$  之间, 则  $f(x)$  属于集合  $\Theta[g(x)]$ , 我们用  $f(x) = \Theta[g(x)]$  表示  $f(x)$  是  $\Theta[g(x)]$  的元素。

记号 2  $O$ : 它渐近地给出了一个函数的上、下界, 当仅有渐近上界时, 用记号  $O$ 。给定函数  $g(x)$ , 存在正常数  $c$  和  $x_0$ , 使得对所有的  $x > x_0$ , 有  $0 < f(x) < cg(x)$  成立, 记做  $f(x) = O[g(x)]$ 。记号  $O$  在一个常数因子内给出了某函数的一个上界, 且  $f(x) = \Theta[g(x)]$  隐含了  $f(x) = O[g(x)]$ 。

## 2.2 欧氏最小生成树

本文针对无线 Ad Hoc 网络,在上述的网络协议模型和物理模型基础上,利用欧氏最小生成树 EMST(Euclidean Minimum Spanning Tree)的长度  $L_{EMST}$  分析推导了无线网络的单播、多播容量。设定网络生成树的边的权重是相应节点对间的欧氏距离,则权重最小的生成树就是欧氏最小生成树。

假设 Ad Hoc 网络有  $N$  个节点,它们按泊松分布规律随意分布在面积为任意值  $A$  的区域内。在  $N$  很大时,我们再假设路由是节点间的连接线,则使某一分组到达目的节点所需传输次数是  $\Theta(\frac{d}{r})$ ,这里  $r$  是典型的无线传输范围, $d$  是源节点到目的节点的欧氏距离<sup>[9,10]</sup>。在文献[1]中,Gupta 和 Kumar 指出当无线传输范围  $r = k\sqrt{\frac{\log N}{N}}$  时,可获得最大带宽。这里, $k$  是一个常数取决于信号增益和 MAC 层协议。此时,我们考虑由一个源节点和在全局  $N$  个节点中任意选取  $n$  个节点所构成的一个多播组,即多播组尺寸为  $n$ ,假设  $n \ll N$ ,这  $n+1$  个节点在区域内按泊松过程分布,则节点密度为  $\frac{n+1}{A}$ 。在该情况下,根据最小生成树来考虑多播树。设此时欧氏最小生成树的路径长度为  $L_{EMST}$ 。

由文献[11,12]分析得知,在二维情况下有:

$$L_{EMST}(n+1) \leq \gamma n \sqrt{\frac{A}{n+1}} \approx \gamma \sqrt{An} \quad (1)$$

这里, $\gamma$  是一个常数,取决于网络区域的形状,若为圆形或方形时可设  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 。

## 2.3 归一化多播费用

定义  $n$  个节点的多播组的归一化多播费用  $R(n)$ :

$$R(n) = \frac{\text{多播费用}}{\text{平均单播费用}} \quad (2)$$

这里,费用是指跳数,换句话说,多播的费用就是多播树的链路数;而平均单播费用是从该多播组中的任意一个源节点到多播组内任意目的节点的平均路由长度。

由于路由可以看成是节点间的连线,所以一个分组到达其目的节点所需跳数就是  $\Theta(\frac{d}{r})$ ,这样多播树的路径长度所占用的跳数就是  $\Theta(\frac{L_{EMST}(n+1)}{r})$ ,而平均单播费用是  $\Theta(\frac{L_{EMST}(2)}{r})$ ,则归一化的多播费用为:

$$R(n) \approx \frac{L_{EMST}(n+1)}{L_{EMST}(2)} \quad (3)$$

结合式(1)、式(3)得:

$$R(n) \leq \frac{\gamma \cdot n}{\epsilon \sqrt{n+1}} = O(\sqrt{n}) \quad (4)$$

这里, $\epsilon$  是一个常数,很大程度上取决于网络区域的形状。这个归一化的多播费用反映了多播对单播的增益,也就是  $O(\sqrt{n})$ 。现在来分析多播组尺寸  $n$  对归一化多播费用  $R(n)$  的影响。当  $n \ll N$  时,由于多播组内分支节点数量很小(即  $n$  很小),所以由源节点到多播组的最小路径树就等效于  $n$  个单播;当  $n \rightarrow N$  时,由于生成树几乎覆盖全部节点,所以在生成树内的总跳数就趋向  $N$ ,这样归一化多播费用趋于  $R(N)$ ,且  $R(N)$  为

$$R(N) = O(Nr) = O(\sqrt{N \log N}) \quad (5)$$

## 2.4 单播、多播容量分析

设单位时间内流量密度为  $\lambda$ (单位面积区域内的比特数),正常接收的典型半径  $r$  衰落在  $O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}})$ <sup>[1,9]</sup>,每个节点所获得的容量为  $C$ ,则单位区域内流量密度是  $\Theta(CN)$ 。在文献[1]中,Gupta 和 Kumar 指出当无线传输范围  $r = k\sqrt{\frac{\log N}{N}}$  时,可获得最大带宽,由此可得出单播的最大带宽(即容量)  $C = O(\frac{1}{\sqrt{N \log N}})$ 。

已推知多播树的路径长度所占用的跳数就是  $\Theta(\frac{L_{EMST}(n+1)}{r})$ ,将公式(4)的归一化多播费用  $R(n)$  代入,得到当  $n \ll N$  时,每个多播分组以高概率转发的次数就是  $\Theta(\frac{\sqrt{n}}{r})$ ,这样就推出多播树流量密度:  $\lambda = \Theta(CN \frac{\sqrt{n}}{r})$ 。

又  $r = O(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}) = O(\sqrt{\frac{r}{CN \sqrt{n}}})$ ,得  $C = O(\frac{1}{rN \sqrt{n}})$ 。

因此,结合公式(5)可得每个节点传输多播数据的最大速率是  $O(\frac{1}{\sqrt{nN \log N}})$ ,在这种情况下,多播组

内的这  $n$  个目的节点的总容量  $C = O(\sqrt{\frac{n}{N \log N}})$ 。

## 3 仿真结果

在本节,我们对上述推导的理论结果进行了数值模拟和基于 NS-2 的仿真分析,是通过多播组的归一化多播费用  $R(n)$  进行数值模拟计算和仿真

分析的。得出的结论有:①  $R(n)$  的数值模拟计算与期望的渐近线重叠度较好;② 通过 NS-2 仿真分析, 确定了多播容量的理论结果是有有效的上界。

### 3.1 数值模拟计算

设置 2D 无线网络, 节点任意分布。在形成网络拓扑时, 如果任意两点间距离小于临界传输半径或覆盖范围  $r$ , 就连接这两个节点。设基于欧氏最小生成树的多播树如图 1 所示, 设多播组尺寸为  $n$ , 目的是要测度不同源节点和多播组的归一化多播费用  $R(n)$ 。数值计算结果与期望的渐近线重合度较好, 该渐近线函数是由式(4)中取  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \epsilon =$

0.5 得出, 为  $\frac{n\sqrt{2}}{\sqrt{n+1}}$ 。而这一网络在任意信道模型

下的容量  $C = O(L_{EMST}/\log(n))$ 。图 1 中, 如果  $i \in N$ , 并足够大, 则在生成树中一个父节点和其子、孙节点不能同时从不同的发送节点成功接收。这样, 多播传输容量就可由  $c \cdot L_{EMST}/\log_i(n)$  界定, 这里  $c$  是常数。

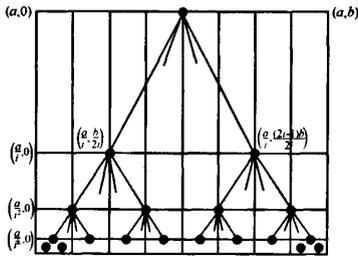


图 1 基于欧氏最小生成树的多播树结构图

### 3.2 基于 NS-2 的仿真分析

本文的仿真平台是 100 个无线网络节点服从均匀分布在  $1\ 000\text{ m} \times 1\ 000\text{ m}$  的正方形区域内。考虑多播组内客户数从 5 到 20 个节点。多播组和源节点是随机选出的, 其它仿真实验参数设置如表 1 所示。

表 1 仿真实验参数设置

MAC protocol	IEEE 802.11b (11Mbit/s)
Propagation model	Two ray ground
Transmission range	250 m
Packet size	1200 byte
Traffic type	CBR (Constant Bit Rate)
Data rate of source	64 kbit/s
Number of iterations	5

如前所述, 一个多播分组的传输次数是多播组内客户数的函数, 而该参数可用于多播容量的理论计算, 所以仿真是以多播分组重传次数为对象进行的。仿真结果表明据此所得的理论上是有效的,

如图 2 所示。

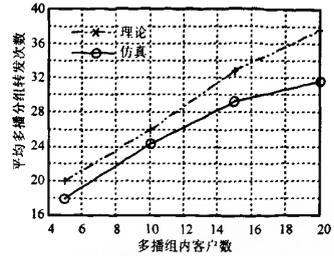


图 2 仿真结果与理论上限比较图

## 4 结束语

本文首先介绍了无线 Ad Hoc 网络容量研究的现状, 目前的研究主要集中在以下两个方面: 一类是如何采用不同方法与新技术来提高网络容量; 另一类是推导出由不同假设得出的传输模型下网络容量的界值。根据文献[1]的协议模型和物理模型, 我们提出了基于欧氏最小生成树 (EMST) 的网络容量, 利用欧氏最小生成树长度  $L_{EMST}$ , 定义归一化多播费用  $R(n)$ , 推导出单播容量与多播容量及相互关系, 即单播容量为  $C = O(\frac{1}{\sqrt{N \log N}})$ ; 多播容量为  $C = O(\sqrt{\frac{n}{N \log N}})$ 。当多播组尺寸  $n$  小于总的网络节点数  $N$  时, 无线 Ad hoc 网络的多播容量比单播容量大  $O(\sqrt{n})$ 。在此基础上, 我们对理论结果进行了数值模拟和基于 NS-2 的仿真分析, 验证了理论结果。

### 参考文献:

- [1] Gupta P, Kumar P R. The Capacity of Wireless Networks[J]. IEEE Transactions of Information Theory, 2000, 46(2):338-404.
- [2] Dousse O, Thiran P. Connectivity vs Capacity in Dense Ad Hoc Networks[C]// Proc. of IEEE Infocom 2004, 476-486.
- [3] Toupis S, Goldsmith A. Large Wireless Networks Under Fading, Mobility, and Delay Constraints[C]// Proc. of IEEE Infocom 2004, 609-619.
- [4] Rohit N, Arjunan R. Capacity of Power Constrained Ad Hoc Networks[C]// Proc. of IEEE Infocom 2004, 443-453.
- [5] 戴沁芸, 胡修林等. 基于图论理论的 Ad Hoc 网络容量研究. 电讯技术, 2006(2): 73-77.
- [6] Yi S, Pei Y, Kalyanaraman S. On the Capacity Improvement of Ad Hoc Wireless Networks Using Directional Antenna [C]// ACM Mobihoc, 2003, 108-116.
- [7] Franceschetti M, Dousse O, et al. Closing the Gap in the Capacity of Random Wireless Networks Via Percolation Theory [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2007, 53(3): 1009-1018.
- [8] Keshavaz-Haddad A, Ribeiro V, Riedi R. Broadcast Capacity

- in Multihop Wireless Networks[C]// *MobiCom'06*, 2006, 239-250.
- [9] Jacquet P. Geometry of Information Propagation in Massively Dense Ad Hoc Networks[C]// *ACM MobiHoc*, 2004, 157-162.
- [10] Baccelli F, Tchoumatchenko K, Zuyev S. Markov Paths on the Poisson-Delaunay Graph with Applications to Routing in Mobile Networks[J]. *Adv. Appl. Probab.* 32 (1) (2000) 1-18.
- [11] Bertsimas D, Van Ryzin G. An Asymptotic Determination of the Minimum Spanning Tree and Minimum Matching Constants in Geometrical Probability[J]. *Oper. Res. Lett.* 9 (1990) 223-231.
- [12] Steele M. Growth Rates of Euclidean Minimal Spanning Trees with Power Weighted Edges[J]. *Ann. Prob.* 16 (4) (1988) 1767-1787.



郭中华(1973-),男,汉族,山东临朐人,博士研究生,副教授,硕士生导师,主要研究领域计算机网络与多媒体通信,meetgzh@mail.nwpu.edu.cn



史浩山(1946-),男,汉族,河南开封人,西北工业大学教授,博士生导师,主要研究领域数据通信、计算机网络及多媒体通信,shilaoshi@nwpu.edu.cn