

非保守力作用下简支梁在屈曲附近的自由振动¹⁾

李清禄²⁾ 杨静宁

(兰州理工大学理学院, 兰州 730050)

摘要 对受非保守载荷的简支梁在后屈曲附近的自由振动进行了研究. 基于可伸长梁的大变形理论, 建立了受沿轴线分布切向非保守力作用的简支梁后屈曲附近自由振动的几何非线性模型. 在小振幅和谐振动假设下, 简化得到后屈曲梁线性振动的控制方程. 采用打靶法求解振动问题的控制方程, 给出了前三阶固有频率与载荷之间的特征关系曲线. 结果表明: 非保守载荷作用下梁的振动响应与保守载荷作用下梁的振动响应有着明显不同.

关键词 简支梁, 非保守力, 自由振动, 固有频率, 打靶法

中图分类号: O343 文献标识码: A doi: 10.6052/1000-0879-13-140

FREE VIBRATION OF A SIMPLY SUPPORTED BEAM UNDER A NON-CONSERVATIVE DISTRIBUTED LOAD¹⁾

LI Qinglu²⁾ YANG Jingning

(School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract The free vibration of post-buckling beams subjected to non-conservative load is studied. Based on the large deformation theory for the elastic beams, the geometrically nonlinear dynamic equations are established for beams subjected to a distributed tangential follower force along the central axis. By assuming that the amplitude of beam's vibration is small and its response harmonic, a linear version of the vibration problem is deduced. By employing the numerical shooting technique to solve the governing equations for vibration, numerical solutions of the first three natural frequencies against the load parameter are obtained. The results show that the features of the vibration response of the beams subjected to a non-conservative load are evidently different from those subjected to a conservative load.

Key words simply supported beam, non-conservative load, free vibration, natural frequency, shooting-method

对非线性问题, 尤其是大位移问题, 体系常常是非保守的. 工程中存在大量受非保守力作用的结构或构件. 例如, 在有阻尼介质中运动的物体表面所受摩擦力的方向随物体变形而改变. 因此, 变形体的表现摩擦力为非保守力. 火箭和喷气式飞机以及刹车鼓系统均引起非保守力, 这种非保守力将引起输液管、桥梁及机翼的颤振. 这类非保守力有一个共同的特点: 作用于构件的载荷方向随结构的变形而发生变化, 这类力又称为随动力. Leipholz 在文献 [1]

中采用 Liapunou 方法分别分析了梁和矩形板结构在随动载荷作用下的弹性稳定性问题, 给出了结构小振幅振动的固有频率与载荷之间的特征关系曲线. 武际可等^[2]、Detinko^[3] 等采用轴线不可伸长假设, 计算了端部集中非保守力作用下悬臂梁和半圆拱的静态大变形问题. 李世荣等^[4] 等基于轴线可伸长梁的大变形理论, 建立了受轴线分布切线随动载荷作用 Euler 简支梁的弹性过屈曲控制方程, 研究了非保守载荷作用下梁的过屈曲性态.

2013-09-02 收到第 1 稿, 2013-10-03 收到修改稿.

1) 国家自然科学基金 (11272278, 11262010) 和甘肃省自然科学基金 (2011GS04154) 资助项目.

2) 李清禄, 男, 副教授, 博士, 主要研究方向为非线性力学. E-mail: lqu2008@163.com

由弹性稳定性理论知, 当轴向压力达到临界载荷时, 梁的一阶固有频率为零意味着结构发生分叉失稳. 结构进入过屈曲状态后还会表现出继续承受横向载荷的能力. 弹性梁在保守力作用下屈曲前的自由振动已有很多研究成果 [5-7]. 目前, 关于受非保守随动载荷作用可伸长梁的自由振动问题, 却很少见有文献报道. 在这种情况下, 梁上的分布载荷与变形有关, 这就使得描述梁的变形和平衡的微分方程的非线性和耦合程度都大大增强了. 本文将主要分析切线均布随动力作用下梁在过屈曲前后的自由振动响应, 寻找固有频率随这种非保守载荷变化的变化规律, 给出频率与随动力参数的特征关系曲线.

1 基本方程

考虑图 1 所示长为 l 的简支梁, 受沿轴线均匀分布切向均布载荷 q 作用. 设梁在屈曲变形过程中, 分布载荷 q 的方向始终与轴线相切, 因此载荷是非保守的. 忽略横向剪切变形, 将梁看作是 Euler 梁.

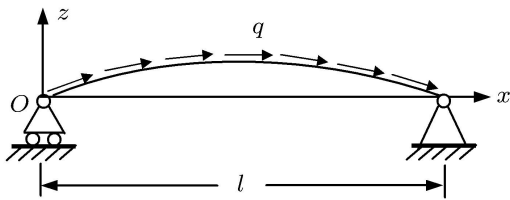


图 1 切线分布随动载荷作用下简支梁变形图

若只考虑自由振动, 惯性力可看作分布载荷

$$q_x = -\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q_z = -\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad m_\theta = -\rho_0 k^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$$

这里作用有方向始终沿着梁的轴线切线的均布载荷, 则有 $q_x = q \cos \theta$, $q_z = q \sin \theta$.

由文献 [4], 可得梁在非保守随动载荷作用下 Euler 梁在后屈曲附近自由振动的动力学控制方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= R \cos \theta - 1, & \frac{\partial w}{\partial x} &= R \sin \theta, & \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{M}{EI} \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -R\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Rq \cos \theta \\ \frac{\partial H}{\partial x} &= -R\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Rq \sin \theta \\ \frac{\partial M}{\partial x} &= R(-H \sin \theta + V \cos \theta) - \rho_0 k^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} \end{aligned}$$

其中, x 为水平坐标; t 为时间变量; $u(x, t)$ 和 $w(x, t)$ 分别为轴线上物质点在水平和铅直方向的位移; $\theta(x, t)$ 为变形后轴线切线与轴的夹角; H 和 V

分别为梁上沿水平和铅直方向的内力分量; M 为弯矩; R 为轴线伸长率, 定义为

$$R = 1 + \frac{1}{EA} (-H \cos \theta - V \sin \theta)$$

采用下列无量纲变换

$$\begin{aligned} (\xi, U, W) &= \frac{1}{l} (x, u, w), \quad \theta^* = \theta, \quad Q = \frac{l^3 q}{EI} \\ (H^*, V^*) &= \frac{l^2}{EI} (H, V), \quad M^* = \frac{lM}{EI}, \quad \delta = \frac{l}{h} \\ \lambda &= 2\sqrt{3}\delta, \quad \tau = \frac{t}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho_0}}, \quad \lambda = l\sqrt{\frac{A}{I}}, \quad r = \frac{k}{l} = \frac{l}{\lambda} \end{aligned}$$

可得无量纲控制方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial \xi} &= R \cos \theta^* - 1, & \frac{\partial W}{\partial \xi} &= R \sin \theta^* \\ \frac{\partial H^*}{\partial \xi} &= -R \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + RQ \cos \theta^* \\ \frac{\partial V^*}{\partial \xi} &= -R \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} + RQ \sin \theta^*, & \frac{\partial \theta^*}{\partial \xi} &= M^* \\ \frac{\partial M^*}{\partial \xi} &= R(-H^* \sin \theta^* + V^* \cos \theta^*) + r^2 \frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \tau^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $R = 1 + (-H^* \cos \theta^* - V^* \sin \theta^*) / \lambda^2$.

方程 (1) 为受切线随动分布载荷作用下梁几何非线性自由振动的动力学控制方程精确数学模型. 这是一个包含 7 个基本未知函数的强非线性偏微分方程的混合问题, 它既可以描述梁在屈曲前的大振幅振动, 又可以描述梁在屈曲后的非线性振动.

将方程 (1) 的解表示为静态解和动力响应解两部分, 并假设动力部分的解为谐振动形式

$$\left. \begin{aligned} U(\xi, \tau) &= U_s(\xi) + U_d(\xi, \tau) \\ W(\xi, \tau) &= W_s(\xi) + W_d(\xi, \tau) \\ V^*(\xi, \tau) &= V_s(\xi) + V_d(\xi, \tau) \\ H^*(\xi, \tau) &= H_s(\xi) + H_d(\xi, \tau) \\ \theta^*(\xi, \tau) &= \theta_s(\xi) + \theta_d(\xi, \tau) \\ M^*(\xi, \tau) &= M_s(\xi) + M_d(\xi, \tau) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中, 下标为 s 的量为梁的静态过屈曲问题, 下标 d 的量为过屈曲状态附近的振动解. 其中, 静态控制方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{dU_s}{d\xi} &= R_s \cos \theta_s - 1, & \frac{dW_s}{d\xi} &= R_s \sin \theta_s \\ \frac{dM_s}{d\xi} &= R_s(-H_s \sin \theta_s + V_s \cos \theta_s) \\ \frac{dH_s}{d\xi} &= R_s Q \cos \theta_s, & \frac{dV_s}{d\xi} &= R_s Q \sin \theta_s \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中, 静态变形伸长率为

$$R_s = 1 + (-H_s \cos \theta_s - V_s \sin \theta_s) / \lambda^2 \quad (4)$$

将式 (2) 代入式 (1), 并利用式 (3), 可得动态部分控制方程. 由于所得动态控制方程中包含惯性项及强非线性项, 很难用现有数学方法求解. 因此, 这里只研究非保守载荷作用下过屈曲梁附近的线性振动问题.

2 小振幅自由振动响应

对动态解进行线性化处理, 并且去掉静态部分的项, 可得到非保守梁小振幅振动的控制方程. 这里考虑过屈曲梁的小振幅自由振动, 并假设线性振动系统的振动响应为调和模式

$$(U_d, W_d, V_d, H_d, \theta_d, M_d) = (u_d, w_d, h_d, v_d, \Theta_d, m_d) \cos \omega \tau \quad (5)$$

其中, ω 为系统自由振动的频率, 于是可得到关于振动函数的常微分方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_d}{d\xi} &= -R_s \Theta_d \sin \theta_s + \Gamma \cos \theta_s \\ \frac{dw_d}{d\xi} &= R_s \Theta_d \cos \theta_s + \Gamma \sin \theta_s \\ \frac{dh_d}{d\xi} &= R_s (\omega^2 u_d - Q \Theta_d \sin \theta_s) + \Gamma Q \cos \theta_s \\ \frac{dv_d}{d\xi} &= R_s (\omega^2 w_d + Q \Theta_d \cos \theta_s) + \Gamma Q \sin \theta_s \\ \frac{d\Theta_d}{d\xi} &= m_d \\ \frac{dm_d}{d\xi} &= R_s [-(h_d + V_s \Theta_d) \sin \theta_s + (v_d - H_s \Theta_d) \cos \theta_s] + \Gamma (V_s \cos \theta_s - H_s \sin \theta_s) - r^2 \omega^2 \Theta_d \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

其中

$$\Gamma = [(H_s \Theta_d - v_d) \sin \theta_s - (V_s \Theta_d + h_d) \cos \theta_s] / \lambda^2$$

振动问题的边界条件为

$$w_d(0) = h_d(0) = m_d(0) = 0 \quad (7a)$$

$$u_d(1) = w_d(1) = m_d(1) = 0 \quad (7b)$$

3 数值计算与讨论

3.1 计算方法

由于方程 (6) 表现为很强的非线性, 再加上多未知量之间的耦合效应, 无法采用解析法求振动方程在给定边界条件下的频率响应. 这里采用打靶法^[7]求上述边值问题的数值解. 将方程 (6) 写成两点边值问题的标准形式

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dx} &= H(x, Y) \\ B_1 Y(x_1) &= b_1, \quad B_2 Y(x_2) = b_2 \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} Y &= \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9, y_{10}, \\ & \quad y_{11}, y_{12}, y_{13}, y_{14}\}^T = \\ & \quad \{U_s, W_s, \theta_s, H_s, V_s, M_s, \\ & \quad q, u_d, w_d, \Theta_d, h_d, v_d, m_d, \omega\}^T \end{aligned}$$

$$H(x_0) = \{d_1, 0, \beta, 0, d_2, 0, d_3, d_4, 0, \beta, 0, d_5, 0, d_6\}^T$$

根据文献 [4] 不难写出与边界条件有关的矩阵 B_1 , B_2 和向量 b_1 , b_2 .

对于线性振动问题, 给定的法化条件是 $\Theta_d = 0.1$. 文献 [8] 中的分布载荷方向不变, 而图 1 简支梁上的分布载荷方向始终与梁变形过程中的轴线相切, 由于载荷的随动性给问题的求解增加了难度, 这里选左端转角 $\beta = \theta_s(0)$ 为变形控制参数.

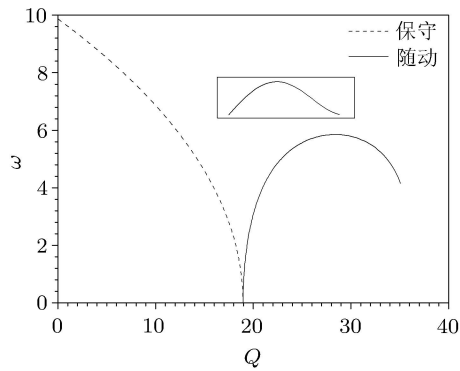
在采用打靶法计算时, 要用到变步长四阶 Runge-Kutta 方法进行数值积分. 因此, 为了保证在求解静态问题时的离散节点与求解振动问题时的离散节点相互吻合, 这里将屈曲问题和振动问题联立求解, 需要求解的基本未知量达到 14 个, 其中包括载荷参数 Q 和频率参数 ω .

3.2 计算结果

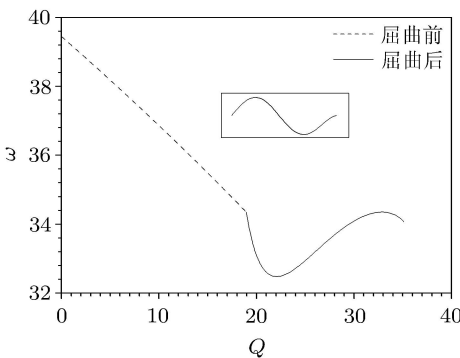
具体计算时取梁的长细比 $\lambda = 120$. 图 2 给出了简支梁在切线随动分布载荷作用下过屈曲构形附近小振幅振动的前三阶无量纲频率 ω 与载荷 Q 之间的特征关系曲线, 其中虚线表示屈曲前的情况, 实线表示屈曲后的情况. 从图中数值结果可见, 屈曲前后的各阶频率在 $Q = Q_{cr} = 18.589$ 处出现了转折. 这是由于结构的静态平衡构形在此处发生了分叉, 而分叉点正是结构从原始直线平衡状态进入曲

线平衡状态的转折点. 说明在非保守载荷作用下简支梁依然会发生分叉失稳.

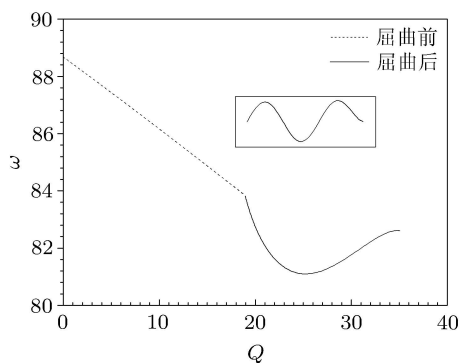
从图 2 还可以看出, 屈曲前梁的一阶频率非线性单调递减, 而二阶和三阶频率随载荷线性单调递减. 这是由于随动压力的存在使梁的挠度增加, 减少了梁的刚度, 使固有频率降低. 图中 $Q = 0$ 处对应的自激频率分别为 $\omega_1 = 9.864$, $\omega_2 = 39.461$, $\omega_3 = 88.795$.



(a) 一阶频率及其振型



(b) 二阶频率及其振型

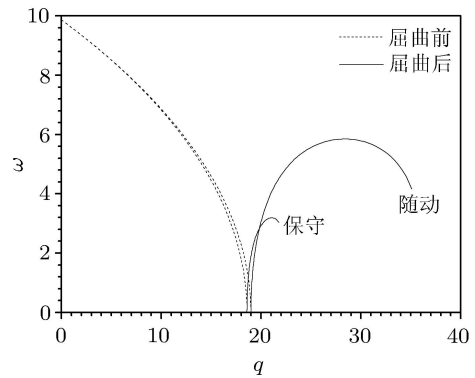


(c) 三阶频率及其振型

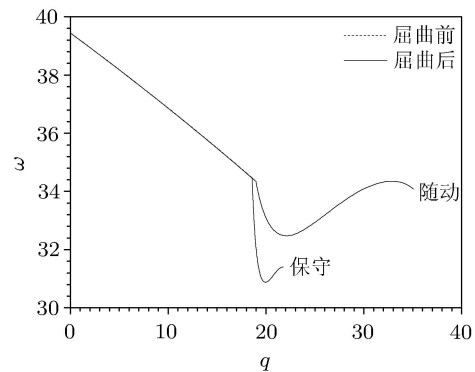
图 2 固有频率与载荷之间的特征关系及振型图

图 3 给出了非保守和保守两种系统下梁的前三阶频率与无量纲载荷之间的特征关系比较曲线. 屈曲前和屈曲后的转折点对应的临界载荷是不同的, 非保守载荷下梁的临界载荷 $Q_{cr} = 18.978$, 保守载荷下的临界载荷稍小, $Q_{cr} = 18.589$, 这和文献 [1] 给出的结果是十分吻合的.

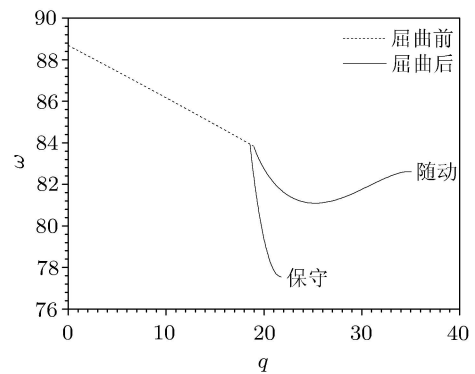
图 3 中还可以看出, 屈曲后非保守分布载荷和保守分布载荷作用下的频率 - 载荷特征关系是显著



(a)



(b)



(c)

图 3 保守与随动载荷下固有频率与载荷关系比较

(下转第 340 页)

该方法事实上提供了求解这类问题的一个统一的公式,应用起来更加方便.

5 结论

本文给出了一种求解悬链在受水平冲击力时各链段运动速度的拉格朗日方法,该方法无需考虑链段铰接处因冲击而产生的反碰撞冲量和链段之间的运动关系式,对于链段数目较多的悬链求解非常方便.而且由于该方法是针对一般的冲击情况给出的统一的求解公式,因此对于冲击力作用在任意位置和悬链处于任意初位置(无论是否运动)的情况都可很方便地求解.

参考文献

- 1 John DB. 100 Essential Things You Didn't Know You Didn't Know: Math Explains Your World. New York: W.

- W. Norton & Company, 2010
- 2 Andrew Belmonte, Michael J Shelley, Shaden T Eldakar, et al. Dynamic patterns and self-knotting of a driven hanging chain. *Physical Review Letters*, 2001, 87(11): 114301
- 3 Herb Bailey. Motion of a hanging chain after the free end is given an initial velocity. *The American Journal of Physics*, 2000, 68(8): 764
- 4 Theodore Foster, Willem van Wyngaarden, Arthur Cary, et al. On the $g/2$ acceleration of a pulse in a vertical chain. *The Physics Teacher*, 2013, 51(7): 394-396
- 5 Michael A Karls. Verifying the hanging chain model. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 2013, 23(8): 733-747
- 6 刘又文. 关于悬链冲击效应的两个通项公式. *力学与实践*, 1999, 21(4): 68-69
- 7 杨海三. 冲击情况下的拉格朗日方程及应用. *西安公路学院学报*, 1989, 7(2): 87-92
- 8 黄定明. 悬链问题分析. *常州教育学院学报*, 1996, (2): 70-72
- 9 刘延柱, 朱本华, 杨海兴. *理论力学* (第3版). 北京: 高等教育出版社, 2009

(责任编辑: 胡漫)

(上接第336页)

不同的.这是由于随动载荷的方向随梁的变形而改变,相当于削弱了轴向的压力,而梁横向的载荷增加了,因此梁发生失稳,必须增加非保守载荷.相应地,屈曲后非保守载荷的变化范围也比保守载荷大很多.

4 结论

基于可伸长梁的几何非线性理论,建立了受沿轴线分布切向非保守力作用的简支梁后屈曲附近自由振动的几何非线性模型.采用打靶法数值求解所得边值问题,获得了梁在屈曲前后的前三阶无量纲频率随无量纲载荷之间的特征关系曲线.结果表明:屈曲前,各阶频率随载荷单调递减.在临界载荷 Q_{cr} 处,一阶频率为零,二阶和三阶频率都不为零.屈曲后各阶频率随载荷变化不同.非保守载荷作用下梁的振动响应与保守载荷作用下梁的振动响应表现出显著的不同.

参考文献

- 1 Leipholz U. *Stability of Elastic Systems*. Berlin: Springer, 1980
- 2 武际可, 苏先榭. *弹性系统的稳定性*. 北京: 科学出版社, 1994
- 3 Detinko FM. On the elastic stability of uniform beams and circular arches under non-conservative loading. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37(39): 5505-5515
- 4 李世荣, 吴莹, 周又和. 轴向随动分布载荷作用下简支梁杆的过屈曲. *工程力学*, 2003, 20(3): 94-97
- 5 Lestari W, Pakaemirli M. Nonlinear vibration of buckled beams: some exact solution. *Journal of Solids and Structures*, 2001, 38(26-27): 4741-4757
- 6 钱波, 岳华英. 变截面梁横向振动固有频率数值计算. *力学与实践*, 2011, 33(6): 45-49
- 7 Li SR, Teng ZC, Zhou YH. Free vibration of heated Euler-Bernoulli beams with thermal postbuckling deformations. *Journal of Thermal Stresses*, 2004, 27(9): 843-856
- 8 李清禄, 李世荣. 受均布载荷压杆后屈曲形态的数值计算. *力学与实践*, 2010, 32(3): 41-43

(责任编辑: 胡漫)