

双曲偏微分方程的局部伪弧长方法研究

王 星, 马天宝*, 宁建国

(北京理工大学 爆炸科学与技术国家重点实验室, 北京 100081)

摘 要:重点研究了局部伪弧长方法在处理偏微分方程,尤其是双曲型偏微分方程出现激波间断的奇异性问题,对比分析了全局伪弧长方法空间转化的形式及其网格自适应的性质。为提高求解效率,提出了局部伪弧长方法,利用激波间断的性质,给出了判断奇异点位置以及模板选择的方法,涉及如何处理激波振荡,如何引入弧长参数,以及怎样求解间断等问题。通过数值算例验证了局部伪弧长在激波捕捉和追踪方面的可行性,通过比较局部伪弧长方法与 Godunov 方法处理不同初值条件的双曲问题,显示出局部伪弧长方法处理双曲偏微分方程的优越性,为伪弧长方法应用到物理问题奠定基础。

关键词:数值方法;局部伪弧长;双曲问题

中图分类号:TP273;O175.2

文献标志码:A

doi:10.7511/jslx201403017

1 引 言

偏微分方程能够描述自然界中的很多物理现象,基于连续介质力学求解这些方程(组)得到的解通常具有奇异性,包括不连续、激波间断等。对于这些数值问题,近年来发展了很多理论和计算方法,包括奇异摄动理论、子波法和高分辨率的数值算法等,这些方法从不同的角度解决了偏微分方程的很多数值问题,包括数值耗散和色散;但为了克服这些问题也付出了很高的计算代价,加重了CPU负担,对于求解有一定规模的工程物理问题实现难度较大。

鉴于以上分析以及偏微分方程的特殊性质,人们开始寻求一种避开这些具有奇异性的极值点的方法,国外关于这类方法一般是应用在结构响应的各种动力学行为,通过绕开标准计算方法无法求解的几何或者物理非线性临界点。Risk^[1]首次提出引入弧长参数,通过加入该参数来处理这些非线性方程中的极值问题,具体是通过在解曲线上增加一个约束方程,使得带有弧长参数的奇异性得到消除或削弱;Boor^[2]证明了引入参数后逼近精确解的可行性,并且给出通过变点高阶逼近函数的方法;

Kyoung^[3]提出用显示弧长方法模拟跟踪结构的动态松弛和动态阻尼。忻孝康^[4]首先运用弧长方法求解一维定常对流—扩散方程的两点边值问题,并且运用初值问题的打靶法解决了边界层和激波层等数值计算难题,得到的数值解与精确解较为符合,可以作为奇异摄动常微分方程边值问题的一种求解方法;武际可^[5]将该方法扩展到偏微分方程,通过在时间层上加入弧长参数,较好地解决了微分方程的Stiff性质,并且在空间出现间断时也引入弧长参数,一定程度上解决了激波的传播问题。

本文基于国内外的研究情况,重点研究引入弧长方法处理偏微分方程尤其是双曲型偏微分方程出现激波间断^[6]的奇异性问题,涉及如何处理激波振荡,如何引入弧长参数,以及怎样求解间断等问题,并且通过求解一维双曲问题的 Burgers 方程,验证了该方法的有效性。通过对比可知,该方法思路简洁,程序实现简单,并且计算效率较高,满足工程需要,能够实现自适应网格加密,并且可以推广到高维空间的方程(组)初值问题中,对于求解非定常偏微分方程提供了一个很好的途径。数学上讲引入弧长参数并没有从本质上改变偏微分方程的奇异性,仅是通过引入弧长参数从另外的维空间尽量消除或削弱奇异性,本文在具体实现过程中对之前伪弧长方法做部分修正,不仅能够提高计算效率,并且为以后在现有计算条件实现大规模计算提供了一种途径,对于该方法可以总结称其为局部伪弧长方法。

收稿日期:2013-01-21; **修改稿收到日期:**2013-08-22.

基金项目:国家自然科学基金(11032002,11172041)

资助项目.

作者简介:王 星(1986-),男,博士;

马天宝*(1981-),男,博士,副教授

(E-mail: madabal@bit.edu.cn).

2 局部伪弧长方法

以一维双曲型系统为例,求解方程为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

对于双曲系统,通过解耦可以得到一维双曲标量方程,以下式代替双曲系统内的每一个子方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

对方程(2)离散求解时,随着时间的增加,变量 u 在空间上会出现较大跳跃,利用一般的数值计算格式继续求解会导致数值振荡,计算误差会越来越大,最后无法继续进行求解,这种数值上的跳跃就对应着数学上的奇异性,也就是严格数学间断。当物理空间出现较大跳跃时引入弧长参数 σ ,使其满足 $\sigma = \sigma(x, t)$,具体为

$$(d\sigma)^2 = (dx)^2 + (du)^2 \quad (3)$$

由式(3)可知, x 和 σ 有如下关系:

$$x = \int \sqrt{1 - (\partial u / \partial \sigma)^2} d\sigma \quad (4)$$

利用式(4)可以求解得到 x 和 σ 关系的一切信息,则原控制方程变换到弧长空间也就有如下变形:

$$\frac{du}{dt} = -a(u) \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{1}{\sqrt{1 - (\partial u / \partial \sigma)^2}} \quad (5)$$

利用式(5)可以在全局弧长空间得到各点对应的物理量值。

为了提高计算效率,可以仅在奇异点附近引入伪弧长方法,通过判断物理空间是否存在间断,然后定位间断位置,进而在间断附近应用伪弧长算法进行计算,这样能够很好地节约计算时间。判断网格内是否存在间断可以通过物理量的光滑程度给出选择,参考 ENO^[7] 思想,对于网格 j 内的函数 u_j ,可以采用牛顿差商进行判断,利用比较差商绝对值的大小,可以进行模板选择。例如对于每一个节点 j ,如果此处存在奇异点,则首先确定基模板为 $\{j, j+1\}$,而数值上的间断不是数学上的严格间断面,所以可以通过比较左右斜率,即一阶差商绝对值的大小进行取舍,如果

$$|v[j-1, j]| \geq |v[j, j+1]| \quad (6)$$

式中 $v[j, j+1] = (u_{j+1} - u_j) / (x_{j+1} - x_j)$,模板向左增加一单元,即扩充为 $\{j-1, j, j+1\}$,为了提高伪弧长方法的精度,可以在此模板的基础上继续左

右各扩充一个节点。依次类推,利用牛顿差商进行模板选择。

利用选定的模板,就可以在模板上利用伪弧长方法进行求解,而其他的区域可以直接利用现有的数值格式进行求解。利用选择的模板,在模板上采用伪弧长算法,这样不仅绕开了数学上的奇异点,并且不需要全局处理弧长空间,可以大大提高计算效率。对于双曲系统可以统一写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \theta a(u) \frac{\partial u}{\partial x} + (1 - \theta) a(u) \frac{\partial u}{\partial \sigma} h(\sigma) = 0 \quad (7)$$

式中,控制因子 $h(\sigma) = 1 / \sqrt{1 - (\partial u / \partial \sigma)^2}$, θ 为选择因子。选择伪弧长方法求解时,令 $\theta = 0$;否则,取 $\theta = 1$ 。

具体运用伪弧长方法离散求解双曲型问题时,对式(7)中的控制因子 $h(\sigma)$ 特殊处理,初值问题的激波转换到弧长空间,会导致 $h(\sigma)$ 趋向于无穷,对于不同的初值问题,通过数值算例比较,控制因子既要能够很好地在物理空间形成激波,又要使激波按照正常的速度传播,采取如下形式:

$$h(\sigma_j) = \begin{cases} \frac{u_{j+1} - u_j}{x_{j+1} - x_j}, & |h(\sigma_j)| > 1 - \epsilon \\ h(\sigma_j), & |h(\sigma_j)| \leq 1 - \epsilon \end{cases} \quad (8)$$

式中 ϵ 为一小量,对于不同的物理问题,可以进行修改,一般情况下可以取为 $\epsilon = 10^{-2}$ 。

在局部模板上应用伪弧长算法,还需要考虑对时间步长的选取,由于对模板内网格重新细分,根据 CFL 条件,可以选取时间步长为

$$(\Delta t)_\sigma = CFL \frac{(\Delta \sigma)_{\min}}{(\Delta u)_{\max}} \quad (9)$$

然而,利用时间步长在伪弧长空间进行迭代求解,当选取的模板较大,并且伪弧长空间网格步长较大时,伪弧长空间的时间步长会大于物理空间的时间步长,所以需要时间步长做相应调整,对于一般问题可以采用具体形式:

$$(\Delta t)_\sigma = \min[(\Delta t)_x / M, (\Delta t)_\sigma] \quad (10)$$

式中 M 为伪弧长空间网格数与模板数的比值。

3 伪弧长性质

伪弧长方法是一种通过绕开数学上的奇异点,进而消除或消弱数值上的奇异性,具体是利用空间变换以及维数变化来实现的。算例显示伪弧长方法的性质以及空间变换的结果对比。

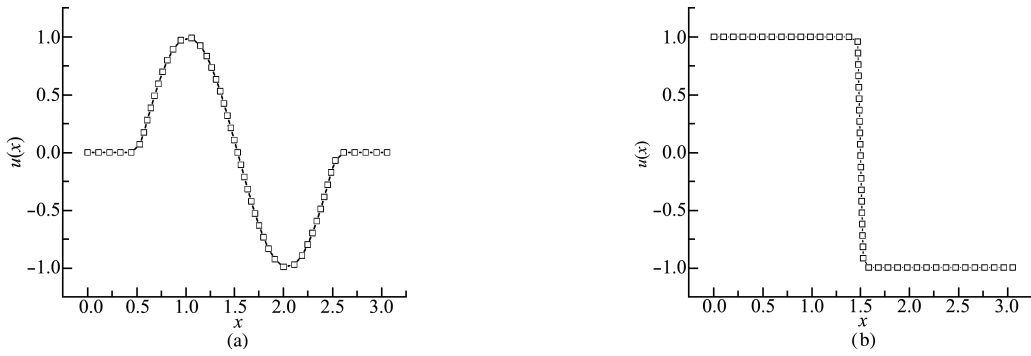


图1 物理空间点分布
Fig. 1 Position of physical space point

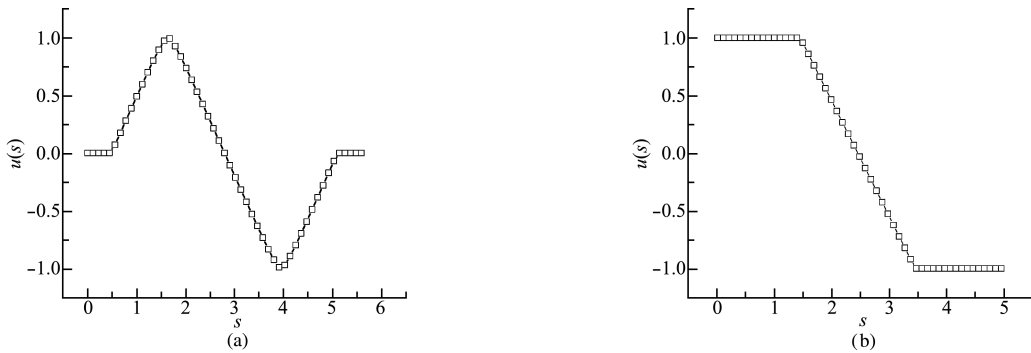


图2 弧长空间点分布
Fig. 2 Position of arc-length space point

3.1 伪弧长方法自适应性

为了能够显示伪弧长方法的网格自适应性，考虑到双曲型偏微分方程的不同初值情况，给出两种形式，一种为连续性初值式(11)，一种为间断初值式(12)。

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin[\pi(x-0.5)], & 0.5 < x < 2.5 \\ 0, & x \leq 0.5, x \geq 2.5 \end{cases} \quad (11)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x < 1.5 \\ -1, & x \geq 1.5 \end{cases} \quad (12)$$

在计算域 $[0,3]$ 内，取网格数 $N=50$ ，图 1(a,b) 分别为初值式(11,12)对应经过弧长变换后的物理空间点分布。通过对比可以发现，加入伪弧长参数后，物理空间点分布相应变化，在物理量变化较大的地方网格自动加密；而在变化较小或者不变化的地方网格自动变稀疏，物理间断上也重新分布了网格点，使得物理空间上不存在较大间断，起到了网格自适应的作用。这样就能够求解双曲问题时，不会存在由于奇异性导致的数值问题。

3.2 伪弧长空间

利用控制方程求解计算时，是基于伪弧长空间进行离散。对于本文的研究，即是需要对控制方程(8)进行离散计算。必须将原始的物理空间(x 空

间)转化到计算空间(σ 空间)，对于前面不同的初值情况式(11,12)，在伪弧长空间进行离散后空间点分布表示如图 2 所示。

通过对比物理空间和弧长空间可以看出，弧长空间网格点是均匀分布，曲线属于光滑连续函数。通过这种空间变换，尤其是严格的间断问题，通过弧长变换后在弧长空间已经不存在数值上的巨大跳跃，也就是物理上的激波间断，避免了原物理空间由于不连续导致的各种数值问题。

4 数值验证

为了验证局部伪弧长方法的有效性，以一维初值问题的无粘 burgers 方程为例，通过选取不同的初值问题，比较数值结果的不同，burgers 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} = 0$$

具体离散计算时，空间上采用基本的中心差分法和局部伪弧长方法离散，时间上统一采用初值问题的常微分方程求解器来计算半离散的数值格式，具体采用三步三阶的 SSP-Runge-Kutta 方法^[8]，该方法能够保证时间层上的精度。

4.1 连续型初值

$$u(x,0) = \begin{cases} \sin[\pi(x-0.5)], & 0.5 < x < 2.5 \\ 0, & x \leq 0.5, x \geq 2.5 \end{cases} \quad (13)$$

在计算域 $[0,3]$ 内,取网格数 $N=50$,图3为计算终止时间 $t=0.40$ 的显示结果,通过对比可以明显看出,图3(a)直接中心差分会导致在跳跃处出现严重的振荡,最后导致计算无法进行;而加入伪弧长算法后,如图3(b)所示,尽管数值格式还是采用基本的中心差分,但在间断处具体离散计算时是基于弧长空间,避开了物理空间的不连续,也就避免了中心差分在间断处的振荡。

随着时间的推移,直接中心差分已经失效,局部伪弧长算法对于激波的随时间变化捕捉情况,可以通过对比该算法与一阶迎风的 Godunov 格式,结合精确 Riemann 求解器的计算结果来判断局部伪弧长算法的优劣。Godunov 数值方法是近代高精度数值格式的基础,对于偏微分方程双曲问题能够实现较好地解决,通过精确或者近似的 Riemann 求解器,能够很好地处理双曲系统的间断问题。仍采用上面的初值情况,计算终止时间取为 $t = 0.80$,空间网格数同样为 $N=50$ 。图4为两种不同

方法离散求解的结果。

从图4可以看出,局部伪弧长方法与 Godunov 方法结果吻合得很好,都能很好地实现激波间断的捕捉和追踪;但在间断细节方面还是有微小差别,利用局部伪弧长算法,空间离散一直采用直接中心差分,所以在间断附近网格点物理量的值存在微小振荡,而迎风的差分方法就避免了这种振荡。根据这个初值问题,可以看出,局部伪弧长方法能够很好地处理激波的形成。

4.2 间断初值

$$u(x,0) = \begin{cases} 1, & x \leq 1.5 \\ -1, & x > 1.5 \end{cases} \quad (14)$$

$$u(x,0) = \begin{cases} -1, & x \leq 1.5 \\ 1, & x > 1.5 \end{cases} \quad (15)$$

在计算域 $[0,3]$ 内,取网格数 $N=50$,计算终止时间取为 $t=0.50$,对于此种间断初值问题,在初始时刻就存在间断,也就是 Riemann 问题,同样对比局部伪弧长算法与 Godunov 方法的计算结果。

间断初值式(14)情况对应图5(a),直接利用中心差分没有显示图像结果,因为在 $t=0.08$ 时已

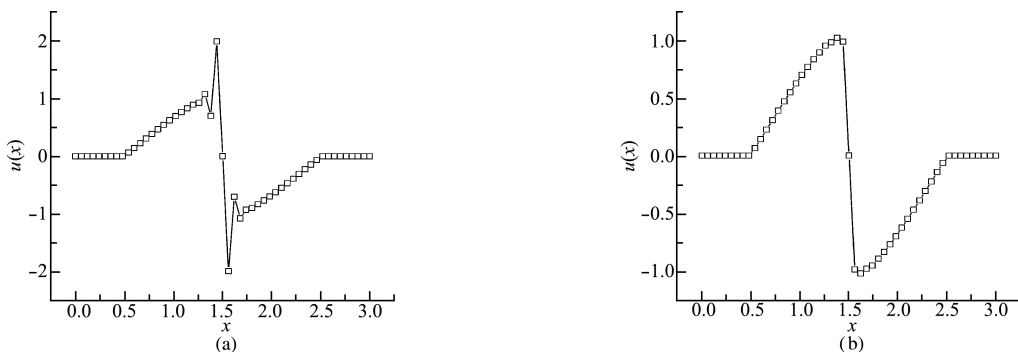


图3 弧长方法计算结果对比
Fig.3 Comparison of the result of arc-length method

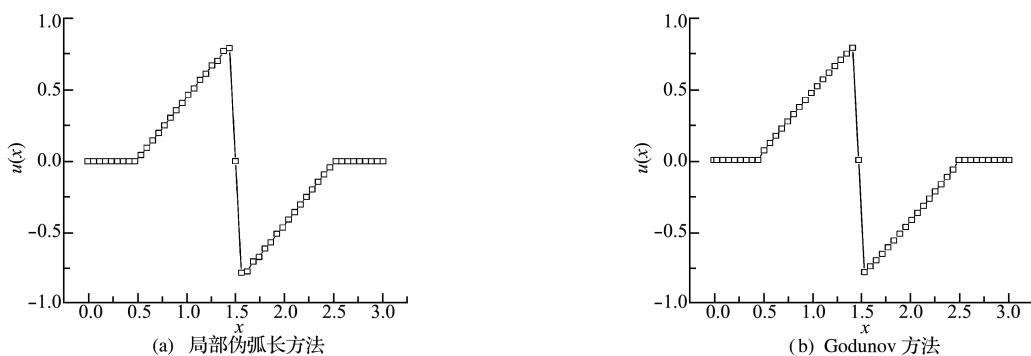


图4 $t=0.80$ 时结果对比
Fig.4 Comparison of the result at $t=0.80$

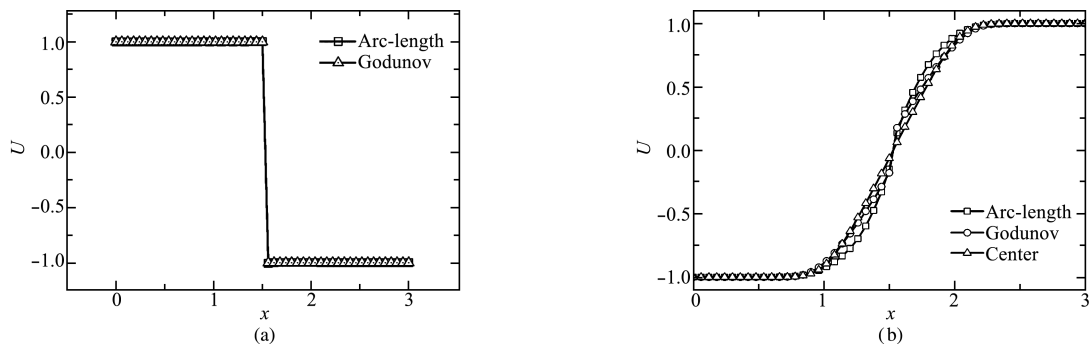


图5 不同方法结果对比

Fig. 5 Comparison of the results of different methods

经出现很大的误差,再继续求解导致计算崩溃。而利用局部伪弧长方法修正后(图5(b)显示为 Arc-length),能够很好地保持激波传播的性质,结果与 Godunov 格式结合精确 Riemann 求解器的求解结果保持了一致,说明局部伪弧长方法在求解激波间断的初值方面有很高的提升,并且相对于对空间每一点求解 Riemann 问题提高了效率。间断初值式(15)情况对应图5(b),求解结果为稀疏波,通过空间点分布可以看出微小差别,Arc-length 方法计算结果与 Godunov 方法在中间吻合较好;而直接中心差分显示出较大的耗散,加入伪弧长方法后,对于稀疏波处理更加符合精确解。总体上看,Arc-length 通过局部空间点的修正耗散更小,综上所述可以看出 Arc-length 方法的优越性。

5 结 论

本文将伪弧长方法应用在求解双曲型偏微分方程中,给出了全局伪弧长方法空间转化的形式及其网格自适应的性质;根据激波间断的性质,给出了通过判断奇异点位置以及模板选择的局部伪弧长方法,提高了求解效率。最后,通过数值算例证明了局部伪弧长方法在处理激波形成和激波间断问题方面的可行性,通过比较局部伪弧长方法与 Godunov 方法处理不同初值条件的双曲问题,显示出局部伪弧长方法的优越性。

参考文献(References):

- [1] Riks E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems [J]. *International Journal of Solid Structures*, 1979, **15**(7): 529-551.
- [2] Cde Boor. On local spline approximation by moments [J]. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 1968, **17**: 729-735.
- [3] Lee K S, Han S E, Park T. A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping [J]. *Computers and Structures*, 2011, **89**(1-2): 216-233.
- [4] 忻孝康,唐登海.一维定常对流-扩散方程的弧长参数法 [J]. *应用力学学报*, 1988, **5**(1): 44-55. (XIN Xiao-kang, TANG Deng-hai. An arc-length parameter technique for steady diffusion-convection equation [J]. *Chinese Journal of Applied Mechanics*, 1988, **5**(1): 44-55. (in Chinese))
- [5] 武际可,许为厚,丁红丽.求解微分方程初值问题的一种弧长法 [J]. *应用数学和力学*, 1999, **20**(8): 875-880. (WU Ji-ke, XU Wei-hou, DING Hong-li. Arc-length method for differential equations [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 1999, **20**(8): 875-880. (in Chinese))
- [6] 张焕好,陈志华,黄振贵,等.超声速平面混合层小激波的形成与演变 [J]. *计算力学学报*, 2012, **29**(5): 772-778. (ZHANG Huan-hao, CHEN Zhi-hua, HUANG Zhen-gui, et al. The generation and evolution of shocklets in a supersonic plane mixing layer [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2012, **29**(5): 772-778. (in Chinese))
- [7] Harten A, Engquist B, Osher S. Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes [J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **71**(2): 231-303.
- [8] Ketcheson D I. Highly efficient strong stability preserving Runge-Kutta methods with low-storage implementations [J]. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2008, **30**(4): 2113-2136.

Local pseudo arc-length method for hyperbolic partial differential equation

WANG Xing, MA Tian-bao*, NING Jian-guo

(State Key Laboratory of Explosion Science and Technology, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China)

Abstract: In this paper, a local pseudo arc-length method is proposed for hyperbolic partial differential equation with singular problem of shock waves, and the forms of space transformation and adaptive mesh refinement are analyzed for the global pseudo arc-length method. In order to improve the computational efficiency, the local pseudo arc-length method which gives the ways to determine the position of singular points and select the computational stencil is presented according to the properties of shock wave. The modifications of the new method involve how to introduce the arc-length parameters and how to dispose the shock wave oscillation. The feasibility of the local pseudo arc-length method in capturing and tracking shock is proved through numerical examples, and the superiority of local pseudo arc-length method in dealing with hyperbolic partial differential equation is shown by comparing our method with Godunov method for disposing different initial conditions of the hyperbolic problems. The numerical results demonstrate that our new method can be applied to engineering problems.

Key words: numerical method; local pseudo arc length; hyperbolic problem

~~~~~  
(上接第 344 页)

## Analysis of nonlinear large deformation of functionally graded material elastic combination curved beam subjected to non-conservative forces

LI Qing-lu<sup>\*1</sup>, LI Shi-rong<sup>2</sup>

(1. School of Sciences, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China;

2. School of Civil Science and Technology, Yangzhou University, Yangzhou 225127, China)

**Abstract:** Based on the assumption of straight normal line of beams and by employing geometrically nonlinear theory for the extensible elastic beams, governing equations of large static deformation of functionally graded material (FGM) combination elastic curved beam subjected to a distributed tangential follower force along the central axis were established. In the mathematical model, not only the effects of the axial elongation and the initial curvature of the FGM curved beam on the deformation were accurately taken into account but the coupling between elongation and bending was considered. By using shooting method, the nonlinear plane bending of a combination curved beam from a straight beam and a quarter semicircle FGM made of metal and ceramic subjected to tangentially distributed follower force along the axial line was analyzed. The equilibrium paths of the deformed FGM curved beams under the different graded index, varying with the load parameter in a large range, are presented, and compared with the properties of metal and ceramic material curved beams.

**Key words:** functionally graded material; combination curved elastic beam; geometrical nonlinearity; non-conservative; stretching-bending coupling; shooting method