

一维随机排列非均质颗粒材料结构刚度系数解析式

梁元博, 李锡夔*

(大连理工大学 工业装备结构分析国家重点实验室, 大连 116024)

摘要:针对一维情况下随机排列非均质颗粒材料组成的结构, 推导了该结构的刚度系数的解析表达式。颗粒材料由随机算法根据颗粒尺寸分布和结构尺寸生成。通过引入相对破碎参数, 将颗粒破碎现象定量体现在颗粒尺寸分布函数的变化上, 从而使本文提出的解析表达式能够计及颗粒破碎。数值结果说明本文提出表达式的有效性, 并体现了颗粒破碎对颗粒结构刚度系数的影响。

关键词:颗粒材料结构; 随机排列非均质; 颗粒破碎; 刚度系数

中图分类号: TU43 **文献标志码:** A doi:10.7511/jslx201403008

1 引言

颗粒材料由颗粒和颗粒间空隙组成, 具有高度随机性和非均质性。颗粒集合体的宏观力学性质由其细观尺度力学性质决定。研究颗粒材料结构, 要了解其宏观力学行为的细观机理。

颗粒材料的细观尺度信息主要包括反映颗粒材料中颗粒间接触方向分布等几何信息的结构张量(fabric tensor)^[1]、颗粒尺寸概率密度函数^[2]和颗粒间接触刚度系数等。Chang等^[3,4]引入运动学假设, 将颗粒材料的本构关系表达为结构张量的函数。李锡夔等^[5]在平均场理论框架下, 推导了基于细观信息的颗粒材料宏观本构关系。

颗粒破碎是颗粒材料破坏的主要原因之一, Bolton M D等^[6]在离散单元法框架下, 考虑了不同的颗粒破碎条件和颗粒破碎后的处理方法。Einav等^[7]提出了颗粒材料的破碎力学理论, 通过引入最终颗粒尺寸分布的概念和假设颗粒尺寸分布为存储能量分布的权函数, 将相对破碎参数 B 引入到本构模型之中。

不需要借助平均场理论和运动学假设, 针对一维情况下, 由非均质颗粒材料组成的结构, 在忽略了颗粒转动和横向运动的情况下, 本文建立了结构刚度系数的解析表达式。结构刚度系数表达为颗

粒尺寸分布和结构尺寸的函数。假设最终尺寸分布的概率密度函数形式与相同尺寸的颗粒破碎概率相同, 从而使颗粒当前尺寸分布表达为最终尺寸分布和初始尺寸分布的加权求和。最终, 将相对破碎参数引入到结构刚度系数的表达式。在数值算例中, 应用随机算法根据颗粒尺寸分布概率密度函数和结构整体尺寸生成颗粒样本, 计算结构的刚度系数, 并与本文提出的表达式预测结果比较, 二者的一致性验证了本文提出表达式的有效性。颗粒破碎体现在颗粒尺寸分布函数的变化, 数值结果显示, 随着破碎程度的增加, 结构刚度系数下降, 这也与表达式预测结果一致。

2 一维情况下颗粒结构刚度系数的解析表达式

如图1所示, 一系列颗粒的形心处于同一铅垂线上。不考虑颗粒水平方向的移动和颗粒的转动, 整个结构的高度是 L ; 结构刚度系数是 K , 结构受到的压缩力是 F , 颗粒编号从下到上依次为 $1, 2, \dots, N$; N 是颗粒个数。其中某一接触点的法向相对接触位移为 $\delta_{i,i+1}$, 下角标 $i, i+1$ 为第 i 个和第 $i+1$ 个颗粒的颗粒编号。

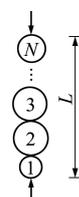


图1 一维颗粒结构

Fig. 1 One-dimensional granular structure

收稿日期:2013-03-20; 修改稿收到日期:2013-06-08.

基金项目:国家自然科学基金(11372066, 11072046); 国家重点基础研究发展计划(2010CB731502)资助项目.

作者简介:梁元博(1982-), 男, 博士生;

李锡夔*(1940-), 男, 教授, 博士生导师

(E-mail: xikuili@dlut.edu.cn).

可以建立表达式:

$$F/K = \delta_{1,2} + \delta_{2,3} + \dots + \delta_{N-1,N} \quad (1)$$

颗粒材料的接触力计算模型有很多种,本文采用 Hertz 接触力计算模型^[8]。考虑相接触的两个颗粒 a 和 b , 半径分别为 r_a 和 r_b , 泊松比分别为 ν_a 和 ν_b , 弹性模量分别为 E_a 和 E_b 。则接触颗粒 a, b 的法向接触力 $f_{a,b}$ 为^[8]

$$f_{a,b} = \frac{4}{3} H_{a,b} r_{a,b}^{1/2} \delta_{a,b}^{3/2} \quad (2)$$

式中 $\delta_{a,b}$, $r_{a,b}$ 和 $H_{a,b}$ 分别为接触颗粒 a, b 的法向相对接触位移、有效半径和有效弹性模量, 分别定义为^[8]

$$\delta_{a,b} = r_a + r_b - |\bar{\mathbf{x}}_a - \bar{\mathbf{x}}_b|, \quad r_{a,b} = \frac{2r_a r_b}{r_a + r_b} \quad (3,4)$$

$$\frac{1}{H_{a,b}} = \frac{3}{2} [(1 - \nu_a^2)/E_a + (1 - \nu_b^2)/E_b] \quad (5)$$

式中 $\bar{\mathbf{x}}_a$ 和 $\bar{\mathbf{x}}_b$ 分别为颗粒 a, b 的形心坐标位置向量。

对于一维结构

$$F = f_{1,2} = f_{2,3} = \dots = f_{N-1,N} \quad (6)$$

假设各个颗粒的材质相同, 即泊松比与弹性模量均相同, 分别为 ν, E , 则任意接触颗粒 a, b 之间的有效弹性模量 $H_{a,b}$ 可以统一写为 H , 即

$$H = \frac{E}{3(1 - \nu^2)} \quad (7)$$

将式(2,4,6,7)代入式(1)得

$$\frac{F}{K} = \left[\frac{3}{4H} \right]^{2/3} \left[\left[\frac{F}{\sqrt{r_{1,2}}} \right]^{2/3} + \dots + \left[\frac{F}{\sqrt{r_{N-1,N}}} \right]^{2/3} \right] \quad (8)$$

式(8)可近似表示为

$$\frac{F^{1/3}}{K} \approx \left[\frac{3}{4H} \right]^{2/3} \left[\left[\frac{1}{r_1/2} \right]^{1/3} + \dots + \left[\frac{1}{r_N/2} \right]^{1/3} \right] = \left[\frac{3}{2H} \right]^{2/3} \left[\left[\frac{1}{d_1} \right]^{1/3} + \dots + \left[\frac{1}{d_N} \right]^{1/3} \right] \quad (9)$$

式中 r_i 和 d_i 分别为颗粒 i 的半径和直径。

引入颗粒尺寸分布的概念, 假设当前颗粒尺寸分布函数是 $p(d)$, $p(d)dd$ 表示在当前状态下, 直径位于分段 $[d, d+dd]$ 上的颗粒的概率。

当颗粒数目很多时, 式(9)可趋近为

$$\frac{F^{1/3}}{K} = \left[\frac{3}{2H} \right]^{2/3} N \int_{d_m}^{d_M} \frac{p(d)}{d^{1/3}} dd \quad (10)$$

式中 d_M 和 d_m 分别为颗粒的最大和最小尺寸。

颗粒结构总长度 L 和颗粒个数 N 的关系为

$$\int_{d_m}^{d_M} N \times d \times p(d) dd = L \quad (11)$$

定义结构受到的压缩位移是 U , 则

$$F = K \times U \quad (12)$$

定义符号 $\langle \rangle$, 对于任意颗粒尺寸 d 的函数 $f(d)$

$$\langle f(d) \rangle = \int_{d_m}^{d_M} f(d) p(d) dd \quad (13)$$

将式(11~13)代入式(10), 得到结构刚度系数的表达式为

$$K = \frac{2}{3} H U^{1/2} \left[\frac{\langle d \rangle}{L \langle d^{-1/3} \rangle} \right]^{3/2} \quad (14)$$

式(14)是本文建立的不考虑颗粒破碎情况时, 颗粒材料结构刚度系数的解析表达式。当具体的颗粒材料结构确定之后, 等式右端的 H, L 等参数都将确定, 唯一不确定的是压缩位移 U 。说明颗粒材料结构刚度系数是非线性的, 它是压缩位移 U 的函数。这是由于在接触点水平上, 相对接触力和相对接触位移之间采用了非线性的 Hertz 接触法则(式(2)), 从而引起在结构尺度上, 载荷与位移之间的非线性关系; 也就是说, 结构的刚度系数依赖于当前的压缩位移值。

2.1 讨论

实际颗粒材料在受压载荷下, 其传力路线应该是复杂的网状路线, 而且在侧向无约束的情况下, 倾向于侧向坍塌。本文针对一维随机排列非均质颗粒材料结构的力学行为, 假定颗粒侧向位移约束为零, 并将传力路线简化为一维。另一方面, 提出的一维颗粒材料结构的压缩刚度系数表达式也要考虑进一步为具有侧向约束的二维或三维颗粒材料结构建立压缩刚度系数解析表达式做准备。因此, 本节考虑了一个具有侧向约束的二维随机非均质颗粒方板在受压载荷作用下响应的例题, 如下。

如图2所示的颗粒方板, 方板中颗粒样本是随机排列的, 由向内堆积算法^[9]生成。方板宽度 $D = 1$ m, 高度 $L = 2$ m。上下两边界的颗粒受到铅垂方向的压缩, 压缩量为 0.001; 同时, 水平方向位移和转角固定为 0, 左右两边界的颗粒水平方向位移固定为 0。

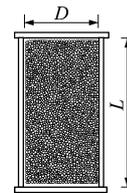


图2 受轴向压缩载荷作用的颗粒方板
Fig.2 Rectangle granular panel under biaxial test

例题采用颗粒单元法^[10]求解, 得到的结果如图3和图4所示。图3中 θ 是接触力矢量与水平方向的夹角。

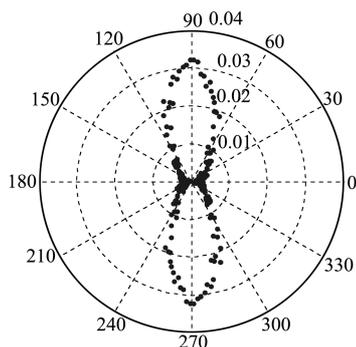


图3 接触力方向角 θ 分布图
Fig. 3 Polar plots of orientation angle θ

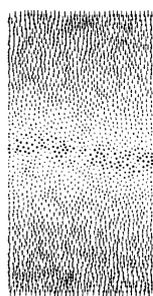


图4 颗粒位移场
Fig. 4 The particle displacement fields

图3和图4显示的数值模拟结果表明,颗粒材料结构内部颗粒间接触力矢量和颗粒位移矢量在压缩载荷施压方向上的分量相对其侧向分量均占统治地位。因此,本文假定颗粒侧向位移为零,并且将传力路线简化为一维能基本反映在具有侧向约束的受压缩荷载作用二维(三维也应类似)颗粒材料结构中的实际情况,并对建立二维(或三维)颗粒材料结构刚度系数表达式起到基础作用。

3 考虑颗粒破碎的结构刚度系数的解析表达式

假设初始未破碎状态下颗粒尺寸分布函数是 $p_0(d)$, 破碎过程完成后,最终状态下颗粒尺寸分布函数是 $p_u(d)$ 。定义 $d_M^0(d_M^u)$ 和 $d_m^0(d_m^u)$ 分别为初始(最终)状态下颗粒的最大和最小尺寸。

$p_u(d)$ 对应的是颗粒材料在极大压力和剪应变作用下,完成一系列破碎过程后的最终状态。Turcotte^[11]通过实验观察得到颗粒最终尺寸分布是分形的结论。

尺寸分形分布的概率密度函数为^[7]

$$p_u(d) = (3 - \alpha) \frac{d^{2-\alpha}}{(d_M^u)^{3-\alpha} - (d_m^u)^{3-\alpha}} \quad (15)$$

式中 α 约等于 2.6^[2]。

定义一个相对破碎参数 $B(d)$ 来表征尺寸为 d

的颗粒的破碎概率。进一步假设破碎概率相对尺寸是独立的,即对各种尺寸,颗粒的破碎概率均相同,即

$$B(d) = B, \quad 0 \leq B \leq 1 \quad (16)$$

从而将当前颗粒尺寸分布 $p(d)$ 表达为初始分布 $p_0(d)$ 和最终分布 $p_u(d)$ 的函数为

$$p(d) = p_0(d)(1 - B) + p_u(d)B \quad (17)$$

将式(17)代入式(14),可得

$$K = \frac{2}{3} HU^{1/2} \left[\frac{1}{L} \frac{\langle d \rangle_0(1 - B) + \langle d \rangle_u B}{\langle d^{-1/3} \rangle_0(1 - B) + \langle d^{-1/3} \rangle_u B} \right]^{3/2} \quad (18)$$

式中符号 $\langle \rangle_0$ 和 $\langle \rangle_u$ 的定义为,对于任意颗粒尺寸 d 的函数 $f(d)$

$$\langle f(d) \rangle_0 = \int_{d_m^0}^{d_M^0} f(d) p_0(d) dd \quad (19)$$

$$\langle f(d) \rangle_u = \int_{d_m^u}^{d_M^u} f(d) p_u(d) dd \quad (20)$$

离散颗粒集合体的破坏除颗粒破碎外,还包含接触颗粒间的接触取向改变或/和丧失等若干机理。各类破坏机理互相耦合,并将导致颗粒材料局部微结构的变化。本文着眼于线性结构刚度系数,做了小变形假定;隐含颗粒材料的局部微结构(包含孔隙度等)不会有显著变化。本文基于 Einav^[7]的工作,考虑颗粒材料破坏仅限于“颗粒破碎”单一破坏机理。颗粒破碎导致离散颗粒集合体所储存的弹性自由能(即刚度)的降低,将保证破碎能量耗散为非负。

4 数值算例

数值实验的目的是验证结构刚度系数 K 预测式(18)的准确性。数值实验考虑了不同的颗粒尺寸分布和相对破碎系数。高度 L 的取值分为 2 m, 5 m 和 10 m 三种情况,颗粒材料参数列入表1。在选择了颗粒尺寸分布和相对破碎系数后,每一种情况采用随机算法生成 15 种颗粒样本。对每一种样本,求解它的刚度系数 K 。15 种颗粒样本的刚度

表1 颗粒材料参数

Tab. 1 Material parameters of the granular material

参数	值
弹性模量(E)	$1 \times 10^6 \text{ N/m}^2$
泊松比(ν)	0.3

系数的平均值为 \bar{K} , 相对标准差为 S , 相对误差为 C 。相对标准差 S 度量的是 15 次数值实验得到 15 个刚度系数偏离平均值的程度。相对误差 C 度量的是式(18)给出的理论预测值 K 相对刚度系数平均值 \bar{K} 的误差。定义如下:

$$\bar{K} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} K^i \quad (21)$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} (K^i - \bar{K})^2 / \bar{K}} \times 100\% \quad (22)$$

$$C = |K - \bar{K}| / \bar{K} \times 100\% \quad (23)$$

式中 K 是根据式(18)计算的结构刚度系数预测值, K^i 为第 i 个样本的结构刚度系数。

4.1 数值实验一

考虑初始状态下, 颗粒尺寸分布为平均分布的情况。此时颗粒未破碎, 所以相对破碎参数 $B = 0$, $d_M^0 = 0.08$ m, $d_m^0 = 0.04$ m。压缩位移 $U = 0.005$ m。计算结果列入表 2。

表 2 数值实验一的计算结果

Tab. 2 Results for numerical experiment 1

	$L=2$	$L=5$	$L=10$
平均值 $\bar{K}/(\text{N/m})$	23.0081	5.6049	1.9666
相对标准差 $S/\%$	0.444	0.202	0.140
相对误差 $C/\%$	5.697	2.068	1.321

4.2 数值实验二

考虑最终状态下, 颗粒尺寸分布为分形分布的情况。此时相对破碎参数 $B = 1$, $d_M^u = 0.08$ m, $d_m^u = 0.02$ m。压缩位移 $U = 0.005$ m。计算结果列入表 3。

表 3 数值实验二的计算结果

Tab. 3 Results for numerical experiment 2

	$L=2$	$L=5$	$L=10$
平均值 $\bar{K}/(\text{N/m})$	12.9620	3.1515	1.0903
相对标准差 $S/\%$	0.795	0.465	0.246
相对误差 $C/\%$	5.351	1.517	0.646

4.3 数值实验三

考虑颗粒破碎过程中, 此时 $B = 0.4$, $d_M^0 = 0.08$ m, $d_m^0 = 0.04$ m, $d_M^u = 0.08$ m, $d_m^u = 0.02$ m。压缩位移 $U = 0.005$ m。计算结果列入表 4。

表 4 数值实验三的计算结果

Tab. 4 Results for numerical experiment 3

	$L=2$	$L=5$	$L=10$
平均值 $\bar{K}/(\text{N/m})$	18.8636	4.5661	1.5749
相对标准差 $S/\%$	0.680	0.365	0.170
相对误差 $C/\%$	10.614	6.580	4.242

从以上三组数值实验的结果可知:

(1) 相对误差随着结构尺寸 L 的增加而减小, 这是因为, 随着 L 的增加, 颗粒数目随之增加, 此时采用随机算法生成的颗粒样本的颗粒尺寸分布趋近于给定的颗粒尺寸分布, 从而使颗粒样本的结构刚度系数趋近于本文提出的根据给定颗粒尺寸分布而计算的结构刚度系数预测值。

(2) 数值实验三中相对误差相比数值实验一, 二较大, 这是因为, 数值实验三中颗粒尺寸分布函数形式最复杂, 它是数值实验一和数值实验二中的颗粒尺寸分布函数的加权求和, 此时采用随机算法生成的颗粒样本的颗粒尺寸分布相比给定的颗粒尺寸分布偏差最大, 从而使颗粒样本的结构刚度系数与理论预测值相差较大。

(3) 三组数值实验中, 相对标准差均很小, 说明针对每一个根据结构尺寸和颗粒尺寸分布而随机生成的颗粒样本计算出的结构刚度系数数值很稳定。

(4) 颗粒破碎对结构刚度系数的影响体现在: 在初始未破碎状态下, 结构的刚度系数最大; 在最终状态下, 结构的刚度系数最小; 在破碎过程中, 结构的刚度系数处于二者之间。

5 结 论

本文针对一维情况下随机排列非均质颗粒材料组成的结构, 推导了该结构的刚度系数的解析表达式。结构刚度系数表达为颗粒尺寸分布、相对破碎参数等细观参数的函数。通过数值实验, 数值结果与本文的理论预测结果的一致性验证了本文所给表达式的有效性。所推导公式为解释离散元法数值结果提供了参考。

参考文献(References):

- [1] Li X, Yu H S, Li X S. Macro-micro relations in granular mechanics [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2009, **46**(25-26): 4331-4341.
- [2] Coop M R, Sorensent K K, Freitas Bodas T, et al. Particle breakage during shearing of a carbonate sand [J]. *Geotechnique*, 2004, **54**(3): 157-163.
- [3] Chang C S. Micromechanical modeling of deformation and failure for granulates with frictional contacts [J]. *Mechanics of Materials*, 1993, **16**(1-2): 13-24.
- [4] Chang C S, Liao C L. Constitutive relation for a particulate medium with the effect of particle rotation

- [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1990, **26**(4):437-453.
- [5] Li X, Liu Q, Zhang J. A micro-macro homogenization approach for discrete particle assembly-Cosserat continuum modeling of granular materials [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2010, **47**(2):291-303.
- [6] Marketos G, Bolton M D. Quantifying the extent of crushing in granular materials: a probability-based predictive method [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(10):2142-2156.
- [7] Einav I. Breakage mechanics (Part I) theory [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2007, **55**(6):1274-1297.
- [8] Johnson K L. *Contact Mechanics* [M]. London: Cambridge University Press, 1985.
- [9] Bagi K. An algorithm to generate random dense arrangements for discrete element simulations of granular assemblies [J]. *Granular Matter*, 2005, **7**(1):31-43.
- [10] Bagi K. A quasi-static numerical model for micro-level analysis of granular assemblies [J]. *Mechanics of Materials*, 1993, **16**(1-2):101-110.
- [11] Turcotte D L. Fractals and fragmentation [J]. *Journal of Geophysical Research: Solid Earth*, 1986, **91**(B2):1921-1926.

An analytical expression of stiffness coefficient for one-dimensional random heterogeneous granular structure

LIANG Yuan-bo, LI Xi-kui*

(State Key Laboratory of Structural Analysis for Industrial Equipment,
Dalian University of Technology, Dalian 116024, China)

Abstract: An analytical expression of stiffness coefficient for one-dimensional structure composed of random heterogeneous granular material is derived. The granular structure is generated by a random sampling algorithm according to grain size probability distribution and sizes of the structure. With the introduction of a relative breakage parameter, grain crushing is quantitatively taken into account by the change in grain size probability distribution function and the relative breakage parameter is then included in the proposed analytical expression. Numerical results demonstrate the validity of the derived analytical expression and exhibit the influence of grain crushing progress on the stiffness coefficient of granular structure.

Key words: granular material structure; random heterogeneous; grain crush; stiffness coefficient