

文章编号: 1000-4750(2014)05-0056-08

功能梯度压电压磁球对称问题的静力响应

时朋朋, 李 星

(宁夏大学数学计算机学院, 宁夏, 银川 750021)

摘 要: 研究径向载荷作用下功能梯度压电压磁空心球壳的空间球对称电磁弹耦合静力学问题。假设压电压磁空心球壳的材料参数沿球厚度方向呈幂函数分布, 在球坐标系下, 由材料的参数方程、本构方程、几何方程和平衡方程导出在外激励作用下空心球壳体的应力、电势、磁势等物理量的解析解。结构内表面材料设为常用 BaTiO₃-CoFeO₄ 复合材料, 分别对球壳内表面受力以及内外表面存在电势差或磁势差的情况进行数值讨论, 分别给出不同梯度参数下结构内部径向应力、环向应力、电势和磁势的分布。结果表明梯度参数的选取对功能梯度压电压磁球壳的性能有很大的影响。

关键词: 功能梯度材料; 压电压磁材料; 球状传感器制动器; 球对称问题; 解析解

中图分类号: O343.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2012.12.0937

STATIC RESPONSE OF A SYMMETRIC SPHERE OF FUNCTIONALLY GRADED PIEZOELECTRIC/PIEZOMAGNETIC MATERIALS

SHI Peng-peng, LI Xing

(School of Mathematics and Computer Science, Ningxia University, Yinchuan, Ningxia 750021, China)

Abstract: A sphere-symmetric problem dealing with a hollow, radially-polarized, piezoelectric/piezomagnetic sphere made of functionally graded (FG) materials is analyzed. Assuming the material properties of the sphere follow a power-law distribution, a closed form solution is derived in spherical coordinates. Numerical results are calculated for a hollow FG piezoelectric/piezomagnetic sphere with an inner surface of BaTiO₃-CoFeO₄ composite, and the distribution of the radial and circumferential stresses as well as the electric potential and magnetic potential are presented graphically under mechanical, electric and magnetic stimuli, respectively. The results indicate that the gradient index strongly affects the stress distribution, electrical, and magnetic response.

Key words: functionally graded materials; piezoelectric/piezomagnetic materials; spherical sensors and actuators; sphere-symmetric problem; analytical solution

基于仿生学概念, 通过集成传感器、信息处理器和功能制动器等构成的新型智能复合材料与结构, 在航空航天、新能源、国防信息化等重点领域发挥着极为关键作用^[1]。智能复合材料与结构通常由基体材料和传感器/制动器部分组成。基体材料起承受载荷的作用, 传感器/制动器部分由具有感知能力的敏感材料构成, 可以感知环境的变化, 如温度、压力、应力、电磁场等, 并将其转换为相应的信号。具有力电转换功能的压电材料, 常常作为智能复合

材料与结构的传感器/制动器设计材料。因此, 压电材料的力学问题得到广泛的关注^[2-6]。特别的, 压电球壳的各类电力以及热耦合行为被广泛的研究。文献[7-8]给出压电材料球对称问题的通解。文献[9-11]讨论各种动态荷载作用下压电薄壁球壳的动态响应。文献[12-13]考虑热荷载对压电空心球壳的电力耦合能力的影响。为满足尖端技术领域对智能元器件性能的要求, 拓展压电材料的使用范围, 改善其性能, 提高其可靠性, 成为智能材料目

收稿日期: 2012-12-05; 修改日期: 2013-02-03

基金项目: 国家自然科学基金项目(51061015, 11362018); 高等学校博士学科点专项科研基金课题项目(博导类, 20116401110002)

通讯作者: 李 星(1964-), 男, 银川人, 教授, 博士, 博导, 中国数学会副理事长, 从事复分析及其在力学中的应用研究(E-mail: li_x@nxu.edu.cn)

作者简介: 时朋朋(1987-), 男, 晋城人, 博士生, 从事智能材料弹性与断裂研究(E-mail: shi_p_p@yeah.net)

前的主要研究方向之一。目前的实践和理论关注将不同的压电、压磁和压电压磁材料结合制备成层状复合材料,以获得灵敏度高、响应速度快、致动位移大的高品质的元件。大量的文献研究了层状压电球壳的电力转换机制^[14-16]。相比单相压电材料,压电压磁材料具有力电/力磁/电磁转换功能、响应速度快等优点,在机械载荷作用下产生正压电、正压磁效应,在电场作用下产生逆压电、正磁电效应,在磁场作用下产生逆压磁、逆磁电效应。压电压磁材料被用来制作如灵敏的电(磁)场探测器以及微机械设备(如硅片上的微米传感器和微米电机)传动器等各种功能元器件的关键部分。文献[17-19]研究均匀压电压磁球壳的力学问题。

此外,作为传统层合材料的发展,功能梯度材料,通过连续改变组元材料的组成比例,形成微观组成和性能呈连续平稳变化的新型非均匀介质材料。特别的,通过对力学性能梯度调整,以期最大限度的缓和由机械行为或电磁场作用所引起的应力不均,从而提高器件的功能性、可靠性和使用寿命。因此,功能梯度这个概念用于智能元件中的制动器和传感器等敏感部件,对智能材料力学性能的优化设计有着重要的理论指导意义^[20]。然而,功能梯度压电以及功能梯度压电压磁球壳的相关研究较少。文献[21]研究了功能梯度压电空心球壳传感器和制动器问题。文献[22]研究了冲击载荷下功能梯度压电压磁空心球壳的电磁力耦合响应。本文进一步讨论功能梯度压电压磁空心球壳作为传感器和制动器的电磁力耦合行为。本文假设压电压磁空心球壳的材料参数沿球厚度方向呈幂函数分布,从材料的参数(梯度)方程、本构方程、几何方程和平衡方程导出在外激励(外表面力以及内外表面存在电势差或磁势差)作用下空心球壳的应力、电势、磁势等物理量的解析解。通过数值算例说明外激励作用下,功能梯度压电压磁空心球壳存在正(逆)压电,正(逆)压磁,以及正(逆)磁电效应。特别的,通过对材料力学性能梯度的调整可以有效的防止由环向压力过大引起的壳体开裂,并使器件的电磁力耦合性能达到最优。

1 基本方程

功能梯度压电压磁空心球壳,取球坐标系 (r, θ, φ) 原点位于球的中心。球壳的内半径为 a ,外半径为 b ,厚度为 $b-a$ 。在球坐标系下,球对称问

题的弹性变形中只有径向位移 $u_r(r)$ 不为零,其余的位移 $u_\theta(r)$ 、 $u_\varphi(r)$ 均为零,且子午圈应力 σ_{99} 和 $\sigma_{\theta\theta}$ 相等^[18]。

沿球厚度极化的球形横观各向同性的功能梯度压电压磁空心球壳,力电磁耦合关系可用如下本构方程来描述^[19]:

$$\sigma_r = c_{33}(r)\varepsilon_r + 2c_{13}(r)\varepsilon_\theta - e_{33}(r)E_r + h_{33}(r)H_r \quad (1)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = c_{13}(r)\varepsilon_r + [c_{11}(r) + c_{12}(r)]\varepsilon_\theta - e_{31}(r)E_r + h_{31}(r)H_r \quad (2)$$

$$D_r = e_{33}(r)\varepsilon_r + 2e_{31}(r)\varepsilon_\theta + \varepsilon_{33}(r)E_r - d_{33}(r)H_r \quad (3)$$

$$B_r = h_{33}(r)\varepsilon_r + 2h_{31}(r)\varepsilon_\theta + d_{33}(r)E_r - \mu_{33}(r)H_r \quad (4)$$

其中: σ_r 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 为径向和环向应力分量; ε_r 、 ε_θ 为径向和环向应变分量; D_r 为径向电位移分量; E_r 为电场; B_r 为磁感应强度。 c_{ij} 、 e_{ij} 、 ε_{33} 、 h_{ij} 、 d_{33} 、 μ_{33} 分别为弹性、压电、介电、压磁、磁电耦合和磁导率系数。对于功能梯度材料,这些材料参数均为球厚度 r 的函数。

尽管众所周知,功能梯度材料材料性能的实际变化形式非常复杂,理论分析中为问题处理方便,常常将材料性能假设为坐标的特定函数。这里,为得到功能梯度压电压磁球壳的静力行为的解析解,假设所有的材料参数均为径向坐标的函数,且以特殊的幂函数梯度变化^[21]:

$$c_{ij}(r) = c_{ij} \left(\frac{r}{a} \right)^\beta, e_{ij}(r) = e_{ij} \left(\frac{r}{a} \right)^\beta, \varepsilon_{ij}(r) = \varepsilon_{ij} \left(\frac{r}{a} \right)^\beta, \\ d_{ij}(r) = d_{ij} \left(\frac{r}{a} \right)^\beta, h_{ij}(r) = h_{ij} \left(\frac{r}{a} \right)^\beta, \mu_{ij}(r) = \mu_{ij} \left(\frac{r}{a} \right)^\beta \quad (5)$$

其中: c_{ij} 、 e_{ij} 、 ε_{33} 、 h_{ij} 、 d_{33} 、 μ_{33} 分别为空心球壳内半径处材料参数; β 是用来描述材料性能梯度变化的参数。

弹性应变和电场以及磁场同弹性径向位移 u_r ,电势 ϕ 和磁势 φ 之间的关系为^[19]:

$$\varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}, E_r = -\frac{d\phi}{dr}, H_r = \frac{d\varphi}{dr} \quad (6)$$

其中: u_r 为径向位移分量; ϕ 为电势; φ 为磁势。

另外,忽略体力和自由电荷作用时,应力分量和电位移和磁感强度分别满足如下的平衡方程,即^[19]:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_{\theta\theta})}{r} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{dD_r}{dr} + \frac{2D_r}{r} = 0, \frac{dB_r}{dr} + \frac{2B_r}{r} = 0 \quad (8)$$

常微分方程组式(1)~式(4)和式(6)~式(8)中共有 11 个方程, 其中有 σ_r 、 $\sigma_{\theta\theta}$ 、 ε_r 、 ε_{θ} 、 D_r 、 E_r 、 H_r 、 B_r 、 u_r 、 ϕ 、 φ 共 11 个未知量。这样, 该问题是封闭的。

2 边界条件

考虑径向极化的功能梯度压电电压磁空心球, 内径和外径分别为 a 和 b , 空心球厚度为 $b-a$ 。对于压电电压磁材料来说, 存在着力学边界条件、电学边界条件和电磁场边界条件。由于应用状态条件的不同, 它们可以处于不同的边界条件。这里考虑, 内外球表面分别承受内压作用的情况(情况 A), 内外球表面存在电势差的情况(情况 B), 以及内外球表面存在磁势差的情况(情况 C)。相应边界条件分别表示如下^[19]:

情况 A:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) = -p, \quad \sigma_r(b) = 0, \quad \phi(a) = 0, \\ \phi(b) = 0, \quad \varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

情况 B:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0, \quad \phi(a) = V, \\ \phi(b) = 0, \quad \varphi(a) = 0, \quad \varphi(b) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

情况 C:

$$\begin{aligned} \sigma_r(a) = 0, \quad \sigma_r(b) = 0, \quad \phi(a) = 0, \\ \phi(b) = 0, \quad \varphi(a) = Q, \quad \varphi(b) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

这里情况 A 对应传感器模型, 即机械能引起电场和磁场的变化, 情况 B 和情况 C 分别对应电场和磁场制动器模型, 即电场激励下引起应力场和磁场的变化, 以及磁场激励下引起应力场和电场的变化。

3 问题通解

由式(8)积分得^[19]:

$$D_r = \frac{a^2 D_0}{r^2}, \quad B_r = \frac{a^2 B_0}{r^2} \quad (12)$$

这里的 B_0 、 D_0 为与 r 无关的未知参数, 最终将通过边界条件式(9)、式(10)或式(11)得到。

由式(12)代入式(3)和式(4)消去 D_r 、 B_r 、 $\frac{d\phi}{dr}$ 、

$\frac{d\varphi}{dr}$ 可用 u_r 及其导数表示:

$$\frac{d\phi}{dr} = s_1 \frac{du_r}{dr} + 2s_2 \frac{u_r}{r} + \frac{d_{33}B_0 - \mu_{33}D_0}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-2} \quad (13)$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = s_3 \frac{du_r}{dr} + 2s_4 \frac{u_r}{r} + \frac{d_{33}D_0 - \varepsilon_{33}B_0}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2} \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-2} \quad (14)$$

将式(13)和式(14)代入式(1)和式(2)得到:

$$\begin{aligned} \sigma_r = \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta} \left[\bar{c}_{33} \frac{du_r}{dr} + 2\bar{c}_{13} \frac{u_r}{r} \right] + \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} (\bar{c}_1^b B_0 + \bar{c}_1^d D_0) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta} \left[\bar{c}_{13}' \frac{du_r}{dr} + (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) \frac{u_r}{r} \right] + \\ \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} (\bar{c}_2^b B_0 + \bar{c}_2^d D_0) \end{aligned} \quad (16)$$

进一步将式(15)和式(16)代入平衡方程式(7)得:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + A \frac{du_r}{r dr} + B \frac{u_r}{r^2} + \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta} \frac{2a^2}{r^3} C = 0 \quad (17)$$

其中表达式 \bar{c}_{33} 、 \bar{c}_{13} 、 \bar{c}_1^b 、 \bar{c}_1^d 、 \bar{c}_{13}' 、 \bar{c}_{11} 、 \bar{c}_{12} 、 \bar{c}_2^b 、 \bar{c}_2^d 、 A 、 B 、 C 、 s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 是材料参数的函数, 表达式见附录。

微分方程式(17)为二阶欧拉方程, 由于其形式的特殊性, 可得到封闭形式的解。

当 $\beta \neq (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) / \bar{c}_{13} - 1$, 通解可表示为:

$$\begin{aligned} u_r = aA_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{k_1} + aC_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2} + \\ a \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-1} (E_0 B_0 + F_0 D_0) \end{aligned} \quad (18)$$

当 $\beta = (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) / \bar{c}_{13} - 1$, 通解可表示为:

$$u_r = aA_0 + aC_0 \left(\frac{r}{a}\right)^{-A-1} - a \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-1} (E_0 B_0 + F_0 D_0) \quad (19)$$

这里有四个与 r 无关的未知参数 A_0 、 B_0 、 C_0 、 D_0 , 最终将通过边界条件式(9)、式(10)或式(11)得到。此外, 式中 a 的引入仅仅是为了下面推导的方便, E_0 、 F_0 、 k_1 、 k_2 为与材料参数相关的常数, 表达式见附录。

绝大部分功能梯度压电电压磁材料中将满足 $\beta \neq (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) / \bar{c}_{13} - 1$, 接下来重点分析这种情况^[21]。将式(18)代入式(13)~式(16), 考虑式(6), 得到:

$$\begin{aligned} \sigma_r = (\alpha_1^b B_0 + \alpha_1^d D_0) \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta+k_1-1} A_0 (\bar{c}_{33} k_1 + \\ 2\bar{c}_{13}) - \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta-k_2-1} C_0 (\bar{c}_{33} k_2 - 2\bar{c}_{13}) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = (\alpha_{\theta}^b B_0 + \alpha_{\theta}^d D_0) \left(\frac{r}{a}\right)^{-2} + \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta+k_1-1} A_0 (\bar{c}_{13}' k_1 + \\ \bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) - \left(\frac{r}{a}\right)^{\beta-k_2-1} C_0 (\bar{c}_{13}' k_2 - \bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$-E_r = \left(\frac{r}{a}\right)^{k_1-1} A_0(s_1k_1 + 2s_2) - \left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2-1} C_0(s_1k_2 - 2s_2) + \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-2} (B_0\alpha_e^b + D_0\alpha_e^d) \quad (22)$$

$$H_r = \left(\frac{r}{a}\right)^{k_1-1} A_0(s_3k_1 + 2s_4) - \left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2-1} C_0(s_3k_2 - 2s_4) + \left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-2} (B_0\alpha_m^b + D_0\alpha_m^d) \quad (23)$$

其中 α_t^b 、 α_t^d 、 α_θ^b 、 α_θ^d 、 α_e^b 、 α_e^d 、 α_m^b 、 α_m^d 为与材料参数相关的常数，表达式见附录。

将式(22)和式(23)进行积分得到电势和磁势表达式。当 $\beta \neq -1$ ，电势和磁势表达式为：

$$\frac{\phi(r) - \phi(a)}{a} = A_0(s_1k_1 + 2s_2) \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k_1} - 1 \right] + C_0(s_1k_2 - 2s_2) \frac{1}{k_2} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2} - 1 \right] - \frac{\alpha_e^b B_0}{\beta + 1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-1} - 1 \right] - \frac{\alpha_e^d D_0}{\beta + 1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-1} - 1 \right] \quad (24)$$

$$\frac{\varphi(r) - \varphi(a)}{a} = -A_0(s_3k_1 + 2s_4) \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k_1} - 1 \right] - C_0(s_3k_2 + 2s_4) \frac{1}{k_2} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2} - 1 \right] + \frac{\alpha_m^b B_0}{\beta + 1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-1} - 1 \right] + \frac{\alpha_m^d D_0}{\beta + 1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-\beta-1} - 1 \right] \quad (25)$$

当 $\beta = -1$ ，电势和磁势表达式为：

$$\frac{\phi(r) - \phi(a)}{a} = A_0(s_1k_1 + 2s_2) \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k_1} - 1 \right] + C_0(s_1k_2 - 2s_2) \frac{1}{k_2} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2} - 1 \right] - \alpha_e^b B_0 \ln \frac{r}{a} - \alpha_e^d D_0 \ln \frac{r}{a} \quad (26)$$

$$\frac{\varphi(r) - \varphi(a)}{a} = -A_0(s_3k_1 + 2s_4) \frac{1}{k_1} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{k_1} - 1 \right] - C_0(s_3k_2 + 2s_4) \frac{1}{k_2} \left[\left(\frac{r}{a}\right)^{-k_2} - 1 \right] + \alpha_m^b B_0 \ln \frac{r}{a} + \alpha_m^d D_0 \ln \frac{r}{a} \quad (27)$$

当 $\beta = (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) / \bar{c}_{13} - 1$ 可进行同样的推演。以上结果针对绝大部分压电压磁材料中遇到的 $\beta \neq (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}) / \bar{c}_{13} - 1$ 推导。这样，当 $\beta \neq -1$ 时，将情况 A、情况 B 或情况 C 给定的边界条件式(9)、

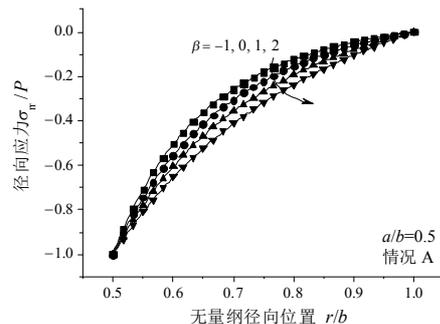
式(10)或式(11)代入得到的表达式(20)、式(24)和式(25)；或当 $\beta = -1$ 时，代入式(20)、式(26)和式(27)，容易得到四个线性方程并求得未知常数 A_0 、 B_0 、 C_0 、 D_0 。 A_0 、 B_0 、 C_0 、 D_0 可以由材料参数和功能梯度参数以及球的几何参数以及边界激励值表示出来。进一步，将求得的 A_0 、 B_0 、 C_0 、 D_0 代入式(20)和式(21)，得到径向应力和环向应力，代入式(22)~式(25)或式(22)、式(23)、式(26)和式(27)得到径向电场和磁场的分布。

4 数值算例

对沿球厚度材料参数呈幂函数梯度分布的功能梯度压电压磁球壳传感器或制动器进行数值计算和分析。球壳内表面材料设为常用 BaTiO₃-CoFeO₄ 复合材料，材料参数见表 1。计算中内外半径比值取为 $a/b = 0.5$ 。当空心球壳作为传感器(情况 A)，设结构受内压作用 $P = c_{33} \times 10^{-4}$ Pa；当空心球壳作为电场制动器(情况 B)，设结构内外表面存在电势差 $V = 100$ V；当空心球壳作为磁场制动器(情况 C)，设结构内外表面存在磁势差 $Q = 100$ C。图 1~图 3 分别给出情况 A、情况 B 和情况 C 情形下空心球壳的电磁力场物理量沿径向的分布规律。值得指出的是，忽略或修改材料的电磁性能对应的一些参数，这里的结果可退化得到功能梯度弹性和功能梯度电弹性空心球壳的解析解^[21]，进一步令梯度参数为 0，可以得到弹性与压电空心球壳的解析解。

表 1 BaTiO₃-CoFeO₄ 复合材料性能参数^[23]
Table 1 Properties of BaTiO₃-CoFeO₄ composite^[23]

材料性能	取值	材料性能	取值
$c_{11}/(\times 10^{10} \text{N/m}^2)$	21.6	$h_{33}/(\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m}))$	350
$c_{12}/(\times 10^{10} \text{N/m}^2)$	22.6	$h_{31}/(\text{N}/(\text{A} \cdot \text{m}))$	290.2
$c_{13}/(\times 10^{10} \text{N/m}^2)$	12.5	$\mu_{33}/(\times 10^{-6} \text{N} \cdot \text{s}^2/\text{C}^2)$	78.5
$c_{33}/(\times 10^{10} \text{N/m}^2)$	21.6	$\epsilon_{33}/(\times 10^{-10} \text{C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2))$	63.5
$e_{31}/(\text{C/m}^2)$	-2.2	$d_{33}/(\times 10^{-10} \text{N} \cdot \text{s}/(\text{VC}))$	7.5
$e_{33}/(\text{C/m}^2)$	9.3		



(a) σ_{rr} / P

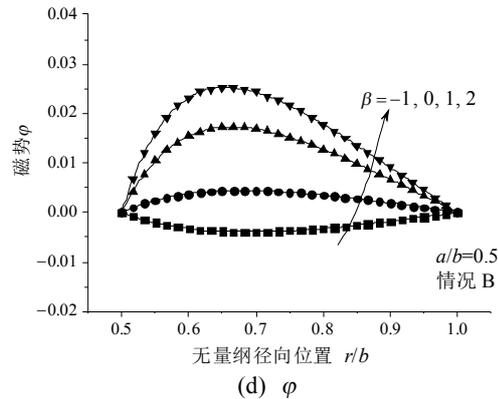
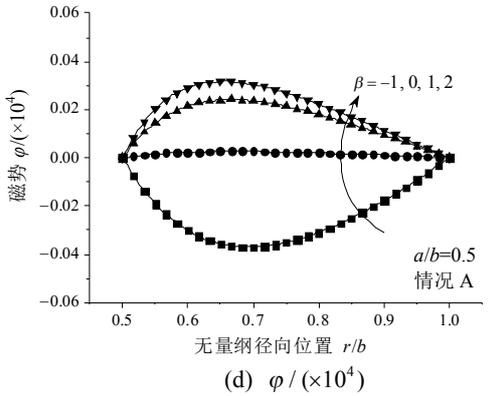
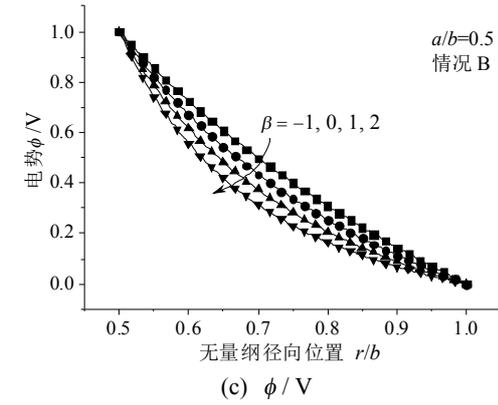
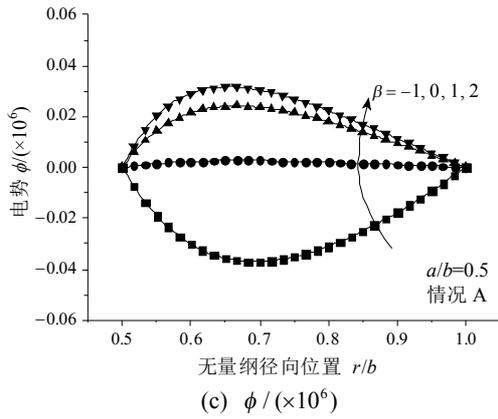
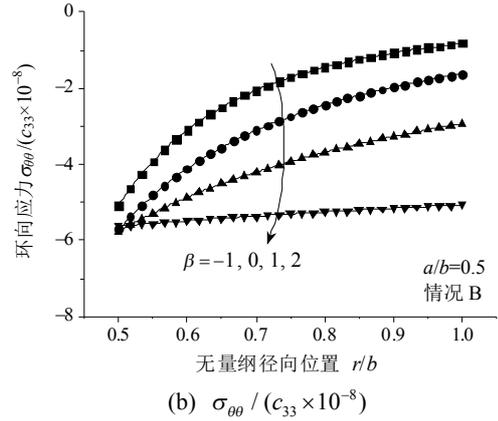
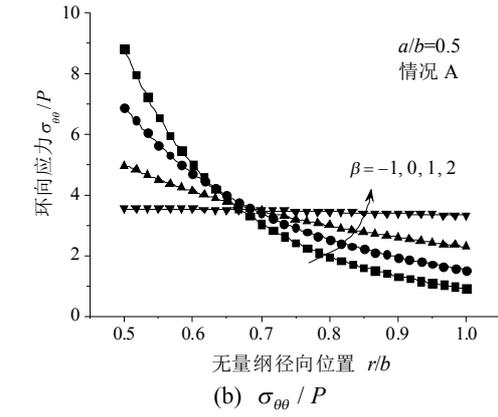
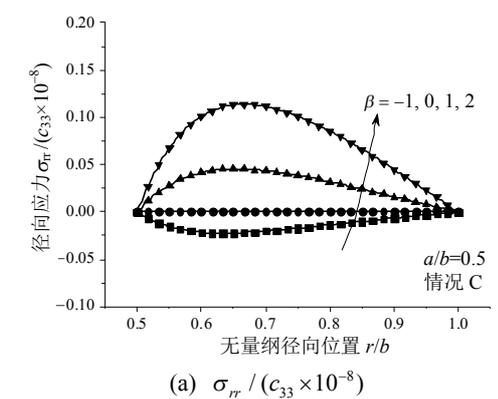
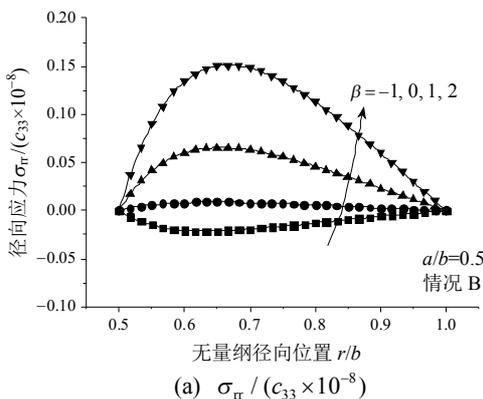


图 1 空心球壳内部受纯机械载荷作用压电电压磁传感器的电磁力响应值沿径向的分布

图 2 空心球壳受电激励作用压电电压磁制动器的电磁力响应值沿径向的分布

Fig.1 Electromagnetoelastic response of hollow spherical sensor subjected to pure pressure at the inner surface (Case A): $P=c_{33} \times 10^{-4} \text{Pa}$, $V=0$, $Q=0$, $a/b=0.5$

Fig.2 Electromagnetoelastic response of hollow spherical actuator subjected to pure electric stimulus at the inner surface (Case B): $q=0$, $V=100$, $Q=0$, $a/b=0.5$



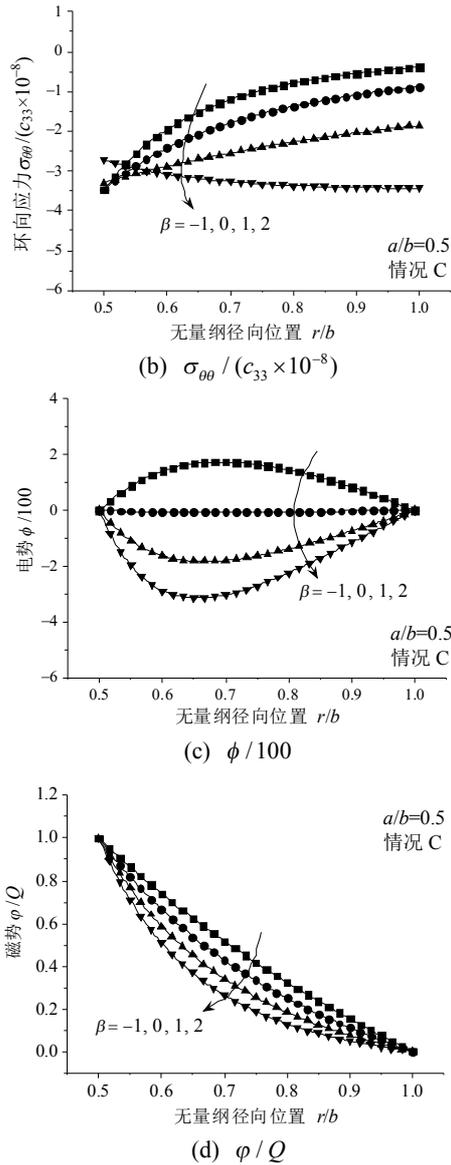


图3 空心球壳受磁激励作用压电压磁制动器的电磁力响应值沿径向的分布

Fig.3 Electromagnetoelastic response of hollow spherical actuator subjected to pure magnetic stimulus at the inner surface (Case C): $q=0, V=0, Q=100, a/b=0.5$

图1给出作为传感器的空心球壳内部受纯机械载荷(情况 A)作用下,空心球壳的径向应力、环向应力、电势和磁势沿径向的分布规律。比较图1(a)和图1(b)发现,传感器球壳中的径向应力要比环向应力小的多,所以这类传感器球壳在径向载荷下的破坏常常是由于环向应力过大引起的。图1(a)可看出,径向应力的绝对值随梯度参数增大而增大。图1(b)看出梯度参数对环向应力影响很大,当 $\beta = -1, 0, 1$ 时,环向应力在内表面上达到最大值,且环向应力的最大值随 β 的变大而降低。当 β 超过某一定值,如 $\beta = 2$,环向应力在球壳内部分布均匀。

这一特征有助于工程师在设计功能梯度压电压磁传感器的时候选择合适的梯度来使结构内的环向应力变化较小,从而避免因过高环向应力而产生开裂。图1(c)和图1(d)看出,压电压磁球壳作为制动器时,内部产生非零电势和非零磁势响应。这些响应是由机械激励产生,容易理解为压电效应和压磁效应的结果。梯度参数对结构的磁电响应的影响在形态上完全一致,这是由于电磁参数在方程的求解过程中的地位是对立的。同时发现,电势比磁势的值在数值上高两个数量级。比较方程式(13)、式(14)的右端,知道这是材料的电学参数和磁学参数的差异造成的。图1(c)和图1(d)看出梯度参数对电磁响应影响很大,当 $\beta = 0$ 时,结构内部的电势和磁势最小,当 $\beta \neq 0$,随着 β 的变大或者变小,结构内部的电势和磁势的绝对值都变大。这表明合适的梯度参数的选取可使压电压磁球壳获得最优的电磁力耦合性能。

图2给出作为制动器的空心球壳内部受到电激励,内外部存在电势差时,空心球壳的径向应力、环向应力、电势和磁势沿径向的分布规律。当压电压磁球壳制动器输入电信号时,图2(a)、图2(b)和图2(d)看出,空心球壳的内部产生了非零的力学响应和非零的磁势响应。这容易理解为是逆压电效应和正磁电效应的结果。比较图2(a)和图2(b)发现,由电信号输入引起的制动器中的径向应力要比环向应力小的多,而且径向应力在结构内部某处达到最大值。径向应力远小于环向应力的事实可以解释为什么在径向电激励下这类制动器球壳的破坏常常是由于环向应力超过其临界值引起的。类似图1(b),图2(b)中依然发现通过调节梯度参数可使环向应力均匀,从而有效的防止因环向应力过大引起的壳体开裂,提高器件的可靠性和使用寿命。图2(c)可以看出结构内部电势随梯度参数的增大而减小。图2(d)可以看出结构内部磁势随梯度参数的增大而增大。图2中的结果都表明梯度参数对此类复合材料的电磁力学性能都有着重要影响。这里的结果与文献[21]中的相关结果保持一致。

图3给出作为制动器的空心球壳内部受到磁激励,内外部存在磁势差时,空心球壳的径向应力、环向应力、电势和磁势沿径向的分布规律。在压电压磁壳的制动器中,当输入磁信号时,图3(a)、图3(b)和图3(c)看出,空心球壳内部产生非零的力学响应和非零电势响应。这容易理解为逆压磁效应

和逆磁电效应的结果。由式(1)~式(4)容易理解电激励与磁激励下,电磁参数在方程的求解过程中的地位是对立的。所以,图 3(a)、图 3(b)、图 3(c)和图 3(d)的结果在形态上分别于图 2(a)、图 2(b)、图 2(d)和图 2(c)一致。图 3 的结果也发现梯度参数的选取可以避免因过高环向应力而产生开裂,同时梯度参数的选取对功能梯度压电压磁球壳的磁电力学性能得获得也起着关键的作用。

5 结论

假设材料参数沿厚度方向呈幂函数形式变化,本文基于电磁弹材料的弹性理论,分析了作为传感器和制动器的功能梯度压电压磁空心球壳在机械载荷、电激励以及磁激励作用下结构内的电磁力多场响应,得到问题的封闭解。本文得到的结果很容易退化到均匀压电压磁空心球壳的解析解^[19],以及功能梯度弹性和功能梯度电弹性空心球壳的解析解^[21]。数值算例部分对在外激励(内表面力以及内外表面存在电势差或磁势差)作用下,实际常用的 BaTiO₃-CoFeO₄ 压电压磁材料作为内表面材料的空心球壳进行计算并绘图。发现当结构内表面材料给定时,通过调节梯度参数可使环向应力均匀,能有效地防止由环向压力过大引起的壳体的开裂,从而提高压电器件的可靠性和使用寿命;而且不同的梯度参数导致压电压磁球壳的电磁力耦合性能差异很大,因此选择合适的梯度参数可使功能梯度压电压磁器件达到其最优的多场耦合性能。本文是单层功能梯度压电压磁球壳的静力学解,进一步可以对多层功能梯度压电压磁球壳的内容讨论。多层球壳研究的重要意义之一在于对材料性能是坐标任意函数功能梯度压电压磁球壳的讨论可以利用多层球壳实现近似解析求解。限于篇幅,多层功能梯度压电压磁球壳的内容在这里不做展开。

参考文献:

- [1] 杜善义. 先进复合材料与航空航天[J]. 复合材料学报, 2007, 24(1): 1—11.
Du Shanyi. Advanced composite materials and aerospace engineering [J]. Acta Materiae Compositae Sinica, 2007, 24(1): 1—11. (in Chinese)
- [2] Ding H J, Chen W Q. Three dimensional problems of piezoelectricity [M]. New York: Nova Science Publishers, 2001: 1—26.
- [3] 舒小平. 正交压电复合材料层板各类边界的解析解[J]. 工程力学, 2013, 30(10): 288—295.

- Shu Xiaoping. Analytical solutions of cross-ply piezoelectric composite laminates with various boundary conditions [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(10): 288—295. (in Chinese)
- [4] 靳静, 马鹏. 压电压磁双层材料界面裂纹断裂特性进一步分析[J]. 工程力学, 2013, 30(6): 327—333.
Jin Jing, Ma Peng. Further analysis for fracture behaviors of an interfacial crack between piezoelectric and piezomagnetic layers [J]. Engineering Mechanics, 2013, 30(6): 327—333. (in Chinese)
- [5] 孔艳平, 刘金喜. 功能梯度压电双材料板中厚度-扭曲波的传播[J]. 工程力学, 2012, 29(7): 24—28, 41.
Kong Yanping, Liu Jinxi. Propagation of thickness-twist waves in a functionally graded piezoelectric bi-material plate [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(7): 24—28, 41. (in Chinese)
- [6] 冯慧, 宋豪鹏, 刘又文, 方棋洪. 压电材料中螺型位错偶极子与圆弧形界面裂纹的电弹干涉效应[J]. 工程力学, 2012, 29(1): 249—256.
Feng Hui, Song Haopeng, Liu Youwen, Fang Qihong. Interaction between a screw dislocation dipole and circular-arc interfacial cracks in piezoelectric solids [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(1): 249—256. (in Chinese)
- [7] 姚林泉, 俞焕然. 压电材料球对称问题的通解[J]. 兰州大学学报(自然科学版), 1998, 34(1): 30—33.
Yao Linquan, Yu Huanran. The general solution of sphere-symmetric problems in piezoelectric material [J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences), 1998, 34(1): 30—33. (in Chinese)
- [8] Ding H J, Wang H M, CHEN W Q. The general solution of spherically isotropic piezoelectric media and its applications [J]. Mechanics Research Communications, 2001, 28(4): 389—396.
- [9] Chen W Q, Ding H J. Exact static analysis of a rotating piezoelectric spherical shell [J]. Acta Mechanica Sinica, 1998, 14(3): 257—265.
- [10] 丁皓江, 陈伟球, 徐荣桥. 压电板壳自由振动的三维精确分析[J]. 力学季刊, 2001, 22(1): 1—9.
Ding Haojiang, Chen Weiqiu, Xu Rongqiao. Three-dimensional exact analyses of free vibrations for piezoelectric plates and shells [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2001, 22(1): 1—9. (in Chinese)
- [11] Li H Y, Liu Z X, Lin Q R. Spherical-symmetric steady-state response of piezoelectric spherical shell under external excitation [J]. Archive of Applied Mechanics, 2000, 21(8): 947—956.
- [12] 舒小平. 球壳与柱壳之功能梯度压电涂层的热效应分析[J]. 中国机械工程, 2011, 22(24): 95—102.
Shu Xiaoping. Thermal response of functionally graded piezoelectric coatings on sphere and cylinder shells [J]. China Mechanical Engineering, 2011, 22(24): 95—102. (in Chinese)

[13] Saadatfar M, Rastgoo A. Stress in piezoelectric hollow sphere with thermal gradient [J]. Journal of Mechanical Science and Technology, 2008, 22(8): 1450—1467.

[14] Heyliger P, Wu Y C. Electroelastic fields in layered piezoelectric spheres [J]. International Journal of Engineering Science, 1999, 37(2): 143—161.

[15] Chen W Q, Ding H J, Xu R Q. Three-dimensional static analysis of multi-layered piezoelectric hollow spheres via the state space method [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001, 38(28): 4921—4936.

[16] Dai H L, Wang X. Stress wave propagation in laminated piezoelectric spherical shells under thermal shock and electric excitation [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2005, 24(2): 263—276.

[17] Wang X, Zhong Z. The general solution of spherically isotropic magneto-electroelastic media and its applications [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2003, 22(6): 953—969.

[18] 关群, 王建国, 陶玲. 压电压磁球对称问题振动分析 [J]. 兰州大学学报(自然科学版), 2008, 44(6): 127—130.
Guan Qun, Wang Jianguo, Tao Ling. Analysis of piezoelectric-magnetic material vibration in the spherical symmetry [J]. Journal of Lanzhou University (Natural Sciences), 2008, 44(6): 127—130. (in Chinese)

[19] 关群, 何顺荣. 压电、压磁材料球对称问题的通解[J].

固体力学学报, 2004, 25(3): 331—334.
Guan Qun, He Shunrong. The General solution of sphere symmetric problems in piezoelectric piezomagnetic and elastic media [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2004, 25(3): 331—334. (in Chinese)

[20] 仲政, 吴林志, 陈伟球. 功能梯度材料与结构的若干力学问题研究进展[J]. 力学进展, 2010, 40(5): 528—541.
Zhong Zheng, Wu Linzhi, Chen Weiqiu. Progress in the study on mechanics problems of functionally graded materials and structures [J]. Advances in Mechanics, 2010, 40(5): 528—541. (in Chinese)

[21] Li X F, Peng X L, Lee K Y. The static response of functionally graded radially polarized piezoelectric spherical shells as sensors and actuators [J]. Smart Materials and Structures, 2010, 19(3): 035010-1—035010-10.

[22] Wang H M, Ding H J. Spherically symmetric transient responses of functionally graded magneto-electro-elastic hollow sphere [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2006, 25(6): 525—542.

[23] Wang B L, Mai Y W. Applicability of the crack-face electromagnetic boundary conditions for fracture of magneto-electroelastic materials [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44(2): 387—398.

附录:

$$s_1 = \frac{e_{33}\mu_{33} - h_{33}d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2}, \quad s_2 = \frac{e_{31}\mu_{33} - h_{31}d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$s_3 = \frac{h_{33}\varepsilon_{33} - e_{33}d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2}, \quad s_4 = \frac{h_{31}\varepsilon_{33} - e_{31}d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$\bar{c}_1^b = \frac{e_{33}d_{33} - h_{33}\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2}, \quad \bar{c}_1^d = \frac{h_{33}d_{33} - e_{33}\mu_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$\bar{c}_2^b = \frac{e_{31}d_{33} - h_{31}\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2}, \quad \bar{c}_2^d = \frac{h_{31}d_{33} - e_{31}\mu_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$\bar{c}_{33} = c_{33} + c_{33}s_1 + h_{33}s_3, \quad \bar{c}_{13} = c_{13} + c_{33}s_2 + h_{33}s_4,$$

$$\bar{c}_{13}^r = c_{13} + c_{31}s_1 + h_{31}s_3, \quad \bar{c}_{11} = c_{13} + c_{31}s_2 + h_{31}s_4,$$

$$\bar{c}_{12} = c_{12} + c_{31}s_2 + h_{31}s_4,$$

$$A = \frac{2\bar{c}_{13} - 2\bar{c}_{13}^r + (\beta + 2)\bar{c}_{33}}{\bar{c}_{33}}, \quad B = \frac{2[(\beta + 1)\bar{c}_{13} - \bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}]}{\bar{c}_{33}},$$

$$C = -\left(\frac{\bar{c}_2^b}{\bar{c}_{33}}B_0 + \frac{\bar{c}_2^d}{\bar{c}_{33}}D_0\right),$$

$$k_1 = \frac{1 - A + \sqrt{(A-1)^2 - 4B}}{2}, \quad -k_2 = \frac{1 - A - \sqrt{(A-1)^2 - 4B}}{2}$$

$$\beta \neq \frac{\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}}{\bar{c}_{13}} - 1: E_0 = -\frac{1}{2} \frac{\bar{c}_2^b}{\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} - (\beta + 1)\bar{c}_{13}^r},$$

$$F_0 = -\frac{1}{2} \frac{\bar{c}_2^d}{\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12} - (\beta + 1)\bar{c}_{13}^r},$$

$$\beta = \frac{\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12}}{\bar{c}_{13}} - 1: E_0 = -\frac{2\bar{c}_2^b}{(1 + \beta)(-2\bar{c}_{13} + 2\bar{c}_{13}^r)},$$

$$F_0 = -\frac{2\bar{c}_2^d}{(1 + \beta)(-2\bar{c}_{13} + 2\bar{c}_{13}^r)},$$

$$\alpha_t^b = -\bar{c}_{33}(\beta + 1)E_0 + 2\bar{c}_{13}E_0 + \bar{c}_1^b,$$

$$\alpha_t^d = -\bar{c}_{33}(\beta + 1)F_0 + 2\bar{c}_{13}F_0 + \bar{c}_1^d,$$

$$\alpha_\theta^b = -\bar{c}_{13}^r(\beta + 1)E_0 + (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})E_0 + \bar{c}_2^b,$$

$$\alpha_\theta^d = -\bar{c}_{13}^r(\beta + 1)F_0 + (\bar{c}_{11} + \bar{c}_{12})F_0 + \bar{c}_2^d,$$

$$\alpha_c^b = -s_1(\beta + 1)E_0 + 2s_2E_0 + \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$\alpha_c^d = -s_1(\beta + 1)F_0 + 2s_2F_0 + \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$\alpha_m^b = -s_3(\beta + 1)E_0 + 2s_4E_0 - \frac{\varepsilon_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2},$$

$$\alpha_m^d = -s_3(\beta + 1)F_0 + 2s_4F_0 + \frac{d_{33}}{\varepsilon_{33}\mu_{33} - d_{33}^2}.$$