

文章编号: 1000-4750(2014)06-0042-11

# 梁杆结构几何非线性有限元的数值实现方法

陈政清

(湖南大学土木工程学院, 长沙 410082)

**摘 要:** 梁杆结构几何非线性有限元方法主要包括两个部分, 建立虚功方程和实现数值求解。该文运用对比方法, 分析了采用 UL 型增量理论的梁杆结构几何非线性有限元法求解过程与连续体求解过程的主要不同点, 特别是论述了确定加载步末的内力状态的重要性的方法。

**关键词:** 梁杆结构; 几何非线性; 有限元法; 增量法; 非线性分析;

中图分类号: TU375.1 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.05.ST08

## NUMERICAL IMPLEMENTATION OF GEOMETRICALLY NONLINEAR FINITE ELEMENT METHOD FOR BEAM STRUCTURES

CHEN Zheng-qing

(College of Civil Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

**Abstract:** The geometrically nonlinear finite element method for beam structures consists of two parts: the development of virtual work equations and the corresponding numerical implementation. In this study, the solution procedure of the geometrically nonlinear finite element analysis using the Updated Lagrangian (UL) incremental approach for beam structures and three-dimensional continuum is presented, and major differences in the solution process are identified. Particularly, emphasis has been placed on the importance and the methodology of determining internal forces at the end of each load step.

**Key words:** beam structures; geometric nonlinear; finite element method; incremental method; nonlinear analysis

大跨度的梁杆索结构的施工过程以及使用寿命内在特殊荷载(如台风、地震)作用下的变形与内力都具有明显的几何非线性特性, 需要精确的几何非线性分析方法。长期以来, 梁杆索结构几何非线性问题的研究都是分门别类, 逐问题地加以研究解决。例如, 研究压弯杆件导致梁柱理论、研究悬索桥面内荷载导致挠度理论等。研究的方法也往往随具体问题而变, 无一定法则可循。20 世纪 80 年代末, 计算力学总结出了完善的连续体三维虚功增量方程。利用它可以导出连续体任何一种非线性单元模式, 并建立相应的增量求解方法。对于梁、板、壳等这一类以中线或者中面广义位移为未知量的结构单元, 只要建立结构质点位移与广义位移的

转换矩阵, 并将它代入连续体的三维虚功增量方程, 引入相应的变形假定(如梁截面变形的直线假定)可以使虚功方程的三维积分降维, 最终导出以广义位移为未知量的虚功方程。经有限元离散后, 可编程实现数值计算。1979 年 Bathe 等<sup>[1]</sup>提出了应用三维虚功增量方程建立三维梁结构的大位移问题的 UL 型增量有限元分析方法。Bathe 建立的有限元平衡方程仍然是三维积分形式, 需要通过三维数值积分计算梁单元刚度矩阵, 输出结果是积分点应力, 而不是梁截面内力, 因此只能适用矩形截面和圆(环)形截面组成的梁结构。在计算效率和适用范围上都无法满足工程实用要求。1989 年, 作者发现 Bathe 方法没有注意到空间梁结构的广义位移本质上是一

收稿日期: 2013-05-01; 修改日期: 2014-03-06

基金项目: 国家自然科学基金项目(91215302)

作者简介: 陈政清(1947—), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士, 湖南大学风工程研究中心主任, 主要从事结构振动与控制研究(E-mail: zqchen@hnu.edu.cn).

维的。依据梁的这一特点,作者从三维虚功增量方程出发,推出了适用梁结构大位移分析的一维虚功增量方程,进而由它建立起了一套完整的三维梁杆结构几何非线性分析算法,仍然满足严格的几何非线性理论要求。与 Bathe 方法相比,新方法可完全消除数值积分,计算效率是不言而喻的,并且在计算格式上与已有的三维梁结构线性有限元程序完全一致,直接计算截面内力,从而可应用于任何复杂截面的实际工程结构。由于新方法直接计算出结构设计人员需要的梁截面内力弯矩,因此这一方法当时命名为空间杆系结构大挠度问题内力分析方法,并于 1992 年在《土木工程学报》发表<sup>[2]</sup>,经过改进后 1993 年在《Computers and Structures》上发表<sup>[3]</sup>。作者据此方法编制的 NACS 程序从 1990 年开始至今,已直接应用于自我国第一座悬索桥以来多个悬索桥、斜拉桥的工程计算。后来,杨孟刚与陈政清又进一步将上述方法扩展到索结构,提出了两种曲线索单元的非线性分析方法并开发了计算程序,论文于 2003 年分别发表在《工程力学》<sup>[4]</sup>与《土木工程学报》<sup>[5]</sup>上。作者后来发现, Wen R K 等<sup>[6]</sup>、Yang Y B 等<sup>[7]</sup>、Spillers W R<sup>[8]</sup>等也在 1980 年代建立了类似的方法。2002 年以来, Yang Y B 等<sup>[9-10]</sup>又提出了直接由梁元的大旋转特性导出非线性平衡方程的方法。近年来,有学者提出了通过强迫单元服从梁壳结构变形的假定直接由多个连续体单元的结合建立梁壳结构非线性单元的方法,称为 CB 梁单元和 CB 壳单元,可见庄茁翻译的文献[11]。

梁杆索结构几何非线性有限元方法主要包括两个部分:

1) 建立虚功方程。将以质点位移为基本未知量的虚功方程转化为以广义位移为基本未知量的并按广义坐标积分的虚功方程,以梁元为例,要转化为以梁截面的位移与转角为未知量的沿梁的中性轴积分的虚功方程;

2) 实现数值求解。其中的关键步骤是确定加载步末的几何与内力状态。由于广义内力至今没有严格的变形前后转换关系式,因此确定加载步末的精确内力状态只能通过平衡迭代来实现,需要设计比连续体大变形分析更为复杂的增量法求解过程。此外,在大旋转条件下跟踪单元局部坐标系在三维空间的变化也比线性小变形分析复杂,要在每个加载步求解过程中应用欧勒角理论处理。因此,梁杆结构几何非线性有限元的实现要难于三维弹性体几

何非线性有限元。在有限元发展史上,梁杆结构小变形的线性分析是最先实现的,但大变形的非线性分析反而在三维连续体之后,也许原因正在这里。现已发表的关于梁杆结构几何非线性分析的学术论文,很少或没有论述数值实现方法,难以指导开发相应的计算软件。

梁杆索结构都适合运用 UL 型增量理论,本文运用对比方法,分析了采用 UL 型增量理论的梁杆结构几何非线性有限元法求解过程与连续体求解过程的主要不同点,特别是论述了确定加载步末的内力状态的重要性的方法。

## 1 连续体几何非线性有限元及其数值实现方法

### 1.1 连续体大变形的有限元增量平衡方程

连续体大变形问题的求解一般采用增量方法。连续体大变形的有限元增量平衡方程的推导需要张量的字母下标记法和连续介质力学的知识,本文不加证明的介绍基本推导过程,需要了解的读者可以参考文献[12]。

如图 1 所示,一个连续体在已知体力荷载  $\bar{b}_j$  和面力荷载  $\bar{p}_j$  作用下经历如下的大变形过程:

$\Omega(0), \Omega(1), \mathbf{L}, \Omega(N), \Omega(N+1), \mathbf{L}, \Omega(f)$

设  $0, t, t+\Delta t$  分别表示  $W(0), W(N)$  和  $W(N+1)$  状态所对应的时刻,并用左下标表示参考状态,左上标表示当前状态。例如,  ${}^t_0 u_i$  表示以  $W(0)$  为参考时,  $W(N)$  状态的位移;  ${}^{t+\Delta t} T^{ij}$  表示以  $W(0)$  状态为参考的在  $W(N+1)$  状态的 Kirchhoff 应力。相对于同一个固定的空间坐标系,变形体在  $W(0), W(N)$  和  $W(N+1)$  状态下所对应的空间与边界分别为  $V_0$  与  $S_0, V_t$  与  $S_t, V_{t+\Delta t}$  与  $S_{t+\Delta t}$ 。

以  $W(N)$  状态为参考时,变形体在  $t+\Delta t$  时刻的克西霍夫应力为:

$${}^{t+\Delta t} T^{ij} = {}^t S_{ij} + \Delta^* T^{ij} \quad (1)$$

而它在  $t+\Delta t$  时刻柯西应变就等于其增量:

$${}^{t+\Delta t} E_{ij} = \Delta^* E_{ij} \quad (2)$$

式中,  $\Delta^* E_{ij}$  为:

$$\Delta^* E_{ij} = \Delta^* e_{ij} + \Delta^* h_{ij} \quad (3)$$

$$\Delta^* e_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) \quad (4)$$

$$\Delta^* h_{ij} = \frac{1}{2} \Delta u_{k,i} \Delta u_{k,j} \quad (5)$$

仍然假定变形体的应变增量是小应变, 应力-应变增量关系可以记为:

$$\Delta^* T^{ij} = C'_{ijkl} \Delta^* e_{kl} \quad (6)$$

将以上关系代入虚功原理可以导出 UL 法的三维虚功增量方程如下:

$$A'_1 + A'_2 = A'_3 - A'_4 \quad (7)$$

式中:

$$A'_1 = \int_{V_t} C_{ijkl} \Delta^* e_{kl} \delta \Delta^* e_{ij} dv_t \quad (8)$$

$$A'_2 = \int_{V_t} {}^t s_{ij} \delta \Delta^* h_{ij} dv_t \quad (9)$$

$$A'_3 = {}^{t+\Delta t} P \quad (10)$$

$$A'_4 = \int_{V_t} {}^t s_{ij} \delta \Delta^* e_{ij} dv_t \quad (11)$$

在有限元离散中,  $A'_1$  导出线性刚度矩阵  $\mathbf{K}_0$ ,  $A'_2$  导出初应力阵或称几何刚度矩阵  $\mathbf{K}_s$ ,  $A'_3$  是  $W(N+1)$  状态外力虚功,  $A'_3 - A'_4$  仍是荷载增量与不平衡荷载的虚功之和。在 UL 法中, 每一步的参考状态都要改变, 包括了每个变量的当前坐标改变和积分域改变, 因为式(7)中的积分与微分都是对  $W(N)$  状态的空间坐标  $X_i$  (它也是  $W(N+1)$  状态的物质坐标) 进行的。

任何线性有限元使用的单元模式都可以用来构建非线性有限元方程, 例如图 2 所示的最简单的 12 个自由度的 4 面体单元, 它有 4 个节点, 每个节点有三个位移自由度。一般地, 设块体单元内的位移增量  $\Delta u_i$  由单元插值函数  $f_{ia}$  和节点位移增量  $\Delta q_a$  表示为:

$$\Delta u_i = \sum_{a=1}^n f_{ia} \Delta q_a \quad (12)$$

式中:  $n$  为单元节点位移自由度总数, 例如 4 面体单元  $n=12$ , 以后我们用下标  $a$  和  $b$  分别表示节点位移增量  $\Delta q_a$  和它的变分  $\delta \Delta q_b$  的序号, 他们在 1 到  $n$  以内变化, 并且用求和符号表明对  $a$  和  $b$  的求和过程, 如式(12)所示; 用下标  $i, j, k, l$  表示  $W(N)$  状态的空间坐标  $X_i$  序号, 他们的变化范围为 1~3, 并且仍然使用哑标求和的约定。

现在将式(12)代入式(7)中各项, 经过一些基本的数学运算后, 得到如下的单元有限元变分方程:

$$\sum_{b=1}^n \delta \Delta q_b \sum_{a=1}^n (k_{ab}^0 + k_{ab}^G) \Delta q_a = \sum_{b=1}^n \delta \Delta q_b (P_b - y_b) \quad (13)$$

然后由变分引理, 基于变分  $\delta \Delta q_b$  的任意性, 得到单元有限元平衡方程:

$$[{}^t \mathbf{k}_{ab}^E + {}^t \mathbf{k}_{ab}^G] \{\Delta q_a\} = \{{}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_b - {}^t \mathbf{y}_b\} \quad (14)$$

式中各项分别为:

$${}^t \mathbf{k}_{ab}^E = \iiint_{V_t} C_{ijkl} f_{ia,k} f_{jb,l} dv_t \quad (15)$$

$${}^t \mathbf{k}_{ab}^G = \iiint_{V_t} {}^t s_{ij} f_{ka,i} f_{kb,j} dv_t \quad (16)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_b = \iiint_{V_t} {}^{t+\Delta t} \bar{b}_k f_{kb} dv_t + \iint_{S_t} {}^{t+\Delta t} \bar{p}_k ds_t \quad (17)$$

$${}^t \mathbf{y}_b = \iiint_{V_t} {}^t s_{ij} f_{ib,j} dv_t \quad (18)$$

式中特别用重积分符号强调了计算每个元素的积分区域, 用左上标表明了他们所处的状态(时刻), 所有变量都以  $W(N)$  状态为参考。以上诸式中,  $\mathbf{k}_{ab}^E$  称为弹性刚度矩阵,  $\mathbf{k}_{ab}^G$  称为几何刚度矩阵或应力刚度矩阵,  $\mathbf{P}_b$  称为节点等效荷载向量,  $\mathbf{y}_b$  是节点等效内力向量,  $\{{}^{t+\Delta t} \mathbf{P}_b - {}^t \mathbf{y}_b\}$  也正好是  $\Omega(N)$  状态到  $W(N+1)$  的荷载增量和  $W(N)$  状态的不平衡力的和。

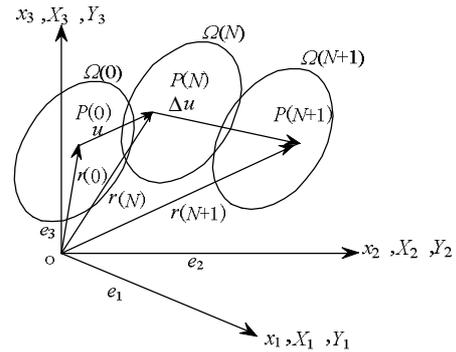


图 1 连续体的有限变形过程

Fig.1 Finite deformation process of continuum

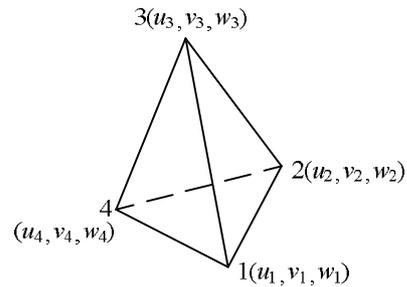


图 2 四面体单元

Fig.2 Tetrahedral element

## 1.2 弹性体非线性有限元 UL 型增量法的求解过程

非线性有限元增量方程的推导过程与涉及的基本理论虽然比较复杂, 但最后得到的方程形式上比较简单, 与线性有限元相比, 只多了一个几何刚度矩阵和不平衡力的计算(等于本加载步末的节点等效总荷载减去本加载步初的节点等效内力)。但

是,非线性有限元增量法求解过程要比小变形线性问题的求解过程复杂得多,处理不当,就得不到良好的计算精度,甚至得不到计算结果。依据作者的经验,这一点对梁杆结构的非线性分析更是具有决定成败的意义。为了给读者提供一个对比学习的方法,帮助读者更好的注意和理解下一节梁杆结构几何非线性分析的主要特点和难点,表1列出了弹性体非线性有限元的一个基本的求解过程,全部过程分为12个工作步,并对与线性有限元不同的地方给出注释,凡是没有注释的工作步,表示与线性分析相同,例如单元插值函数 $f_{ia}$ 及其微分的计算可以参考线性有限元分析的书籍。

表1的第8工作步是更新加载步末的应力状态,它也是下一加载步的初始应力状态,在整个计算过程中有十分重要的作用。按式(6)计算出克希霍夫应力增量 $\Delta^*T^{ij}$ 以后,按式(1)直接与 $t$ 时刻应力叠加得到的是 $t+\Delta t$ 时刻的克希霍夫应力,它是相对于物质坐标系的应力,必须将它转换为相对于固定不变的空间坐标系的柯西应力后才真正完成了应力状态的更新。连续介质的有限变形理论已经给出了如下转换公式:

$$\Delta s_{ij} = \Delta^*T^{ij} + s_{im}\Delta w_{jm} + s_{jm}\Delta w_{im} - s_{ij}\Delta D_{kk} + s_{im}\Delta D_{jm} + s_{jm}\Delta D_{im} \quad (19)$$

表1 弹性体非线性有限元 UL 型增量法的求解过程

Table 1 Solution procedure of nonlinear finite element of elastic body using the incremental UL method

序号	工作内容	注释
1	输入弹性体单元划分的几何信息和材料参数,弹性体的位移边界条件。	
2	建立弹性体的初始状态 $W(0)$ 。	需要开设节点位移数组和积分点应力数组,保存弹性体的当前状态的节点位移和单元积分点应力并在每个加载步末更新。如果初始状态是零应力和零位移状态,这些数组初值赋零。如果要处理初始位移或初应力问题,则需要设立初始状态的输入或自动生成模块。在后续加载步的求解中,应将初始状态应力处理成已平衡状态,否则会产生人为的初始不平衡力。为此,本工作步内要计算出初始状态的节点等效内力向量 ${}^0y$ 并另开专门数组保存,供第5步使用。
3	输入增量法求解的基本控制参数,如总的加载步数 $N_z$ ,平衡迭代的精度控制参数 $e_{jd}$ 和最多迭代次数 $K_{dd}$ ,进入加载步循环求解过程,由已知的 $W(N)$ 状态计算确定本步末的 $W(N+1)$ 状态。	依据问题非线性程度设计增量法参数。如变形不是很大,也可设 $N_z=1$ ,即一步加载完成计算。平衡迭代次数 $K_{dd}$ 如设为1,即是不进行步内平衡迭代。
4	读入荷载信息,按式(17)计算至本步末的外荷载 ${}^{t+\Delta t}P_b$ 。	如果是等步长加载,那么第 $N$ 步末的荷载: ${}^{t+\Delta t}P_b = \frac{N}{N_z} F P_b$ , 式中 $F P_b$ 是弹性体最后状态的节点等效荷载向量
5	计算本加载步内的实际加载增量 $\Delta P_b$ ,即计算式(14)的右端项。	先计算本加载步开始时的节点等效内力向量 ${}^t y_b$ ,如果初始应力为0,完全按式(14)的右端计算 $\Delta P_b$ 。如果初始应力不为零,应按下式计算 $\Delta P_b$ , $\Delta P_b = \{ {}^{t+\Delta t} P_b \} - \{ {}^t y_b - {}^0 y_b \}$ ,式中减去了初始应力的节点等效内力向量,从而保证了初始状态是一个完全平衡状态。

式中的变形增量 $\Delta D_{ij}$ 和旋转增量 $\Delta w_{ij}$ 可以由位移增量的微分计算。然后按柯西应力的定义有:

$${}^{t+\Delta t} s_{ij} = {}^t s_{ij} + \Delta s_{ij}$$

至此完成了应力状态的更新。

从表1描述的弹性体几何非线性 UL 型增量有限元求解过程可以看出,第8工作步严格依据有限变形理论计算了单元在加载步末的应力状态,不仅有本加载步应变增量产生的应力增量,而且通过应力增量转换公式式(19),在变形后的空间坐标系上,计入了加载步开始时已有的应力因单元旋转和变形应作的修正。由于整个求解过程的每一步都有严格的理论依据,在第10工作步计算的第一次不平衡荷载 $\Delta P_b^{(1)}$ 只是由加载步内用切线刚度矩阵近似理论上本应是沿加载曲线不断变化的刚度矩阵产生,即常说的“以直代曲”误差。据作者的经验,如果沿加载路径合适地选取加载步长,每步的不平衡荷载会很小,可直接在第5工作步将它计入下一加载步的荷载增量中,而不需要采用步内平衡迭代计算。在下一节我们将看到,梁杆结构几何非线性分析的数值求解过程中,难以实现第8工作步那样严格的应力转换,因此平衡迭代就变得十分重要。

(续表)

序号	工作内容	注释
6	对全部单元循环。由三维数值积分计算单元刚度矩阵, 组集总体坐标的切线刚度矩阵并处理位移边界条件。	与线性分析的差别是: 1) 要按式(16)计算单元局部坐标下的几何刚度矩阵并按式(14)合并成单元切线刚度矩阵。按式(16)计算时, 积分点上 $t$ 时刻的应力已由第 2 步或第 8 步保存在应力状态数组上。 2) 数值积分时, 单元节点当前坐标为初始状态的节点坐标加上当前已知的节点位移。
7	解线性方程组(14)得到总体坐标下的节点位移增量 $\Delta u_b$ 。	如果弹性体失去稳定, 本工作步会出现总刚度矩阵不正定的情况, 属正常现象。 积分点上应力计算与转换过程要点: 1) 按式(3)计算积分点格林应变增量 $\Delta^* T^{ij}$ , 计算变形增量 $\Delta D_{ij}$ 和旋转增量 $\Delta W_{ij}$ ;
8	对全部单元循环。由 $\Delta u_b$ 获取单元节点位移增量, 计算单元积分点上 Kirchhoff 应力增量并转换为 Cauchy 应力增量, 在应力状态数组中更新积分点应力, 得到 $W^{(N+1)}$ 状态应力 ${}^{t+\Delta t} s_{ij}$ 。	2) 按式(6)计算 Kirchhoff 应力增量 $\Delta^* T^{ij}$ ; 3) 按式(19)转换为 Cauchy 应力增量 $\Delta s_{ij}$ ; 4) 按定义得到 ${}^{t+\Delta t} s_{ij} = {}^t s_{ij} + \Delta s_{ij}$ 。
9	对全部节点自由度循环, 计算本步末的节点总位移 ${}^{t+\Delta t} u_i$ 并更新节点位移数组。	本步的计算与线性分析计算积分点应力有很大不同, 反映了大变形问题的特点。 每个自由度的计算公式为 ${}^{t+\Delta t} u_i = {}^t u_i + \Delta u_i$ 。 更新位移也就是更新了单元节点坐标, 参见第 6 工作步的注释。 第一次不平衡荷载 $\Delta P_b^{(1)}$ 的计算公式为: $D_b^{(1)} = \{ {}^{t+\Delta t} P_b \} - \{ {}^{t+\Delta t} y_b^{(1)} - {}^0 y_b \}$ (a)
10	计算本步末的不平衡荷载 $\Delta P_b^{(1)}$ , 检查它的相对范数 $\ \Delta P\  < e_{jd}$ (第 3 步设定的迭代精度指标) 是否成立, 转到第 10 步, 否则进行本步内的平衡迭代, 直到迭代精度满足, 如到达最多迭代次数仍不满足, 则强迫进入下一步并输出提示信息。	$\{\Delta P_b^{(1)}\}$ 的相对范数按下式计算: $\ \Delta P\  = \left( \sum_{b=1}^n (\Delta P_b^{(1)})^2 \right) / \left( \sum_{b=1}^n (\Delta P_b)^2 \right)$ 每一次平衡迭代过程都是重复第 6 步~第 10 步, 第 $k$ 次迭代时, 第 7 步的方程右端项不是第 5 步的 $\Delta P_b$ , 而是第 $k$ 次迭代的不平衡荷载向量 ${}^{t+\Delta t} P_b^{(k)}$ , 本注释中的式(a)是 $k=1$ 时 ${}^{t+\Delta t} P_b^{(k)}$ 的计算式, 以后迭代过程的不平衡力计算可类推。平衡迭代的原理在下一章介绍。
11	输出本加载步末的位移, 应力, 回到第 4 步, 进入下一加载步计算, 本步末的位移和应力成为下一加载步的已知初始状态。	
12	全部加载步计算完成, 分析结束。	

## 2 空间梁杆结构非线性有限元方程及其数值实现方法

### 2.1 空间梁杆结构非线性有限元平衡方程

由三维连续体的虚功增量方程推导空间梁单元大变形的有限元的平衡方程是比较通用的方法, 大多数研究文献[1-2]都是采用这一方法。2002 年, 台湾大学的杨永斌教授(Yang Y B 现为中国工程院院士)等<sup>[9]</sup>提出了一种全新的推导方法, 称为“增量小变形法”(Incrementally small-deformation theory), 有助于理解梁杆结构大变形问题的实质是梁单元大旋转小应变问题。直杆单元的每个节点只有空间三个方向的线位移自由度, 与其他单元的连接方式看作三向铰连接。单元本身只有轴向拉伸刚度  $EA$ , 没有抗弯与抗扭刚度。利用这一特点, 直杆单元的非线性平衡方程是在已建立的梁单元平衡方程上

通过自由度凝聚方法得到。这一方法在线性有限元著作中有详细介绍。因此, 本文只需讨论梁结构的非线性有限元方法。

由于本文只涉及 UL 型增量法, 所以公式符号可进一步简化。首先所有变量与积分域都是以  $t$  时刻状态为参考状态, 于是上节中用于表示变量参考状态的左下标可以省去; 其次, 本章所有增量都省去 UL 增量符号  $\Delta^*$ , 而状态量由变量左上标识, 如  ${}^t s_{ij}$  是  $t$  时刻的应力而不是应力增量。相对于同一个固定的空间坐标系, 变形体在  $W(0)$ 、 $W(N)$  和  $W(N+1)$  状态下所对应的空间与边界分别为  $V_0$  与  $S_0$ 、 $V_t$  与  $S_t$ 、 $V_{t+\Delta t}$  与  $S_{t+\Delta t}$ 。

取图 3 所示的两端固支梁为梁单元, 设它正好处于  $t$  时刻。梁元局部  $r$  轴为梁元的中性轴,  $s$  轴和  $t$  轴分别沿梁截面的两个主惯性轴方向, 并使  $r$ 、 $s$ 、

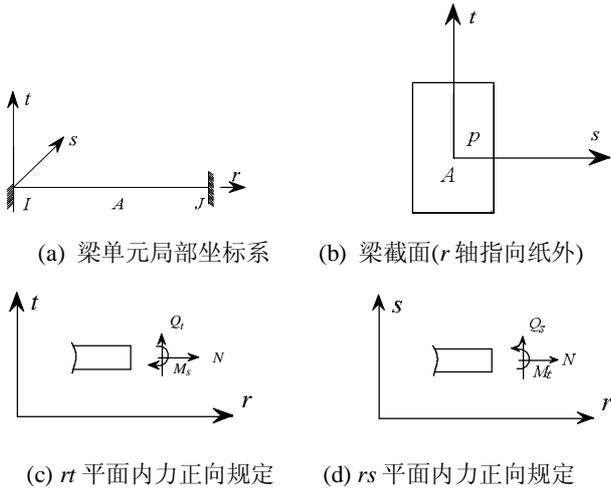


图 3  $t$  时刻的梁元

Fig.3 Beam element at time  $t$

$t$  三轴成右手坐标系。梁是典型的一维结构，梁中任一质点位移可用广义位移-中性轴的位移与转角来描述。设由  $t$  到  $t+\Delta t$  的加载步中梁元的广义位移增量  $\mathbf{U}$  为：

$$\mathbf{U}^T = \{U_r, U_s, U_t, q_r, q_s, q_t\} \quad (20)$$

式中前三个分量是中性轴位移，后三个分量是绕轴的转角，它们都仅是坐标  $r$  的一元函数，且以坐标轴正向为正。记号  $\mathbf{T}$  表示对向量  $\mathbf{U}$  的转置，以下均同。再设由  $t \sim t+\Delta t$  的加载步中梁截面  $A$  上任一质点  $P(r, s, t)$ (图 3)的位移增量  $\mathbf{u}$  为：

$$\mathbf{u}^T = \{u_r, u_s, u_t\}^T \quad (21)$$

因为  $t$  时刻到  $t+\Delta t$  时刻的变形仍可视为小变形，所以以  $t$  时刻为参考状态的质点位移增量  $\mathbf{u}$  与广义位移增量  $\mathbf{U}$  之间的关系仍适用经典梁小变形理论的平截面假定与直法线假定。由梁的直法线假定不难导出如下增量关系：

$$\begin{aligned} u_r &= U_r + tq_s - sq_t, \\ u_s &= U_s - tq_r, \\ u_t &= U_t + sq_r. \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)包括了梁的弯曲，拉压与扭转(近似为圆轴扭转)变形。将式(22)代入式(4)，可以计算格林应变增量的线性部分。由于梁的理论假定：

$$\mathbf{e}_{ss} = \mathbf{e}_{tt} = \mathbf{e}_{st} = \mathbf{e}_{ts} = 0 \quad (23)$$

我们不宜再用字母标号表示法，而是直接写出不为零的应变增量分量(再一次说明，这里省去了 UL 型应变增量符号  $\Delta^*$ ，但意义不变，以后不再声明)。利用剪应力互等条件后，其余 5 个不为零应变增量在形式上可只保留 3 个。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_{rr} = u_{r,r} = U'_r + q'_s t - q_t S \\ \mathbf{e}_{rs} = \mathbf{e}_{sr} = \frac{1}{2}(u_{r,s} + u_{s,r}) = -\frac{1}{2}q'_r t \\ \mathbf{e}_{rt} = \mathbf{e}_{tr} = \frac{1}{2}(u_{r,t} + u_{t,r}) = \frac{1}{2}q'_r S \end{cases} \quad (24)$$

式中及以后都用右上标的撇号表示广义位移增量对梁元局部坐标  $r$  的微分  $\frac{d}{dr}$ ，由于广义位移只是坐标  $r$  的函数，这样记法不会产生混淆。同理，应变增量非线性部分也只需按式(5)计算对应的 3 个分量：

$$\begin{cases} h_{rr} = \frac{1}{2}u_{r,r}u_{r,r} \approx \frac{1}{2}[(q_t - q'_r s)^2 + (q_s - q'_r t)] \\ h_{rs} = h_{sr} = \frac{1}{2}u_{r,s}u_{s,r} \approx \frac{1}{2}[(q'_t s - q'_r t)q_t - (q_s - q'_r s) \cdot q_r] \\ h_{rt} = h_{tr} = \frac{1}{2}u_{r,t}u_{t,r} \approx \frac{1}{2}[(q'_t t - q'_r s)q_s - (q_t - q'_r t) \cdot q_r] \end{cases} \quad (25)$$

利用式(22)的广义位移与质点位移的关系，可由式(7)导出关于广义应力应变增量的虚功方程。为阅读方便，将式(7)按本节符号简化规定重新改写为：

$$B_1 + B_2 = B_3 - B_4 \quad (26)$$

式中：

$$B_1 = \int_{V_t} C_{ijkl} e_{kl} \delta e_{ij} dv_t \quad (27)$$

$$B_2 = \int_{V_t} {}^t S_{ij} \delta h_{ij} dv_t \quad (28)$$

$$B_3 = {}^{t+\Delta t} P \quad (29)$$

$$B_4 = \int_{V_t} {}^t S_{ij} \delta e_{ij} dv_t \quad (30)$$

本节假定梁是弹性材料，弹性模量为  $E$ ，剪切模量为  $G$ ，不计侧面收缩(梁截面  $A$  在加载过程中保持不变)。由于只有 3 个非零应变分量，进一步将式(26)依下标展开简化为：

$$I_1 + I_2 = I_3 - I_4 \quad (31)$$

式中：

$$I_1 = \int_{V_t} (E e_{rr} \delta e_{rr} + 4G e_{rs} \delta e_{rs} + 4G e_{rt} \delta e_{rt}) dv,$$

$$I_2 = \int_{V_t} ({}^t S_{rr} \delta h_{rr} + 2{}^t S_{rs} \delta h_{rs} + 2{}^t S_{rt} \delta h_{rt}) dv, \quad (32)$$

$$I_3 = {}^{T+\Delta T} P,$$

$$I_4 = \int_{V_t} ({}^t S_{rr} \delta e_{rr} + 2{}^t S_{rs} \delta e_{rs} + 2{}^t S_{rt} \delta e_{rt}) dv.$$

再将式(24)和(25)代入式(31)各项之中，则式(31)各积分的被积函数成为广义位移增量  $\mathbf{U}$  与坐标  $r, s$ 、

$t$  的函数。由于未知的增量  $\mathbf{U}$  仅是  $r$  的函数，我们可以先对式(31)作沿梁截面  $A$  的积分，也即是关于变量  $s$ 、 $t$  的积分，这样将把式(31)的三维积分简化为一维积分。

$$I_1 = \int_0^L \{\delta e\}^T \mathbf{D} e dr \quad (33)$$

$$I_2 = \int_0^L \{\delta h\}^T {}^t s h dr \quad (34)$$

$$I_3 = {}^{t+\Delta t} R \quad (35)$$

$$I_4 = \int_0^L \{\delta e\}^T \cdot {}^t \sigma dr \quad (36)$$

式中各个变量的公式可以在文献[1]中找到。

对式(33)~式(36)进行有限元离散，可以得到梁单元的非线性平衡方程。取图3中梁的两个端点  $I$ 、 $J$  为节点，定义单元节点广义位移增量(向量)为：

$$\mathbf{a}^T = \{\mathbf{U}_I^T, \mathbf{U}_J^T\}^T \quad (37)$$

式中， $\mathbf{U}_I$  和  $\mathbf{U}_J$  分别是节点  $I$ 、 $J$  按式(20)定义的广义位移增量，于是  $\mathbf{a}$  有 12 个分量。UL 法中，我们仍可采用小变形梁的插值函数描述单元内任意一点的广义位移增量  $\mathbf{U}$ ：

$$\mathbf{U} = \mathbf{F} \mathbf{a} \quad (38)$$

式中：

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & 0 & -F_3 \\ 0 & 0 & F_2 & 0 & F_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -F_2' & 0 & -F_3' & 0 \\ 0 & F_2' & 0 & 0 & 0 & -F_3' \\ \mathbf{M} F_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{M} 0 & F_5 & 0 & 0 & 0 & -F_6 \\ \mathbf{M} 0 & 0 & F_5 & 0 & F_6 & 0 \\ \mathbf{M} 0 & 0 & 0 & F_4 & 0 & 0 \\ \mathbf{M} 0 & 0 & -F_5' & 0 & -F_6' & 0 \\ \mathbf{M} 0 & F_5' & 0 & 0 & 0 & -F_6' \end{bmatrix}$$

采用无量纲坐标  $x = r/L$ ， $F_1 \sim F_6$  定义为：

$$\begin{aligned} F_1 &= 1 - x; & F_4 &= x \\ F_2 &= 1 - 3x^2 + 2x^3; & F_5 &= 3x^2 - 2x^3 \\ F_3 &= L(-x + 2x^2 - x^3); & F_6 &= L(x^2 - x^3) \end{aligned} \quad (39)$$

式中撇号仍表示对  $r$  的导数。按照通常的有限元离散过程进行推导，最终可得如下梁单元大挠度问题的非线性有限元方程：

$$({}^t \mathbf{K}_E + {}^t \mathbf{K}_S) \mathbf{a} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{F} - {}^t \mathbf{y} \quad (40)$$

式中各个矩阵的具体定义式可以参见文献[2]和文献[3]。

## 2.2 梁杆结构几何非线性有限元的数值实现方法

2.1 节建立的有限元方程式(40)以梁单元节点的 6 个广义位移(也称结构位移 structural displacements)增量为未知函数，而不是像连续体单元那样直接以质点的 3 个平动位移为未知函数，由此导致梁杆结构非线性有限元的数值实现过程与上节弹性体的分析过程有很多不同之处。

### 2.3 单元局部坐标系的建立与跟踪

#### 1) 初始状态的局部坐标系

如图3所示，初始状态  $t=0$  时的梁单元局部坐标系  $rst$  的建立与线性分析相同。在单元数据输入时，除了输入单元两端的节点号  $I$  与  $J$  外，还要输入一个参考节点  $K$ ，由  $I$ 、 $J$ 、 $K$  三点确定坐标面  $rs$ ，然后确定与  $rs$  平面垂直的  $t$  坐标轴，并使  $rst$  成为右手坐标系。设单元初始状态局部坐标架的单位矢量为  $\{\hat{e}_{r0}, \hat{e}_{s0}, \hat{e}_{t0}\}^T$ ，建立单元局部坐标系的过程实质上是确定了  $\{\hat{e}_{r0}, \hat{e}_{s0}, \hat{e}_{t0}\}$  在结构总体空间直角坐标系下的分解式：

$$\{\hat{e}_{r0}, \hat{e}_{s0}, \hat{e}_{t0}\}^T = \mathbf{TR}_0 \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}^T \quad (41)$$

式中， $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}^T$  是结构总体空间直角坐标系下的坐标架单位矢量， $\mathbf{TR}_0$  就是初始状态的梁单元局部坐标系到总体坐标系下的转换矩阵。它是一个  $3 \times 3$  的矩阵，梁单元的 6 个广义位移和 6 个内力可以按三个一组实现在两个坐标系之间的转换。

#### 2) 加载步开始状态到结束状态的局部坐标系的变化

增量法求解过程必须跟踪单元局部坐标系随加载步的变化过程。按 UL 法，在第  $N$  个加载步中，我们已经确定了  $t$  时刻的局部坐标系，并且通过求解式(40)已经得到单元节点  $I$ 、 $J$  的位移增量，利用刚体旋转运动的欧勒角分解方式，可以确定加载步末的  $t + \Delta t$  时刻的局部坐标系。

首先介绍刚体空间旋转的欧勒角分解方式。如图4所示。XYZ 坐标系为刚体转动前直角坐标系，xyz 坐标系为随刚体转动后的直角坐标系。这两个坐标系有相同的坐标原点。设两个坐标系之间的空间转角为  $\mathbf{w}$ ，它可以分解为三个欧勒角  $\varphi$ 、 $\theta$  和  $\psi$ ，用三个连续的旋转来描述坐标系的转动过程。假定这两个坐标系在初始时刻是完全重合的，即  $x$  和  $X$ 、 $y$

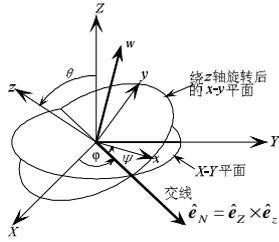


图 4 坐标旋转图

Fig.4 The rotation of coordinates

和 Y、z 和 Z 重合。首先，将 xyz 坐标系绕重合的坐标轴 z 和 Z 旋转  $\varphi$  角，然后再将 xyz 坐标系绕它的 x 轴(与交线重合，见图 4)旋转  $\theta$  角，最后，将 xyz 坐标系绕它的 z 轴旋转  $\psi$  角。角  $\varphi$  和  $\theta$  决定了 xyz 坐标系的 z 轴相对 XYZ 坐标系的旋转角。而角  $\psi$  则决定了刚体绕自身 z 轴的旋转角度。

角向量  $\omega$  可用欧勒角  $\varphi$ 、 $\theta$ 、 $\psi$  的分解式来表示，即：

$$w = j\hat{e}_z + \varphi\hat{e}_N + \psi\hat{e}_z \quad (42)$$

式(42)中： $\hat{e}_z$  为沿转动前坐标系 Z 轴的单位向量； $\hat{e}_z$  为沿转动后坐标系 z 轴的单位向量； $\hat{e}_N = \hat{e}_z \times \hat{e}_z$  为沿交线(绕 z 轴旋转后的 x-y 平面与 X-Y 平面的相交线)的单位向量。这种表示方法很简单，但是不方便，因为  $\{\hat{e}_z, \hat{e}_N, \hat{e}_z\}$  不是正交基。

为了更好地描述刚体的运动，有必要将  $\omega$  用多种不同的坐标基来表示，如惯性坐标基和随刚体转动的非惯性坐标基。所以，需要建立 x、y、z 坐标与 x、y、z 非惯性坐标系的转换关系。首先，有几何关系：

$$\hat{e}_N = \cos j \hat{e}_x + \sin j \hat{e}_y = \cos y \hat{e}_x - \sin y \hat{e}_y \quad (43)$$

同理可以导出：

$$\hat{e}_z = \cos q \hat{e}_z + \sin q (\hat{e}_N \times \hat{e}_z) \quad (44)$$

$$\hat{e}_x = \cos y \hat{e}_N + \sin y (\hat{e}_z \times \hat{e}_N) \quad (45)$$

$$\hat{e}_y = \hat{e}_z \times \hat{e}_x \quad (46)$$

将式(43)代入式(44)和式(45)，可以导出两个坐标系的坐标架单位矢量的转换关系：

$$\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}^T = {}^{t+\Delta t}TR \{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}^T \quad (47)$$

式中：

$${}^{t+\Delta t}TR = \begin{bmatrix} \cos j \cos y - \cos q \sin j \sin y \\ -\cos j \cos y - \cos q \sin j \sin y \\ \sin q \sin j \\ \sin j \cos y + \cos q \cos j \sin y & \sin q \sin y \\ -\sin j \sin y + \cos q \cos j \sin y & \sin q \cos y \\ -\sin q \cos j & \cos y \end{bmatrix} \quad (48)$$

如果将  $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}^T$  看作是  $t$  时刻的局部坐标架， $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}^T$  看作是  $t+\Delta t$  时刻的局部坐标架，坐标 X、Y、Z 分别对应坐标  $r$ 、 $s$ 、 $t$ ，那么矩阵  ${}^{t+\Delta t}TR$  就是两个坐标系之间的转换矩阵。现在的问题是如何计算由  $t$  到  $t+\Delta t$  的三个旋转角  $j$ 、 $y$ 、 $q$ 。由图 4 可见，转角  $j$ 、 $y$  可以由节点 I、J 两点在第 N 加载步的线位移增量  $U_r$ 、 $U_s$ 、 $U_t$  确定，读者不难自行导出其计算式。由于初始状态  $t=0$  的参考节点 K 并不是单元的真正节点，它不随加载步而变化，因此  $q$  角的确定方式不再与参考节点有关。在作者开发的 NACS 程序中，依据  $q$  的几何意义，取节点 I、J 两点在 N 加载步中的绕 r 轴(即中性轴)的转角的平均值作为  $q$ 。 $j$ 、 $y$ 、 $q$  确定后，矩阵  ${}^{t+\Delta t}TR$  中的每一个元素就都可以按式(48)计算了。

3) 加载步结束时局部坐标系对固定不变的体坐标系的转换矩阵

矩阵  ${}^{t+\Delta t}TR$  只是  $t$  到  $t+\Delta t$  时刻的转换矩阵，在增量法求解过程中需要计算加载步结束时局部坐标系对固定不变的总体坐标系的转换矩阵  ${}^{t+\Delta t}{}_0TR$ ，为下一加载步做好准备。设  $t$  时刻由局部坐标系到总体坐标系的转换矩阵为  ${}_0TR$ ，那么依据坐标连续变换原理可得：

$${}^{t+\Delta t}{}_0TR = {}_0TR {}^{t+\Delta t}TR \quad (49)$$

至此，我们完成了梁单元局部坐标系的更新过程。

### 2.3.1 节点位移的累加与坐标的更新

基于空间线位移的可迭加性，单元在  $t+\Delta t$  时刻的总位移  ${}^{t+\Delta t}{}_0U_i$  可以直接叠加：

$${}^{t+\Delta t}{}_0U_i = {}_0U_i + U_i, \quad i=1,2,3 \quad (50)$$

在 UL 法中，累加的总位移只是用来更新节点坐标，即：

$${}^{t+\Delta t}x = {}_0x + {}^{t+\Delta t}U \quad (51)$$

在计算程序中一般保留节点初始坐标的输入值不变，另开数组保存总位移，需要更新坐标时按式(51)计算。节点的后三个广义位移是节点的转角增量。在每一加载步中他们是微小的，因此可组成角位移向量并可进行坐标变换。但是他们的累加可能没有确定的物理意义，可参见理论力学教材。求解过程中，我们只用角位移增量确定相应的弯矩增量，增量  $q_r$  还用来更新局部坐标系，没有用到角位移的累加值。

### 2.3.2 梁单元的杆端力在加载步末的更新

梁单元实质上是一种用截面广义位移描述的一维结构,受力状态由单元杆端内力而不是积分应力描述。内力计算的误差会导致产生另一类不平衡力,而且它可能远大于由 2.2 节提到的刚度矩阵“以直代曲”产生的不平衡力。为了说明这一点,我们将式(40)中的荷载向量先分解为:

$${}^{T+\Delta T}\mathbf{F} = {}^T\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F} \quad (52)$$

于是,式(40)的右边可以改记为:

$$\Delta\mathbf{F} + ({}^T\mathbf{F} - {}^T\mathbf{y}) \quad (53)$$

上式第一项是本加载步( $N+1$ 步)内新增加的荷载,而第二项是上一加载步的不平衡力。如果 ${}^T\mathbf{y}$ 是准确的,那么第二项仅由刚度矩阵“以直代曲”产生,如果上一步 ${}^T\mathbf{y}$ 本身计算不准确,那么转入本步的不平衡荷载就严重偏离实际情况,经过几个加载步的传递后,误差迅速放大,甚至出现总体刚度矩阵不再正定的情况,逐步加载分析完全失败。为避免这种情况的产生,需要两方面的措施:一是尽量改进 ${}^{T+\Delta T}\mathbf{y}$ 的计算,为下一步打好基础;二是设置平衡迭代过程,将因内力计算误差产生的不平衡力在本加载步内降到精度控制值以下。作者在调试 NACS 程序的实践中发现,某些柔性算例中,因内力计算误差导致的不平衡力,其范数 $\|{}^T\mathbf{F} - {}^T\mathbf{y}\|$ 可能是荷载增量范数 $\|\Delta\mathbf{F}\|$ 的几十倍或更大,这时为提高精度而减小加载量 $\Delta\mathbf{F}$ ,完全没有效果。这种情况常常发生在第一加载步的头两次平衡迭代中,因为这时的内力状态的变化梯度往往最大。

1) 加载步内的基于牛顿-拉夫森法的平衡迭代过程

在作者编制的 NACS 程序中,开发了一种基于完全的牛顿-拉夫森法的平衡迭代过程,以期获得尽可能准确的内力状态。设在 $W(N) \sim W(N+1)$ 的加载步内,经历了一系列平衡迭代,于是在加载步内产生一系列中间状态:

$$W(N) = \Omega(N)_0, \Omega(N)_{(1)}, \Omega(N)_{(2)}, \mathbf{L}, \Omega(N)_{(n)}, \Omega(N)_{(n+1)}, \mathbf{L}, \Omega(N+1) \quad (54)$$

式中,大写的( $N$ )是加载步序号,小写的( $n$ )是步内平衡迭代的序号。由 $\Omega(N)_{(n)} \sim \Omega(N)_{(n+1)}$ 状态为第 $n+1$ 平衡迭代,其迭代过程如下:

第 1 步:按 $\Omega(N)_{(n)}$ 状态建立有限元平衡方程,形式与式(14)相同,为:

$${}^{(n)}[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g] \cdot {}^{(n+1)}\Delta\mathbf{a} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} - {}^{(n)}\mathbf{y} \quad (55)$$

上式中用上标( $n$ )表示当前参考状态为 $\Omega(N)_{(n)}$ , ${}^{(n+1)}\Delta\mathbf{a}$ 是 $n+1$ 次平衡迭代产生的广义位移增量,本小节为避免混淆重新用 $\Delta$ 标记增量。 ${}^{(n)}\mathbf{y}$ 是经 $n$ 次迭代后的内力状态向量。外荷载 ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ 在步内平衡迭代过程中始终保持不变是平衡迭代过程与加载过程的根本区别。解线性方程式(55),得到总体坐标系下的位移增量 ${}^{(n+1)}\Delta\mathbf{a}$ 。

第 2 步:立即更新几何参考状态到 $\Omega(N)_{(n+1)}$ 。用 ${}^{(n+1)}\Delta\mathbf{a}$ 中的三个线性位移分量 $\Delta U_i$ 计算单元节点新坐标。

$${}^{(n+1)}x_i = {}^{(n)}x_i + {}^{(n+1)}\Delta U_i, \quad i=1,2,3 \quad (56)$$

并按 2.3 节方法计算出局部坐标转换矩阵 ${}^{(n+1)}\mathbf{TR}$ 和局部坐标系下的广义位移增量:

$${}^{(n+1)}\{\Delta\mathbf{a}\}' = {}^{(n+1)}\mathbf{TR}{}^{(n+1)}\Delta\mathbf{a} \quad (57)$$

第 3 步:在新的几何参考状态下计算局部坐标系下的单元弹性刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$ 和杆端力增量 ${}^{(n+1)}\Delta\mathbf{y}$ :

$${}^{(n+1)}\Delta\mathbf{y} = {}^{(n+1)}\mathbf{K}_E\{\Delta\mathbf{a}\}' \quad (58)$$

第 4 步:用直接迭加法计算 $\Omega(N)_{(n+1)}$ 状态的内力向量 ${}^{(n+1)}\mathbf{y}$ :

$${}^{(n+1)}\mathbf{y} = {}^{(n)}\mathbf{y} + {}^{(n+1)}\Delta\mathbf{y} \quad (59)$$

注意到式(59)可能引起的内力计算误差。对 $\mathbf{y}$ 中最重要轴力 $N$ 直接按定义计算:

$${}^{(n+1)}N = EA({}^{(n+1)}L - L_0) \quad (60)$$

式中, ${}^{(n+1)}L$ 是当前状态的单元长度,可由单元两端节点的当前坐标 ${}^{(n+1)}x_i$ 计算, $L_0$ 是单元原始长度。

第 5 步:检查不平衡力范数:

$$\|{}^{T+\Delta T}\mathbf{F} - {}^{(n+1)}\mathbf{y}\| \leq e \quad (61)$$

式中, $e$ 是事先定义的平衡精度指标,对土木工程结构,取 $e = 0.001$ 已足够精确。如果式(61)得到满足,平衡迭代过程结束。 $\Omega(N)_{(n+1)}$ 状态的 $x_i$ , $\mathbf{TR}$ 和 $\mathbf{y}$ 共同确定了本加载步结束状态 $\Omega(N)$ ,转入下一加载步计算。如不满足,转回第一步,开始 $n+2$ 次平衡迭代。如果达到设定的最多迭代次数仍未满足,则强制结束平衡迭代,转入下一加载步分析。

2) 平衡迭代过程的误差来源和所采取的消除误差措施

a) 算法的最大特点是先更新几何状态,在更新

后的  $W(N)_{(n+1)}$  状态上计算内力增量。直观上看, 相当于因位移增量产生的内力增量部分已经符合在变形后的状态上满足平衡条件的要求。

b) 误差的主要来源在第四步, 它实质上是不加改变地将  $T$  时刻的总内力当作了  $T + \Delta T$  时刻的内力的一部分。于是直接将它与内力增量相加, 作为变形后的总的内力。实际上, 即使梁单元的截面不发生变化, 单元发生空间旋转后原有内力沿固定空间坐标系的各分量也必须调整, 才能适应变形后状态的平衡。直接迭加的式(59)相当于忽略了这一内力调整过程。图 5 的例子可以说明这一点。如图 5 所示,  $t$  时刻以前, 一根水平悬臂梁受到水平力  $P_1$  作用, 已处于平衡状态, 此时梁中内力仅有轴力(以压为正)  $N = P$ 。从  $t$  时刻开始, 到  $t + \Delta t$  时刻, 增加了竖向荷载  $P_2$  作用, 梁发生弯曲变形。以  $t$  时刻为参考的梁平衡方程可以求出梁中  $A$  点弯矩(以上面受压为正),  $M_A = P_2(L - x)$ , 剪力  $Q_A = P_2$ 。与  $T$  时刻的内力直接叠加的结果为:

$${}^{T+\Delta T}N = {}^T N = P_1; \quad {}^{T+\Delta T}M_A = P_2(L - x); \quad Q_A = P_2$$

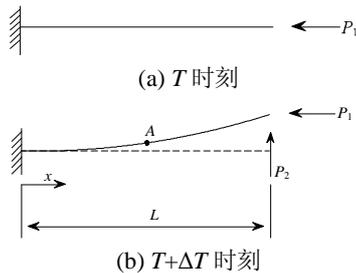


图 5 悬臂梁变形后的平衡

Fig.5 Equilibrium of cantilever beam after deformation

但是按大变形理论, 内力应在变形后的结构上与外荷载平衡。设截面  $x$  处转角为  $q_x$ , 水平向平衡条件为(因转角  $q_x$  很小, 忽略剪力作用):

$${}^{t+\Delta t}N \cos q_x = P_1 \quad \text{或} \quad {}^{t+\Delta t}N = \frac{P_1}{\cos q_x}$$

于是有:

$$\Delta N = {}^{t+\Delta t}N - {}^t N = \frac{P_1(1 - \cos q_x)}{\cos q_x} \approx \frac{1}{2} P_1 q_x^2$$

$\Delta N$  这一部分增量就是因梁截面旋转而产生的内力调整量, 它无法通过变形前的平衡方程计算, 只能在平衡迭代过程中逐步调整实现。如果进行平衡迭代, 第一次迭代产生的水平不平衡力就是  $\frac{1}{2} P_1 q_x^2$ ,

在后续迭代中, 梁的几何构形已是曲梁, 不平衡荷载会迅速减小, 这也是第一次迭代的不平衡力往往

是最大的一个例子。

在上节我们看到, 连续体单元的有限元分析中对应力叠加作了严格处理, 在由克希霍夫应力增量转换为柯西应力增量的式(19)中, 那些含旋转速度  $W$  的项就是在应力层面上将  $t$  时刻的应力调整到  $t + \Delta t$  状态。

c) 算法中, 轴力  $N$  采取了直接按当前状态与初始状态( $t=0$ )的长度变化计算的准确方式。式(60)相当于考虑了轴力在旋转过程中的调整。消除了直接迭加式(59)中轴力项的误差。从大量梁元结构几何非线性分析的实例来看, 梁单元的内力中, 对几何非线性行为影响最大的内力是轴力。由于变形后状态的轴力可以精确计算, 总的分析精度还是很理想的。目前的大变形分析中尚没有类似轴力计算的准确公式或方法直接计算当前状态的总弯矩, 剪力等内力, 而要有累积法计算, 他们对不平衡力的影响相对较小, 通过平衡迭代基本可以消除。

d) 有些文献声称建立了求解非线性问题的随体坐标法。其实质与本算法相同。由于变形后状态是未知状态, 直接在未知状态上建立的平衡方程无法作数值计算, 尽管计算内力增量的式(58)全部是在变形后状态  $\Omega(N)_{(n+1)}$  上, 但基本的平衡方程式(40)还是在前一状态  $\Omega(N)_{(n)}$  上建立。实质上还是一种拉格朗日算法。因此固体力学认为本质上只有 TL 和 UL 两种增量解法, 其余解法都只是对基本方法的改进。

e) 平衡迭代过程的准则是要求变形后的内力与外荷载平衡, 它具有很强的纠正误差的能力。从理论上来说, 只要问题的解答是唯一的并且至少在一个加载步内与加载过程无关(因为平衡迭代过程本身是一个不断变化的加载过程), 那么即使式(40)的刚度矩阵不够精确, 最终也会得到满意的结果。这一点已有很多文献提及, 但应注意, 唯一性与加载无关性这两个前提。

### 3 结论

本文分析了采用 UL 型增量理论的梁杆结构几何非线性有限元法求解过程与连续体求解过程的主要不同点, 论述了梁杆结构几何非线性有限元的数值实现方法, 特别阐述了确定加载步末的内力状态的重要性的方法, 对深入理解梁杆结构几何非线性有限元理论和指导相应的计算软件开发具有重要的意义。

## 参考文献:

- [1] Bathe K J, Bolourchi S. Large displacement analysis of three-dimensional beam structures [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1979, 14(7): 961—986.
- [2] 陈政清, 曾庆元, 颜全胜. 空间杆系结构大挠度问题内力分析的 UL 列式法[J]. *土木工程学报*, 1992, 25(5): 34—44.  
Chen Zhengqing, Zeng Qingyuan, Yan Quansheng. A UL formulation for internal force analysis of special frame structures with large displacement [J]. *China Civil Engineering Journal*, 1992, 25(5): 34—44. (in Chinese)
- [3] Chen Z Q, Agar T J A. Geometric nonlinear analysis of flexible spatial beam structures [J]. *Computers & structures*, 1993, 49(6): 1083—1094.
- [4] 杨孟刚, 陈政清. 两节点曲线索单元精细分析的非线性有限元法[J]. *工程力学*, 2003, 20(1): 42—47.  
Yang Menggang, Chen Zhengqing. Nonlinear analysis of cable structure using a two-node curved cable element of high precision [J]. *Engineering Mechanics*, 2003, 20(1): 42—47. (in Chinese)
- [5] 杨孟刚, 陈政清. 基于 UL 列式的两节点悬链索元非线性有限元分析[J]. *土木工程学报*, 2003, 36(8): 63—67.  
Yang Menggang, Chen Zhengqing. Two-node centenary element for the analysis of cable structure based on UL formula [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2003, 36(8): 63—67. (in Chinese)
- [6] Wen R K, Rahimzadeh J. Nonlinear elastic frame analysis by finite element [J]. *Journal of Structural Engineering*, 1983, 109(8): 1952—1971.
- [7] Yang Y B, McGuire W. Stiffness matrix for geometric nonlinear analysis [J]. *Journal of structural engineering*, 1986, 112(4): 853—877.
- [8] Spillers W R. Geometric stiffness matrix for space frames [J]. *Computers & structures*, 1990, 36(1): 29—37.
- [9] Yang Y B, Kuo S R, Wu Y S. Incrementally small-deformation theory for nonlinear analysis of structural frames [J]. *Engineering structures*, 2002, 24(6): 783—798.
- [10] Yang Y B, Lin S P, Chen C S. Rigid body concept for geometric nonlinear analysis of 3D frames, plates and shells based on the updated Lagrangian formulation [J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2007, 196(7): 1178—1192.
- [11] Belytschko T, Liu W K, Moran B. 连续体和结构的非线性有限元[M]. 庄茁, 译. 北京: 清华大学出版社, 2002: 442—494.  
Belytschko T, Liu W K, Moran B. *Nonlinear finite elements for continua and structures* [M]. translated by Zhuang Zhuo. Beijing: Tsinghua Press, 2002: 442—494. (in Chinese)
- [12] 鹭津久一郎. 老亮. 《弹性和塑性力学中的变分法》[M]. 郝松林, 译. 北京: 科学出版社, 1984: 420—434.  
Kyuichiro W, Lao liang. *Variational methods in elasticity and plasticity* [M]. translated by Hao Songlin. Beijing: Science Press, 1984: 420—434. (in Chinese)

注: 该文在第 22 届结构工程学术会议(2013 新疆)应邀作特邀报告