

# 一类具有 Beddington-DeAngelis 功能性反应随机模型的数值模拟

李 瑜, 黄东卫, 郭永峰  
(天津工业大学 理学院, 天津 300387)

**摘 要:** 考虑被捕食者的生长率和捕食者的死亡率分别受到高斯白噪声和泊松白噪声扰动的情况, 建立了具有 BDA 功能性反应的三种群密度的随机演化模型, 并利用 Milstein 方法对系统进行了离散化处理; 通过计算机代数 Matlab 编程, 完成了确定系统及随机系统的数值模拟. 结果表明: 在随机扰动强度很小的情况下, 系统会产生有界的混沌状态.

**关键词:** 高斯白噪声; 泊松白噪声; Beddington-DeAngelis(BDA)功能性反应; Milstein 方法  
**中图分类号:** O193      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1671-024X(2014)02-0076-05

## Numerical simulation for a stochastic system with Beddington-DeAngelis functional response

LI Yu, HUANG Dong-wei, GUO Yong-feng

(School of Science, Tianjin Polytechnic University, Tianjin 300387, China)

**Abstract:** Considering Poisson white noise and Gauss white noise into the intrinsic grow rate of prey and the death rate of predators, a stochastic system of three population densities with Beddington-DeAngelis functional response is established. Then Milstein method is used to make stochastic system discrete and programs is compiled with computer algebra Matlab to finish the analysis. Numerical simulations of deterministic system and stochastic system certify the result obtained. The results demonstrate that a bounded chaotic attractor would occur in the stochastic system if the noises are sufficiently small.

**Key words:** Gauss white noise; Poisson white noise; Beddington-DeAngelis(BDA) functional response; Milstein method

自从 1920 年 Lotka<sup>[1]</sup>首次提出捕食-食饵模型的研究开始, 在种群生态中, 捕食者和被捕食者之间的动力学关系历来受到研究者的重视. 1975 年 Beddington<sup>[2]</sup>和 DeAngelis<sup>[3]</sup>分别提出了被称之为具有 BDA 功能反应函数的捕食-食饵模型. BDA 功能反应既依赖于被捕食者的密度, 又依赖于捕食者的密度, 可以与实际观测统计资料更加符合<sup>[4]</sup>. Raid 等<sup>[5]</sup>分析了三种群单食物链具有 BDA 功能反应函数的数学模型. 但是目前研究工作中考虑的具有 BDA 功能反应函数的三种群数学模型都是以确定的动力系统<sup>[6]</sup>为基础的, 还没有人研究 2 种捕食者 1 种食饵的这种具有 BDA 功能性反应的三种群随机模型. 本文研究了以随机动力系统为基础的具有 BDA 功能反应函数的三种

群随机数学模型, 并对其数值模拟.

### 1 确定性模型分析

具有 BDA 功能性反应的 2 种捕食者 1 种食饵确定性三种群系统可以如下表示:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dT} = RX(1 - \frac{X}{K}) - F_1(X, Y)Y - F_2(X, Z)Z \\ \frac{dY}{dT} = C_1F_1(X, Y)Y - D_1Y \\ \frac{dZ}{dT} = C_2F_2(X, Z)Z - D_2Z \end{cases} \quad (1)$$

式中:  $F_i(U, V) = A_iU/(B_i + U + M_iV)$ ,  $i = 1, 2$ . 这里定义  $X$  为浮游植物即食饵在时间  $T$  下的种群密度;  $Y$  为

收稿日期: 2013-10-10      基金项目: 国家自然科学基金项目(11102132)

第一作者: 李 瑜(1990—), 女, 硕士研究生.

通信作者: 黄东卫(1966—), 男, 博士, 教授, 硕士生导师. E-mail: tjhuangdw@163.com

一类浮游动物即捕食者在时间  $T$  下的种群密度; $Z$  为另一类浮游动物即捕食者在时间  $T$  下的种群密度; $R$  为浮游植物的内禀增长率; $K$  为承载力系数; $F_i(U, V)$  为 BDA 功能反应函数; $A_i$  表示第  $i$  种浮游动物对浮游植物的最大捕获率; $B_i$  为半饱和常数,表示单位食饵在第  $i$  种浮游动物的最大捕获率的一半时浮游植物的种群密度; $M_i$  表示第  $i$  种浮游动物的种内竞争系数; $C_i$  表示第  $i$  种浮游动物捕食浮游植物后转化为自身生长能力的消化系数; $D_i$  表示第  $i$  种浮游动物的死亡率.所有参数都为正.

对系统进行无量纲化,令  $t = RT, x = X/K, y = A_1 Y / (RK), z = A_2 Z / (RK)$ ,则模型转化为:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x(1-x) - \frac{xy}{b_1+x+m_1y} - \frac{xz}{b_2+x+m_2z} \\ \frac{dy}{dt} = a_1 \frac{xy}{b_1+x+m_1y} - d_1 y \\ \frac{dz}{dt} = a_2 \frac{xz}{b_2+x+m_2z} - d_2 z \end{cases} \quad (2)$$

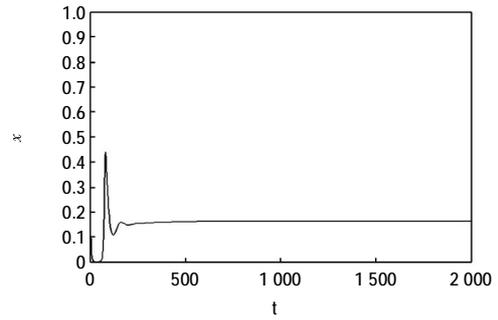
式中: $m_1 = M_1 R / A_1, m_2 = M_2 R / A_2, b_1 = B_1 / K, b_2 = B_2 / K, a_1 = C_1 A_1 / R, a_2 = C_2 A_2 / R, d_1 = D_1 / R, d_2 = D_2 / R$ .

文献[6]的结果表明,对于有实际意义的三种群平衡点,当  $b_1, b_2$  值比较小时,  $m_1$  和  $m_2$  在  $[0, 1]$  中的系统稳定区域很小,当  $m_1 < 0.92$  时,不管  $m_2$  取什么值,系统都处于不稳定状态.当  $b_1, b_2$  的值增大时,系统的稳定区域变大.当  $m_1, m_2$  的值比较小时,  $b_1$  和  $b_2$  在  $[0, 1]$  中的系统稳定区域很小,当  $b_1 < 0.6$  时,  $b_2$  不管取什么值,系统都处于不稳定状态.当  $0.6 < b_2 < 0.93$  时,不管  $b_2$  取  $[0, 1]$  中的任何值,系统都处于稳定状态.

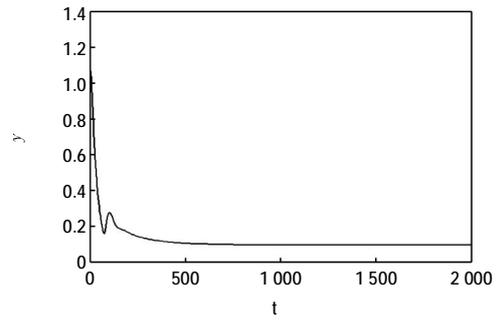
令  $a_1 = 0.3, a_2 = 0.2, d_1 = 0.03, d_2 = 0.02, b_1 = 0.8, b_2 = 1, m_1 = 1.4, m_2 = 0.2$ ,通过数值模拟,可发现当  $t \rightarrow \infty$  时,系统(2)的解趋于稳定点  $A(0.22, 0.87, 0.52)$ ,如图1所示.

由图 1 可以看出,数值模拟的结果表明系统是渐进稳定的,并且系统的衍化过程较快,整个过程中没有出现种群灭绝的情况,在短时间内出现吸引子  $A(0.22, 0.87, 0.52)$ .

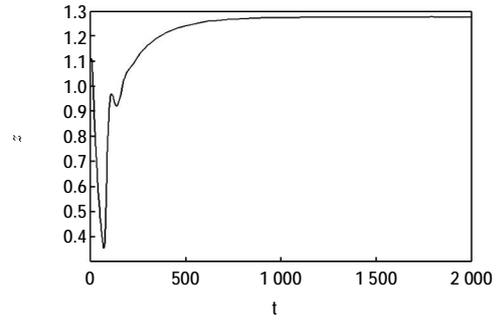
在生物数学领域,大多数研究工作是以确定的动力系统为基础的确定性数学模型,主要依据是由于生物种群的个体数量足够大,可以根据大数定律,把系统近似地看成是确定性的.但是在现实环境中,随机干扰是不可避免的. May 曾指出,环境噪声会不同程度地影响到种群的增长率、死亡率、竞争系数等其他生态系统参数<sup>[7]</sup>.实际观测数据也表明,这些随机激励不可避免,无法忽视,并且在一定程度上这些随机干扰波



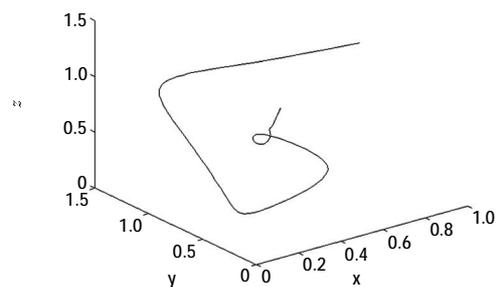
(a) X 的时间历程图



(b) Y 的时间历程图



(c) Z 的时间历程图



(d) 系统相图

图 1 确定性模型种群密度的时程图及系统相图

Fig.1 Diagrams of population densities with respect to time and phase diagram of deterministic system

动的概率并不小,直接影响种群的生存状况.因此,由确定性系统所建立的数学模型对种群衍化过程的描述和预测并不总是令人满意.在一些情况下,有必要在原有确定性系统的基础上,引入随机干扰来描述生态系统的衍化过程.近年来,许多研究者<sup>[8-12]</sup>在经典的确定性模型中加入了随机干扰,以建立新的随机模型.

## 2 引入高斯白噪声的随机模型分析

具有 BDA 功能反应函数的捕食-食饵模型在生态环境中的环境噪声不可避免,且随机波动的概率并不小,因此,需要在其确定性模型的基础上引入随机干扰来描述生态系统的衍化过程.普遍采用的形式是将随机干扰简化为高斯白噪声.由于随机激励现象直接影响生物的生存现状,故将随机干扰主要作用在浮游植物 X 的内禀增长率 R、浮游动物 Y 的死亡率 D<sub>1</sub>、浮游动物 Z 的死亡率 D<sub>2</sub> 上,这样是有实际意义的,于是有

$$R \rightarrow R + a_1 \dot{B}_1(T),$$

$$D_1 \rightarrow D_1 + a_2 \dot{B}_2(T),$$

$$D_2 \rightarrow D_2 + a_3 \dot{B}_3(T).$$

分别替代系统(1)中的 R、D<sub>1</sub>、D<sub>2</sub>. 其中: B<sub>i</sub>(T) 为定义在完备的概率空间(Ω, F, P)上的 Brown 运动; α<sup>2</sup> 为随机干扰强度.无量纲化后,可得到下面的系统:

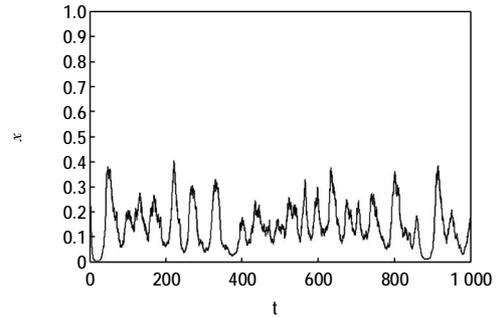
$$\begin{cases} dx = [x(1-x) - \frac{xy}{b_1+x+m_1y} - \frac{xz}{b_2+x+m_2z}]dt + s_1x(1-x)dB_1(t) \\ dy = (a_1\frac{xy}{b_1+x+m_1y} - d_1y)dt - s_2y dB_2(t) \\ dz = (a_2\frac{xz}{b_2+x+m_2z} - d_2z)dt - s_3z dB_3(t) \end{cases} \quad (3)$$

将系统(3)离散化,并使用文献 [13] 中给出的 Milstein 方法来对系统进行数值模拟

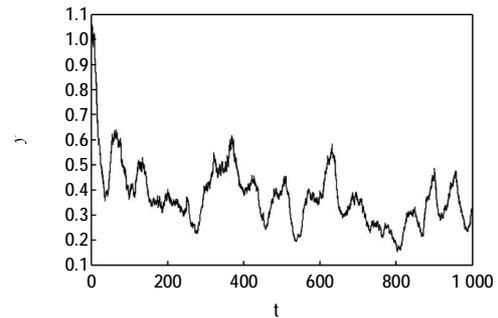
$$\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + [x_k(1-x_k) - \frac{x_k y_k}{b_1+x_k+m_1 y_k} - \frac{x_k z_k}{b_2+x_k+m_2 z_k} - \frac{1}{2} s_1^2 x_k(1-x_k)(1-2x_k)]Dt + s_1 x_k(1-x_k)Dw_k + \frac{1}{2} s_1^2 x_k(1-x_k)(1-2x_k)Dw_k^2 \\ y_{k+1} &= y_k + (a_1 \frac{x_k y_k}{b_1+x_k+m_1 y_k} - d_1 y_k - \frac{1}{2} s_2^2 y_k)Dt - s_2 y_k Dw_k + \frac{1}{2} s_2^2 Dw_k^2 \\ z_{k+1} &= z_k + (a_2 \frac{x_k z_k}{b_2+x_k+m_2 z_k} - d_2 z_k - \frac{1}{2} s_3^2 z_k)Dt - s_3 z_k Dw_k + \frac{1}{2} s_3^2 Dw_k^2 \end{aligned}$$

运用 Matlab 软件对离散化后的系统(3)进行数值模拟,得到图 2.取参数 a<sub>1</sub> = 0.3, a<sub>2</sub> = 0.2, d<sub>1</sub> = 0.03, d<sub>2</sub> = 0.02, b<sub>1</sub> = 0.8, b<sub>2</sub> = 1, m<sub>1</sub> = 1.4, m<sub>2</sub> = 0.2, σ<sub>1</sub><sup>2</sup> = 0.01, σ<sub>2</sub><sup>2</sup> = σ<sub>3</sub><sup>2</sup> = 0.001.

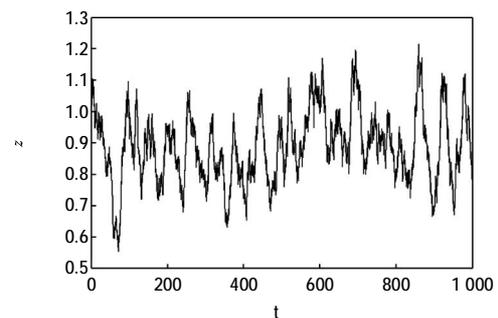
由图 2 可以看出,由于种群受到环境噪声的激励,原有系统的稳定性被破坏,从时间历程图中可看到每个种群受环境噪声的干扰上下波动,但由于随机



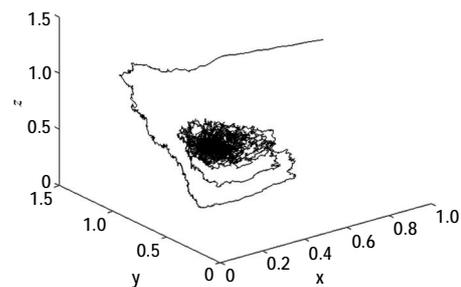
(a) X 的时间历程图



(b) Y 的时间历程图



(c) Z 的时间历程图



(d) 系统相图

图 2 受高斯白噪声干扰后种群密度的时程图及系统相图  
Fig.2 Diagrams of population densities with respect to time and phase diagram of system with Gauss white noise

激励的强度不大,种群波动的范围也不大.

## 3 引入泊松白噪声的随机模型分析

随机系统(3)是将高斯白噪声作为唯一的随机激励源,但是高斯白噪声是描述一类连续的随机干扰.而一个实际的生态环境中常含有多种随机因素,且针

对生物系统的随机干扰是不连续的随机激励,同时激励的时间与强度也是随机的,因此将高斯白噪声作为唯一的随机激励源显然是不合适的,迫切需要其他噪声作为随机激励源来干扰生态系统.而泊松白噪声可以表示成一系列独立服从泊松分布的随机脉冲序列,更适用于描述这类不连续的随机干扰的数学模型.为此,许多学者在高斯白噪声的基础上,又加入了泊松白噪声,提出了一类新的随机系统.本文将泊松白噪声主要作用在浮游食物 X 的内禀增长率 R、浮游动物 Y 的死亡率 D<sub>1</sub>、浮游动物 Z 的死亡率 D<sub>2</sub> 上.于是有

$$R \rightarrow R + \alpha_1 [\dot{B}_1(T) + \dot{N}_1(T)]$$

$$D_1 \rightarrow D_1 + \alpha_2 [\dot{B}_2(T) + \dot{N}_2(T)]$$

$$D_2 \rightarrow D_2 + \alpha_3 [\dot{B}_3(T) + \dot{N}_3(T)]$$

分别替代系统(1)中的 R、D<sub>1</sub>、D<sub>2</sub>, 其中: B<sub>i</sub>(T)为定义在完备的概率空间(Ω, F, P)上的 Brown 运动; N<sub>i</sub>(T)为强度为 λ 的泊松过程; α<sub>i</sub><sup>2</sup> 为随机干扰强度.无量纲化后,系统转化为:

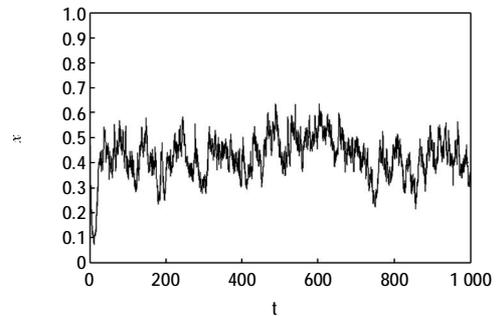
$$\begin{cases} dx = [x(1-x) - \frac{xy}{b_1+x+m_1y} - \frac{xz}{b_2+x+m_2z}]dt + s_1x(1-x)[dB_1(t)+dN_1(T)] \\ dy = (a_1\frac{xy}{b_1+x+m_1y} - d_1y)dt - s_2y[dB_2(t)+dN_2(T)] \\ dz = (a_2\frac{xz}{b_2+x+m_2z} - d_2z)dt - s_3z[dB_3(t)+dN_3(T)] \end{cases} \quad (4)$$

可将系统(4)离散化,并使用文献[13]中给出的 Milstein 方法来对系统进行数值模拟

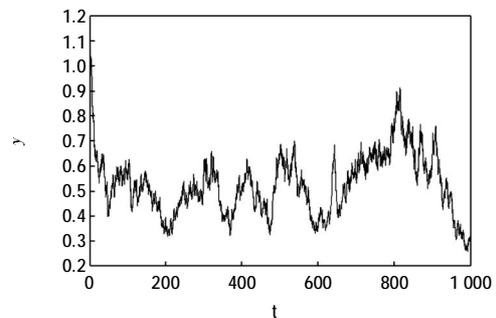
$$\begin{aligned} x_{k+1} = & x_k + [x_k(1-x_k) - \frac{x_k y_k}{b_1+x_k+m_1y_k} - \frac{x_k z_k}{b_2+x_k+m_2z_k} - \frac{1}{2}s_1^2x_k(1-x_k)(1-2x_k)]Dt + \\ & s_1x_k(1-x_k)DW_k + \frac{1}{2}s_1^2x_k(1-x_k)(1-2x_k)DW_k^2 + \\ & \frac{1}{2}\{3s_1x_k(1-x_k) - s_1[x_k + s_1x_k(1-x_k)][1-x_k - s_1x_k(1-x_k)]\}DN_k + \frac{1}{2}s_1[x_k + s_1x_k(1-x_k)][1-x_k - s_1x_k(1-x_k)]DN_k^2 + s_1^2x_k(1-x_k)(1-2x_k)Dw_kDN_k \\ y_{k+1} = & y_k + (a_1\frac{x_k y_k}{b_1+x_k+m_1y_k} - d_1y_k - \frac{1}{2}s_2^2y_k)Dt - \\ & s_2y_kDW_k + \frac{1}{2}s_2^2DW_k - \frac{1}{2}s_2y_k(2+s_2y_k)DN_k + \\ & \frac{1}{2}s_2^2y_kDN_k^2 + s_2^2y_kDw_kDN_k \\ z_{k+1} = & z_k + (a_2\frac{x_k z_k}{b_2+x_k+m_2z_k} - d_2z_k - \frac{1}{2}s_3^2z_k)Dt - \end{aligned}$$

$$s_3z_kDW_k + \frac{1}{2}s_3^2DW_k - \frac{1}{2}s_3z_k(2+s_3z_k)DN_k + \frac{1}{2}s_3^2z_kDN_k^2 + s_3^2z_kDw_kDN_k$$

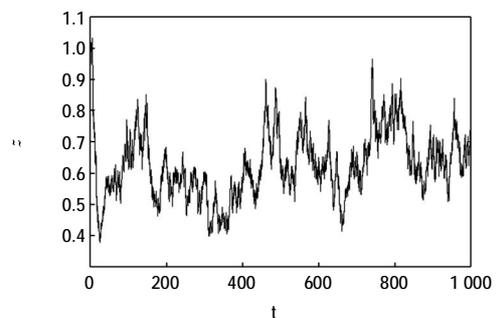
运用 Matlab 软件对离散化后的系统(3)进行数值模拟,得图 3. 取参数 a<sub>1</sub> = 0.3, a<sub>2</sub> = 0.2, d<sub>1</sub> = 0.03, d<sub>2</sub> =



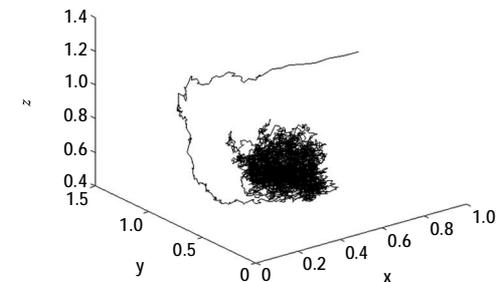
(a) X 的时间历程图



(b) Y 的时间历程图



(c) Z 的时间历程图



(d) 系统相图

图 3 受泊松白噪声干扰后种群密度的时程图及系统相图  
Fig.3 Diagrams of population densities with respect to time and phase diagram of system with Possion white noise

$0.02, b_1 = 0.8, b_2 = 1, m_1 = 1.4, m_2 = 0.2, \lambda = 1, \sigma_1^2 = 0.01, \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = 0.001.$

由图 3 可以看出, 由于种群受到环境噪声的激励, 原有系统的稳定性被破坏, 从时间历程图中可看到每个种群受环境噪声的干扰上下波动. 相对于图 2 而言, 浮游动物 Z 的波动范围增加, 说明在原有系统上加入泊松白噪声对种群的影响还是比较明显的, 不可忽略.

#### 4 结束语

由于环境噪声对生态的影响不可避免, 本文分析了生态环境中的随机干扰对种群演化的影响, 考虑了环境噪声的情况不同, 针对被捕食者的生长率和捕食者的死亡率分别引入高斯白噪声和泊松白噪声, 建立了具有 BDA 功能性反应的二种捕食者一种食饵的种群密度的随机演化模型, 并利用 Milstein 方法对系统进行了离散化处理, 通过计算机代数 Matlab 编程, 完成了确定系统及随机系统的数值模拟, 并对其进行了比较分析, 说明在随机扰动强度并不是很大的情况下, 随机干扰对系统的动力行为影响不大, 但会使系统产生有界的混沌状态.

#### 参考文献:

- [1] LOTKA A J. Undamped oscillations derived from the law of mass action[J]. *Journal Am Chemical Sociology*, 1920, 42: 1595-1599.
- [2] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites and its effect on searching efficiency[J]. *Journal Animal Ecology*, 1975, 44: 331-340.
- [3] DEANGELIS D L, GOLDSTEIN R A, O'NEILLR V A. Model for trophic interaction[J]. *Ecology*, 1975, 56: 881-892.
- [4] SKALSKI G T, GILLIAM J F. Functional responses with predator interference: Viable alternatives to the Holling type II model[J]. *Ecology*, 2001, 82: 3083-3092.
- [5] RAID Kamel Naji, ALLA Tariq Balasim. Dynamical behavior of a three species food chain model with BDA functional response [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2007, 32: 1853-1866.
- [6] 万越之. 多种群相互干扰下海洋浮游生态系统非线性动力系统学研究[D]. 天津: 天津大学, 2009.
- [7] HONG Q, MENG L, WANG K, et al. Dynamics of a stochastic predator-prey system with BDA functional response [J]. *Applied Mathematics and Comprtion*, 2012, 219: 2303 - 2312.
- [8] LV Jingliang, WANG K. Asymptotic properties of a stochastic predator-prey system with Holiing II functional response [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Somulat*, 2011, 16: 4037-4048.
- [9] SHUANG L, XINAN Z. Dynamics of a stochastic non-autonomous predator-prey system with BDA functional response [J]. *Advances in Difference Equations*, 2013, 19: 1-20.
- [10] MAY R M. *Stability and Complexity in Model Ecosystems*[M]. New Jersey: Princeton University Press, 2001.
- [11] MAO X, SABANIS S, RENSHAW E. Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics[J]. *Appl*, 2002, 97: 95-110.
- [12] LIU M, WANG K. Global stability of a nonlinear stochastic predator-prey system with BDA functional response [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Somulat*, 2011, 16: 1114-1121.
- [13] HIGHAM D J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations[J]. *SIAM Rev*, 2001, 43: 525-546.