

复杂采空区三角网模型剖面轮廓线提取方法

罗周全¹, 张文芬¹, 罗贞焱¹, 许士民²

1. 中南大学资源与安全工程学院, 长沙 410083
2. 中国矿业大学(北京)资源与安全工程学院, 北京 100083

摘要 采空区是矿山安全生产面临的主要灾源之一, 准确获取采空区剖面等信息是实施采空区灾害防治及空区周边资源安全开采的重要基础, 而采空区三角网模型剖面轮廓线提取是采用可视化方法实现采空区剖面准确获取的前提。在分析目前常用的三角网模型剖面轮廓线提取方法(即最小距离法、扇形区域法和凸包算法)运用于提取边界复杂的采空区剖面轮廓线时存在缺陷的基础上, 对传统的方法进行了改进, 形成了适用于复杂边界采空区三角网模型剖面轮廓线的提取方法——凸包压入法。首先以垂直于任意坐标轴的平面剖切采空区三角网模型得到轮廓线的无序点集, 提取无序点集的凸包线作为初始轮廓线, 然后将包络于初始轮廓线内的点按张角最大的原则全部添加到轮廓线中, 获得完整的剖面轮廓线, 形成采空区剖面。实际应用表明, 研究形成的算法能够快速有效地提取复杂采空区的剖面轮廓线, 可准确获取复杂采空区剖面, 具有很好的实用价值。

关键词 采空区; 三角网模型; 剖面轮廓线; 凸包压入法

中图分类号 TG142.71

文献标志码 A

doi 10.3981/j.issn.1000-7857.2014.18.007

Extraction of Sectional Contour Lines of Goafs using Triangulation Model

LUO Zhouquan¹, ZHANG Wenfen¹, LUO Zhenyan¹, XU Shimin²

1. School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China
2. School of Resources & Safety Engineering, China University of Mining & Technology, Beijing 100083, China

Abstract Goafs are one of the main hazards for mine safety and production. Accurate information of goaf profile is an important basis for safe exploitation of mining resources and prevention of goafs' disasters. Contour line extraction by using goaf triangulation model is the premise for accurately obtaining the profile by visual method. The defects of currently used triangulation sectional contour extraction methods are analyzed, including the minimum distance method, fan-shaped regional method and convex hull algorithm applied to extract the sectional contour line of goafs which have complex boundaries. This paper aims to improve the conventional methods and proposes an advanced extraction method named convex hull penetration method for the extraction. First, it extracts the convex hull line of unordered point set obtained in the plane vertical to arbitrary axis using the triangulation model; then it obtains a complete cross-section contour line by putting points of the initial contour line into the contour line following the principle of maximum opening angle; finally it forms the profile of the goaf. The application shows that this method has practical values in efficiently extracting the sectional contour lines of complex goafs and accurately obtaining the profile.

Keywords goaf; three-dimensional grid; sectional contour; convex hull penetration method

收稿日期: 2014-03-18; 修回日期: 2014-04-29

基金项目: “十二五”国家科技支撑计划项目(2012BAK09B02-05)

作者简介: 罗周全, 教授, 研究方向为金属矿深井开采及灾害辨析监控, 电子信箱: 853711087@qq.com; 张文芬(共同第一作者), 研究方向为采空区三维激光扫描空间信息建模及动态监测, 电子信箱: zwf-csu@qq.cn

引用格式: 罗周全, 张文芬, 罗贞焱, 等. 复杂采空区三角网模型剖面轮廓线提取方法[J]. 科技导报, 2014, 32(18): 48-53.

采空区是矿山安全生产所面临的主要灾源之一,准确获取采空区剖面信息是实施采空区灾害防治及空区周边资源安全开采的重要基础,而采空区三角网模型剖面轮廓线的提取是实现可视化的前提^[1-2]。由于采空区受爆破冲击、失稳破坏等因素的影响,其边界形态往往比较复杂,剖面轮廓线的提取具有一定的难度。

目前国内外对于三角网模型剖面轮廓线的提取开展了一些研究,主要形成了3大类方法:1) 最小距离法^[3-5],运用交点之间的距离关系进行排序,依次找出距离最近的点进行排序;2) 扇形区域法^[6-8],提出了对模型从正视、侧视和俯视3个角度投影到3个平面,找出每个区域内距离模型中心最远的点作为其边界点;3) 凸包算法^[9-11],提出了根据三角网模型中的三角形面片的位置关系,提取出模型外边界的轮廓线。

本文在分析对比3大类剖面轮廓线提取方法应用于边界复杂采空区时存在的主要问题的基础上,提出适用于边界复杂采空区三角网模型剖面轮廓线提取的新方法——凸包压入法,然后利用凸包压入法获得完整的采空区三角网模型剖面轮廓线,形成准确采空区剖面。

1 轮廓线无序点集的获取

三角网模型是通过大量的三角形对三维实体表面进行离散逼近,在三维空间中围成封闭有界的区域^[9]。三角网模型应满足以下2个条件:1) 网格上的每个面片都是三角形;2) 网格上的每条边有且仅有两个三角形共有。

用垂直于任意坐标轴的平面剖切采空区三角网模型获取剖面的无序点集。现以 $z=z_i$ 的平面说明其交点获取的方法。三角形与 $z=z_i$ 剖切面存在交点的位置关系共有3种情况,如图1所示。

- 1) 三角形的一条边位于剖切面上,有两个交点,见图1(a);
- 2) 三角形与剖切面相交,有两个交点,见图1(b);
- 3) 三角形的一个顶点位于剖切面上,有1个交点,见图1(c)。

对图1(a)和(c)两种情况求交点时,只需要判断三角形顶点坐标的 z 值是否与 z_i 相等,如果相等则说明顶点为交点;对于图1(b)的情况,线段 p_1p_2 与平面交点为 a_1 , a_1 相对于 p_1 和 p_2 的位置比例关系 t 为

$$t = \frac{z_i - p_{1z}}{p_{2z} - p_{1z}} \quad (1)$$

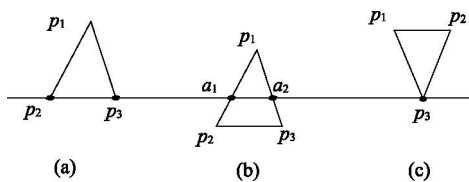


图1 剖面与三角形相交情况

Fig. 1 Positional relationships between the triangle and profile

则 a_1 的坐标值计算式为

$$\begin{cases} a_{1x} = p_{1x} + t(p_{2x} - p_{1x}) \\ a_{1y} = p_{1y} + t(p_{2y} - p_{1y}) \\ a_{1z} = p_{1z} + t(p_{2z} - p_{1z}) \end{cases} \quad (2)$$

同理可求出线段 p_1p_3 与剖切面交点 a_2 的坐标。求出剖切面与三角网模型的所有交点依次标记为 $\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ 并将该点集记为 A , 作为生成剖面轮廓线的点集。

用上述方法求取剖面轮廓线的交点是以三角形为判断单元,而生成三角网模型的每个相邻的三角形都会共用一条边,从而导致求剖切面与三角形3条边的交点时,除最开始相交和最后相交的几个三角形与平面的交点只需要求1次外,其他的交点都要求两次,这样使得求得的交点中存在大量重复点。因此需要通过判断两点之间的坐标是否相等来删除重复点,并将去除重复点后的交点重新保存到点集 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ 中。以某采空区在 $z_i=-759.390$ m 处的剖面为例,删除重复点之前的交点个数为254,删除重复点之后的交点个数为130。

2 剖面轮廓线提取方法

点集 A 中的交点是按照剖切面与三角网模型的相交顺序依次排列、散乱分布的,如图2为按照点集 A 中交点依次求出的顺序连成的剖面图。因此应先将点集 A 中的交点进行排序才能依次连线提取精确的剖面轮廓线。

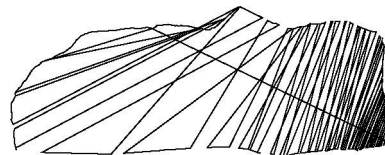


图2 无序点集剖面

Fig. 2 Sectional view of a set of unordered points

2.1 传统剖面轮廓线提取方法及存在问题

2.1.1 最小距离排序法

最小距离排序法也叫紧邻排序法^[3-5],其原理:找出点集 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ 中横坐标最小的点记为 a_L , 作为剖面轮廓线的第1个点;从点集 A 中找出距离点 a_L 最近的点 a_N 作为剖面轮廓线的第2个点(图3);然后再从点集 A 中找出距离 a_N 最近的点作为剖面轮廓线的第3个点……继续上述算法,直至点集 A 中的所有交点都添加到剖面轮廓线中。交点排序完成后,将所有的交点连线生成剖面图。

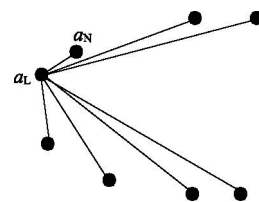


图3 最小距离排序法原理

Fig. 3 Principle of the minimum distance sorting method

虽然最小距离排序法可以将所有的点按照距离最近的原则进行排序,对于点云数据比较密集以及边界比较平缓的采空区模型比较适用。但当采空区的边界具有较大凸起、凹陷或者有遮挡物存在时,最后几个点的排序会由于前面点排序时遗漏的交点而出现错误的排序(图4(a)),形成的剖面图会与实际形态有较大差别。此外,当剖面与三角网模型的交点较少时,运用距离排序法对剖面轮廓线的数据进行排序时,会出现交叉排序的现象,导致生成错误的剖面轮廓线(图4(b))。

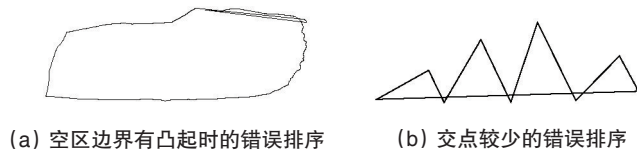


图4 最小距离法的错误排序

Fig. 4 Error sorting of the minimum distance method

2.1.2 扇形区域排序法

扇形区域排序法^[6-8]原理:设想点集A中的所有点均处于同一个圆形中,先找出点集A中最左侧的点 p_L ,再找出点集A中最右侧的点 p_R ;以 p_L-p_R 的连线为直径,以 $(p_L+p_R)/2$ 为圆心,将点集A中的数据分为两部分,上半圆中的点和下半圆中的点。将上下半圆中的点都排好序后,组合到一起就可以得到该剖面的形状(图5)。

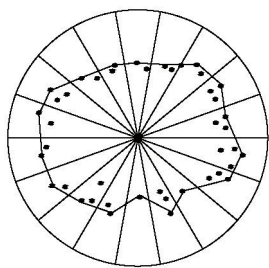


图5 扇形区域排序法原理

Fig. 5 Principle of sorting method in the sector region

计算步骤为:

1) 找出点集A中最左边和最右边的点 p_L 和 p_R ,并计算出圆心的坐标 p

$$\begin{cases} p_x = (p_{Lx} + p_{Rx})/2 \\ p_y = (p_{Ly} + p_{Ry})/2 \\ p_z = (p_{Lz} + p_{Rz})/2 \end{cases} \quad (3)$$

2) 在上半圆中分别以最左端 p_L 和最右端 p_R 的点为边界,以 p 为圆心,将上半圆划分为 N 个扇形区域(实验中取 $N=180$);

3) 根据点集A中的交点与 p 、 p_R 两点形成的夹角,判断交点属于哪个扇形区域;

4) 若同一个扇形区域中存在多个点,取离圆心 p 最远的点作为边界轮廓线上的点,而舍弃其他点(因此扇形区域划

分的越小,舍弃的点就越少,得到的剖面线与实际越接近)。

依据上述4个步骤分别找出上下半圆中所有交点所在的扇形区域,按照顺时针原则将各个扇形区域内的交点进行连线,得到完整的剖面轮廓线。

该方法对于边界变化较为平缓的采空区较为实用,当采空区边界处具有凹陷或有较大的突变时,交点根据所在的扇形区域依次进行排序,凹陷边界交点所在的扇形区域位置比平坦边界交点所在扇形区域的位置靠后,如图6(a)所示。图6(b)中,在扇形区域1内有两点 a 、 b ,按照扇形区域排序法的原理选择距离圆心 p 较远的一点作为剖面线上的点,即 a 点;在扇形区域2内,只有一点 c ,因此将 c 点记为剖面轮廓线上的点,但点 c 明显是剖面线上凹陷位置的点,按照扇形区域排序法的原则连接成的图7具有尖锐夹角的剖面边界线,导致图形严重失真。

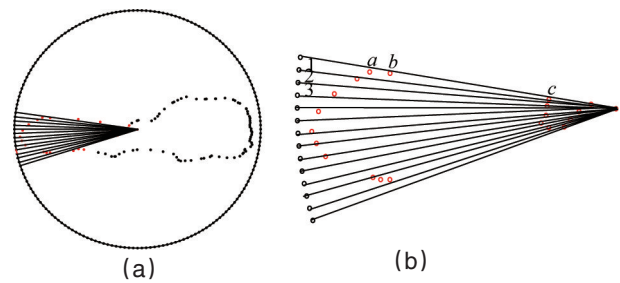


图6 交点在扇形区域内的分布

Fig. 6 Distribution of the intersection points in the sector region

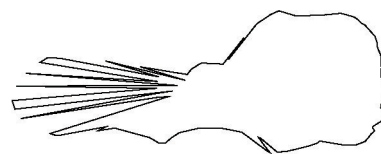


图7 扇形区域法的错误排序

Fig. 7 Error sorting of sector regional method

2.1.3 凸包算法

凸包算法^[8-10]是找出平面点集的所有点的最外层的凸包,使得所有的点都包络于凸包内(图8)。其原理为:找出点集 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ 中 x 坐标最小的点作为凸包的第1个点记为 b_1 ;计算与 b_1 连线与水平方向夹角最大的点,作为凸包的第2个点记为 b_2 ;从点集A中找出与 b_1 、 b_2 夹角最大的点(b_2 作为中间点)作为凸包的第3个点记为 b_3 ; b_2 代替 b_1 , b_3 代替 b_2 ,找出夹角最大的点;直至将所有的点均加入到凸包中^[12-15]。

凸包算法应用于提取大量散乱点云最外层的包络线时较为精确,但运用于剖面线上交点的排序时,生成最外层的凸包后一直基于凸包算法对交点排序连线,生成一圈圈的包络线,与实际剖面线不符(图9)。

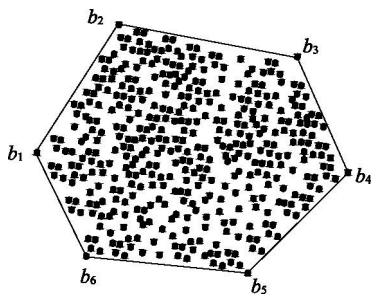


图8 凸包算法原理

Fig. 8 Principle of convex hull algorithm

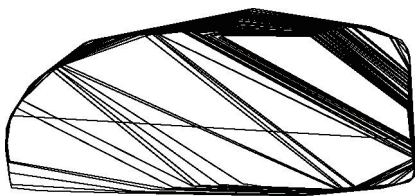


图9 凸包算法的错误排序

Fig. 9 Error sorting of convex hull algorithm

紧邻排序法和扇形区域法都可以实现对密集数据点云的特征线提取,但这两种方法对形态复杂或点云稀疏的复杂采空区是不适用的。而传统的凸包算法虽然可以正确生成最外层的包络线,但不能解决包络线内的点的排序。

2.2 凸包压入法

针对传统剖面交点排序法存在的缺陷,借助凸包算法生成的边缘轮廓线,提出凸包压入法,将包络于边缘轮廓线内的交点添加到轮廓线中,以解决复杂采空区剖面线交点的排序问题,生成准确的剖面图。

凸包压入法生成边缘轮廓线的基本思想为:

- 1) 找出点集 $A=\{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n\}$ 中 n 个数据中横坐标最小的点记为 b_1 ; 作为生成边缘轮廓线的第 1 个点;
- 2) 对于其余的 $(n-1)$ 个点, 计算与 b_1 连线与水平方向夹角的余弦值, 取出余弦值最小的点, 作为生成初始边缘轮廓线的第 2 个点;
- 3) 对于点集 A 中其余的 $(n-2)$ 个点中任一点 a_i , 可构成三角形 $b_1 b_2 a_i$, 找出 $\angle b_1 b_2 a_i$ 最大的点 a_i 作为生成初始边缘轮廓线的第 3 个点 b_3 ;
- 4) b_2 代替 b_1 , b_3 代替 b_2 , 在其余 $(n-3)$ 个点中, 重复 3), 寻找下一个生成初始边缘轮廓线的点;
- 5) 当 b_3 与 b_1 重合时, 停止数据的搜索, 即生成边缘轮廓线(图 10 实线所示)。

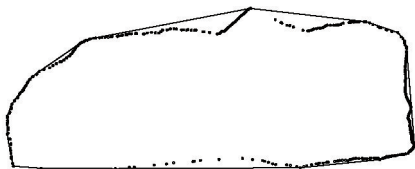


图 10 $z=z_0$ 处的边缘轮廓线

Fig. 10 External contour lines of $z=z_0$

在上述边缘轮廓线的基础上, 有大量的交点包络于边缘轮廓线内, 要想将所有的交点都添加到剖面轮廓线中, 有两个不确定性: 一是交点是随机分布的具有不确定性; 二是添加到剖面轮廓线后的完整剖面形态的不确定性, 包括交点和轮廓线位置关系的不确定性。因此需要确定边缘轮廓线中交点与轮廓线的位置关系, 将所有的交点添加到轮廓线中

凸包压入法的原理(图 11): 将边缘轮廓线 L_1 周围的交点添加到剖面线中, 首先将 b_1, b_2 分别与 L_1 周围的点连线, 当边缘轮廓线内的点在 L_1 周围时, $b_1 b_2$ 与交点连线形成的夹角为钝角, 当 $b_1 b_2$ 与凸包线 L_2, L_4 侧的点 (c_4, c_5, c_6, c_7) 进行连线时形成的夹角为锐角, 通过判断夹角的大小确定交点应添加到哪条轮廓线中。

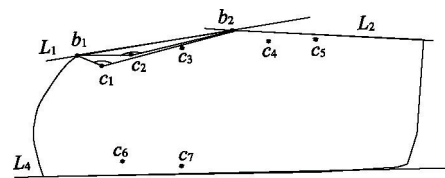


图 11 最大张角准则原理

Fig. 11 Principle of maximum angular extension

具体步骤为:

- 1) 先找出与 $b_1 b_2$ 形成最大夹角的点, 判断 3 点夹角的公式为

$$\cos \theta = \frac{(N_{1x} N_{2x} + N_{1y} N_{2y} + N_{1z} N_{2z})}{\sqrt{(N_{1x}^2 + N_{1y}^2 + N_{1z}^2)(N_{2x}^2 + N_{2y}^2 + N_{2z}^2)}} \quad (4)$$

式中, c_i 为边缘轮廓线内一点; b_1, b_2 分别为初始边缘轮廓线中一条线段的两个顶点; N_1, N_2 为 c_i 与 b_1, b_2 连线构成的向量; θ 为 b_1, c_i, b_2 形成的夹角; 当求得余弦值越小时夹角越大。图 11 中, 与 b_1, b_2 连线形成夹角最大的点为 c_2 ;

- 2) 再判断以 c_2 为顶点的夹角是否为钝角, 这是因为当点添加到正确的边缘轮廓线中时与 b_1, b_2 形成的夹角为钝角, 否则应将交点添加到其他的初始边缘轮廓线中; 用夹角的余弦值判断交点是否满足条件, 这是因为余弦值在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 为单调递减函数, 余弦值取得最小值的点即为夹角最大的点, 并且当余弦值为负值时, 该夹角为钝角。这样就可以判断点 c_2 是否满足条件, 是否应该加入到 $b_1 b_2$ 这条边缘轮廓线中;

3) 按照此方法将所有的交点进行判断并添加到相应的边缘轮廓线中, 并将排好序的交点进行连线, 即可得到剖面轮廓线。图 12 为在图 10 边缘轮廓线的基础上生成的完整剖面图。

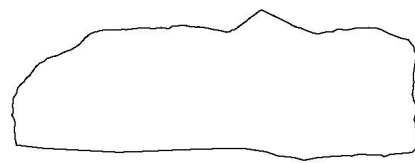


图 12 $z=z_0$ 处的完整剖面

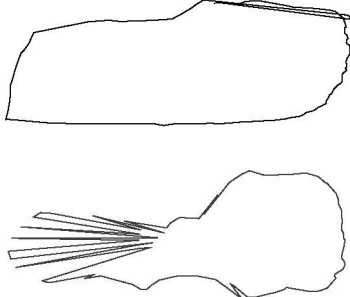
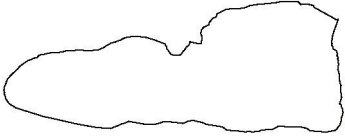
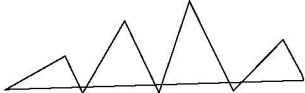

Fig. 12 Complete profile at the point of $z=z_0$

实验表明,基于钝角准则将包络于边缘轮廓线内的其他交点添加到剖面线中,提取出的剖面线精简效果理想,不但保持了采空区边界的细节而且体现了采空区边界的凸起和

凹陷,与采空区边界线实际形态吻合度最高。而且对于三角网模型与剖面交点较少,以及采空区边界发生突变时生成的剖面图与实际也相符(表1)。

表1 凸包压入法与传统方法生成的剖面

Table 1 Sectional contour of convex hull penetration method and conventional method

复杂采空区	传统的方法	凸包压入排序法
采空区的边界具有较大凸起、凹陷或有遮挡物的存在		
剖面与三角网模型的交点较少		

本文提出的凸包压入法对具有复杂边界的采空区有很好的适用性。利用凸包算法的原理生成初始边界轮廓线,而不需要对模型建立复杂的拓扑邻接关系;再利用凸包压入法将初始边界轮廓线内的其他交点添加到相应的轮廓线中,形成完整的剖面图,能够很好地表现三维模型的剖面特征。

许多形状复杂的采空区,利用CMS设备对采空区进行三维探测,获取大量的采空区点云数据,对收集的点云数据需要进行曲面重建。以52-14#采场为例形成如图13(a)的三角网格模型,沿标高方向从-790~-750 m每隔5 m进行剖切,根据三角网格模型中三角形与标高线的位置关系,计算出每一标高位置处构成剖面轮廓线的所有标高线与三角形的交点,对所有的交点按照凸包压入排序法进行排序,生成如图13(b)所示的剖面轮廓线。

3 实例应用

某铜矿是国内大型深部多金属矿山,多年的生产形成了

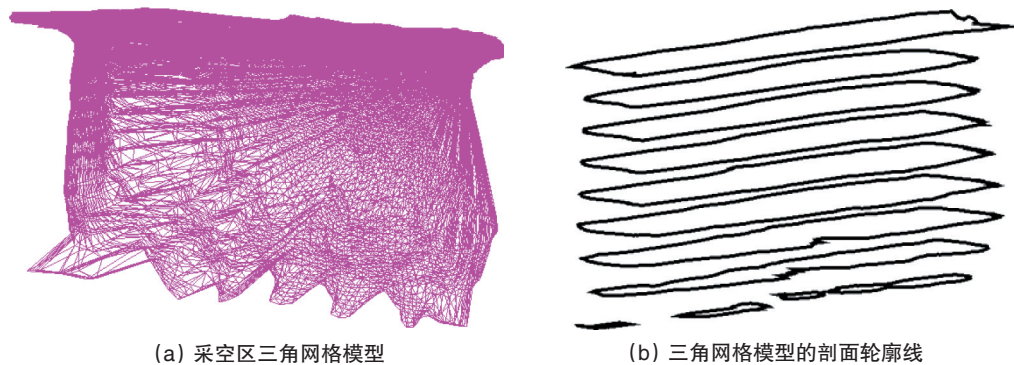


图13 52-14#采空区剖面

Fig. 13 Sectional view of goaf of 52-14#

以 $z=-765, x=2698.155$ 位置的剖面为例,根据凸包压入法生成的采场探测边界剖面线 and 设计边界剖面线复合模型,可以准确测定采场的某一位置的超挖量和欠挖量。由图14可知(红线:实际开采的矿山空区边界线;蓝线:设计的矿山空区边界线),采场顶板存在超挖(垮落)现象,超挖距离达到2.0 m。并以此可以有效地掌握采空区顶板上部巷道工程的

安全状况,从而为矿山进一步改进采场回采设计、施工管理和进行安全控制提供了一种新的可靠手段。

此外,按照凸包压入排序法求出剖面线,按照微积分的思想,将所有的剖面面积求出,然后乘以上下两剖面之间的距离进行累加,也可求出三维模型的体积,按上述方法求得的采空区体积为 54330 m^3 。

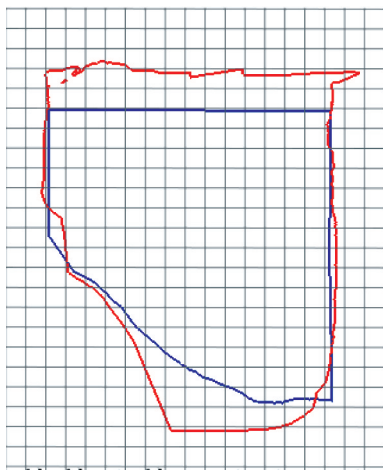


图14 采场区剖面边界线与采场设计边界线对比

Fig. 14 Comparison of the cross-sectional and designed boundary lines in the stope

4 结论

1) 在分析目前常用的三角网模型剖面轮廓线提取方法,即最小距离法、扇形区域法和凸包算法用于边界复杂的采空区剖面轮廓线提取时存在缺陷的基础上,研究改进了凸包算法,形成了适用于复杂边界采空区三角网剖面轮廓线的新的提取方法——凸包压入法。

2) 研究改进的凸包算法的实际应用表明,该算法成功克服了传统方法的缺陷,能很好地反映采空区边界的细节,有效地实现了复杂采空区剖面的生成,具有实际工程应用价值,从而为矿山实施采空区灾害防治及空区周边资源安全开采提供重要的技术支持。

参考文献(References)

- [1] 过江, 古德生, 罗周全, 等. 金属矿山采空区3D激光探测新技术[J]. 矿冶工程, 2006, 26(5): 16-19.
Guo Jiang, Gu desheng, Luo Zhouquan, et al. A new technique of 3D laser survey of finished stopes in metal mines[J]. Mining and Metallurgical Engineering, 2006, 26(5): 16-19.
- [2] 罗周全, 刘晓明, 张木毅, 等. 大规模采场三维探测及回采指标可视化计算[J]. 中南大学学报: 自然科学版, 2009, 40(6): 1732.
Luo Zhouquan, Liu Xiaoming, Zhang Muyi, et al. Stope 3D monitoring and its mining index visible calculation[J]. Journal of Central South University: Edition of Science and Technology, 2009, 40(6): 1732.
- [3] 高鹏东, 彭翔, 田劲东, 等. 三维人脸建模中面部特征轮廓线的提取[J]. 系统仿真学报, 2006, 18(8): 2105-2108, 2113.
Gao Pengdong, Peng Xiang, Tian Jindong, et al. Facial feature contour extraction for 3D head modeling[J]. Journal of System Simulation, 2006, 18(8): 2105-2108, 2113.

- [4] 李明珠, 卢章平, 徐扬, 等. 基于最小距离的NURBS曲线的形状混合方法[J]. 工程图学学报, 2008, 29(4): 96-101.
Li Mingzhu, Lu Zhangping, Xu Yang, et al. An approach to shape blending of nurbs curves based on minimum distance[J]. Journal of Engineering Graphics, 2008, 29(4): 96-101.
- [5] 王跃, 莫谈, 王玉银, 等. 三维模型剖面轮廓线的实现[J]. 现代计算机: 专业版, 2009(1): 62-64.
Wang Yue, Mo Tan, Wang Yuyin, et al. Implementation of contour from 3D model's section[J]. Modern Computer, 2009(1): 62-64.
- [6] 陈俊智, 侯克鹏. 利用OpenGL对岩体三维模型进行切割面方法研究[J]. 云南冶金, 2005, 34(1): 12-15, 20.
Chen Junzhi, Hou Kepeng. Study on three-dimension rock body cutting method using OpenGL[J]. Yunnan Metallurgy, 2005, 34(1): 12-15, 20.
- [7] 曾峦, 顾大龙. 一种基于扇形区域分割的SIFT特征描述符[J]. 自动化学报, 2012, 38(9): 1513-1519.
Zeng Luan, Gu Dalong. A sift feature descriptor based on sector area partitioning[J]. Acta Automatica Sinica, 2012, 38(9): 1513-1519.
- [8] 李凤云, 李沛谕, 高福祥, 等. 基于扇形区域的无线传感器网络位置隐私保护[J]. 东北大学学报: 自然科学版, 2013, 34(1): 21-24, 34.
Li Fengyun, Li Peiyu, Gao Fuxiang, et al. Location privacy protection for wireless sensor networks based on fan-shaped region[J]. Journal of North Eastern University: Natural Science Edition, 2013, 34(1): 21-24, 34.
- [9] 许伟. 散乱样本的凸体分割与逼近[D]. 武汉: 武汉科技大学, 2006.
Xu Wei. Convex body segmentation and approximation of scattered sample[D]. Wuhan: Wuhan University of Science and Technology, 2006.
- [10] 王杰臣. 2维空间数据最小凸包生成算法优化[J]. 测绘学报, 2002, 31(1): 82-86.
Wang Jiechen. Study of optimizing method for algorithm of minimum convex closure building for 2D spatial data[J]. Journal of Surveying and Mapping, 2002, 31(1): 82-86.
- [11] 金文华, 何涛, 刘晓平, 等. 基于有序简单多边形的平面点集凸包快速求取算法[J]. 计算机学报, 1998, 21(6): 533-539.
Jin Wenhua, He Tao, Liu Xiaoping, et al. A fast convex hull algorithm of planar point set based on sorted simple polygon[J]. Chinese Journal of Computers, 1998, 21(6): 533-539.
- [12] 戴文俊, 庞明勇, 武港山, 等. 三维模型轴向体积分布特征提取及比较算法[J]. 华中科技大学学报: 自然科学版, 2005, 33(S1): 326-330.
Dai Wenjun, Pang Mingyong, Wu Gangshan, et al. Extracting volume distribution feature from 3D models[J]. Journal of Huazhong University: Natural Science Edition, 2005, 33(S1): 326-330.
- [13] Graham R L. An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set[J]. Information Process Letter, 1972, 1(5): 132-133.
- [14] Procopiuc O, Agarwal P K, Arge L, et al. Bkd-tree: A dynamic scalable kd-tree[C]//Proceeding International Symposium on Spatial and Temporal Databases. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2003: 46-45.
- [15] Chen C L. Computing the convex hull of a simple polygon[J]. Pattern Recognition, 1989, 22(5): 561-565.

(责任编辑 王媛媛)