文章编号: 1001-0920 (2014) 07-1262-05 DOI: 10.13195/j.kzyjc.2013.0583

平滑变权缓冲算子构造及其性质

徐 宁, 党耀国

(南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 211100)

摘 要: 针对变权缓冲算子信息利用不充分以及权重选择问题, 提出一类新的平滑变权缓冲算子. 研究了该缓冲算子的性质, 证明了平滑变权缓冲算子对序列具有弱化作用并能够提升序列光滑性, 得出了平滑变权缓冲算子调节度的递推不等式; 通过多目标优化方法来确定可变权重取值, 构造可变权重的优化目标函数, 并结合遗传算法来确定权重的最优取值. 实例分析表明, 所提出的平滑变权缓冲算子能够有效提高建模精度.

关键词: 缓冲算子；平滑变权；灰色预测；调节强度

中图分类号: N941.5 **文献标志码:** A

Construction of buffer operator with smooth variable weight and its property

XU Ning, DANG Yao-guo

(College of Economics and Management，Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 211100，China. Correspondent：XU Ning，E-mail：xuning@nuaa.edu.cn)

Abstract: For the problem of not fully using information and how to optimizing the weight of buffer operator with variable weight, a new buffer operator with smooth variable weight is proposed. The property of the new buffer operator is studied, and it is proved that the operator has weakening effect to the sequence, furthermore, operator's recursive inequation of adjust intensity is obtained. Then a multi-criteria optimization method is proposed for optimizing weight, object functions are constructed and optimal weight is determined by using the genetic algorithm. Finally, the example analysis shows that the buffer operator with smooth variable weight can improve the fitting accuracy of grey prediction model effectively.

Key words: buffer operator；smooth variable weight；grey prediction；adjust intensity

0 引 言

缓冲算子是灰色预测中的重要理论, 针对系统受到冲击扰动而形成的预测陷阱, Liu[1]提出了通过弱化序列随机扰动性的缓冲算子方法, 并建立了缓冲算子基本公理. 缓冲算子以其实用性和有效性在预测建模中得到了广泛应用, 近年来缓冲算子的构造和性质得到了更多研究. 文献 [2] 构造了一类弱化缓冲算子, 以解决序列先快速增长后平缓变化的瓶颈趋势预测问题; 文献 [3] 提出了多种具有普遍意义的实用弱化缓冲算子构造, 提出用加权方法解决序列前后增长差异较大的情况; 文献 [4] 研究了缓冲算子能否提高序列光滑性的条件, 得出结论认为弱化缓冲算子能够在提高序列光滑性的同时提高建模精度, 而强化缓冲算子在降低序列光滑性的同时能够提高建模精度; 文献 [5] 从加权方式的研究入手提出了几种具有一般化特性的缓冲算子构造, 并研究了几种算子之间的关系; 文献 [6-7] 分别融合了函数生成的方法, 与缓冲算子相结合, 提出了几种具有普遍意义的派生缓冲算子; 文献 [8] 将缓冲算子推广到非等间距序列的应用中, 对多种序列进行了非等间距化处理; 文献 [9-10] 提出了变权缓冲算子, 通过权重的调整实现高阶缓冲算子的作用效果, 通过微调权重避免过度调节, 对变权缓冲算子的公理进行了补充; 文献 [11] 进一步提出了幂弱化变权缓冲算子的构造方法; 文献 [12] 提出根据序列平均增长速度构造变权缓冲算子, 并提出权重 λ 的选取需要结合智能算法进行优化; 文献 [13] 提出几何变权的方式来构建变权缓冲算子; 文献 [14] 研究了几

收稿日期: 2013-05-08；**修回日期:** 2013-06-26.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077, 71371098)；中央高校基本科研业务费专项资金项目(NC2012001, NZ2010006)；高校哲学社会科学重点研究基地重大项目(2012JDXM005).

作者简介: 徐宁(1983−), 男, 博士生, 从事灰色系统理论、数量经济的研究；党耀国(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论、数量经济等研究.

种变权缓冲算子调节强度之间的关系, 提出了调和变权缓冲算子; 文献 [15] 提出一种变权强化缓冲算子, 同样达到了解决序列前后增长速度差异较大时的预测问题; 文献 [16] 针对随机振荡序列提出一种平滑处理的数据变化方法, 提高了对序列的建模精度; 文献 [17] 以序列平均增长率为基础, 将可变权重置于指数位置构建了一种新的变权缓冲算子, 其权重也是通过遗传算法搜寻得到最优值; 文献 [18] 加入新参数 γ 构造了一种变权缓冲算子, 通过参数变化推导出多种变权强化和弱化缓冲算子, 并研究了相互之间的内在联系.

变权缓冲算子通过权重调整实现削弱冲击扰动影响, 并提高序列建模光滑性的效果. 但是, 已有的变权缓冲算子构造方法存在对信息利用不充分的问题, 而且如何选取权重 λ 同样需要进一步研究. 为此, 本文在此基础上提出平滑变权缓冲算子的构造方法, 研究平滑变权缓冲算子的基本性质以及与算术变权缓冲算子之间的关系, 并提出权重 λ 的优化目标约束准则, 结合遗传算法对权重进行优化. 最后通过算例验证了新算子对于提高预测模型拟合精度的有效性.

1　平滑变权缓冲算子构造

定义 1　设系统行为序列 $X(k)=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$. 若任意 $k=2,3,\cdots,n$, $x(k)-x(k-1)>0$, 则称序列 X 为单调递增序列; 若任意 $k=2,3,\cdots,n$, $x(k)-x(k-1)<0$, 则称序列 X 为单调递增序列; 若存在 $k,k^{'}\in\{2,3,\cdots,n\}$, $x(k)-x(k-1)>0$, 且 $x(k^{'})-x(k^{'}-1)<0$, 则称序列 X 为随机震荡序列.

定义 2　设非负系统行为序列为 $X(k)=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$, 令序列

$$\begin{cases} XD=\{x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d\},\\ x(k)d=\lambda x(n)+(1-\lambda)x(k),\ k=1,2,\cdots,n-1, \end{cases}$$

其中 $\lambda\in[0,1]$ 为可变权重, 则称算子 D 为算术变权缓冲算子.

变权缓冲算子通过可变权重 λ 的调节来实现高阶缓冲算子的作用效果. 基于充分利用 $x(k)$ 到 $x(n)$ 之间信息, 并提升对波动较大的序列的适应性, 构造平滑变权缓冲算子.

定义 3　设非负系统行为序列为 $X(k)=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$, 令序列

$$\begin{cases} XD=\{x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d\},\\ x(k)d=\\ \lambda x(k)+(1-\lambda)x(k+1)d,\ k=1,2,\cdots,n-1, \end{cases}$$

其中 $\lambda\in[0,1]$ 为可变权重, 则称算子 D 为平滑变权缓冲算子.

定义 4　设系统行为序列为 $X=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$, $r(k)$ 为序列 X 中的 $x(k)$ 到 $x(n)$ 的平均增长率, X 经缓冲算子 D 作用后得到序列 $XD=\{x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d\}$, 则称

$$\delta(k)=\left|\frac{r(k)-r(k)d}{r(k)}\right|,\ k=1,2,\cdots,n$$

为缓冲算子 D 在 k 点的调节度.

2　平滑变权缓冲算子性质

性质 1　对于非负系统行为序列 X, 令

$$\begin{cases} XD=\{x(1)d,x(2)d,\dots,x(n)d\},\\ x(k)d=\\ \lambda x(k)+(1-\lambda)x(k+1)d,\ k=1,2,\cdots,n-1. \end{cases}$$

当 X 为单调递增序列、单调递减序列以及振荡序列时, 平滑变权缓冲算子 D 为弱化缓冲算子.

证明　由定义 1 可知, 平滑变权缓冲算子的构造满足缓冲算子三公理. 设 $X=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$, 则当序列 X 为单调递增序列时, 对于任意点 $x(k)$, 经过算子 D 作用后为

$$\begin{aligned} &x(k)d=\lambda x(k)+(1-\lambda)x(k+1)d=\\ &\lambda x(k)+\lambda(1-\lambda)x(k+1)+\\ &\lambda(1-\lambda)^2x(k+2)+\cdots+(1-\lambda)^{n-k}x(n)=\\ &\lambda\sum_{j=0}^{n-k-1}(1-\lambda)^jx(k+j)+(1-\lambda)^{n-k}x(n),\\ &x(k)-x(k)d=\\ &x(k)-\Big[\lambda\sum_{j=0}^{n-k-1}(1-\lambda)^jx(k+j)+\\ &(1-\lambda)^{n-k}x(n)\Big]<0, \end{aligned}$$

所以平滑变权缓冲算子 D 降低了序列 X 的增长速度. 同理可证, 当 X 为单调递减序列时, 平滑变权缓冲算子 D 降低了序列下降速度.

当序列 X 为振荡序列时, 设 $x(h)=\max\{x(k),k=1,2,\cdots,n\}$, $x(l)=\min\{x(k),k=1,2,\cdots,n\}$, 则

$$\begin{aligned} &x(h)d=\\ &\lambda x(h)+\lambda(1-\lambda)x(h+1)+\\ &\lambda(1-\lambda)^2x(h+2)+\cdots+(1-\lambda)^{n-h}x(n)<\\ &\lambda x(h)+\lambda(1-\lambda)x(h)+\\ &\lambda(1-\lambda)^2x(h)+\cdots+(1-\lambda)^{n-h}x(h)=x(h),\\ &x(l)d=\\ &\lambda x(l)+\lambda(1-\lambda)x(l+1)+\lambda(1-\lambda)^2x(l+2)+\\ &\cdots+(1-\lambda)^{n-h}x(n)>\\ &\lambda x(l)+\lambda(1-\lambda)x(l)+\lambda(1-\lambda)^2x(l)+\\ &\cdots+(1-\lambda)^{n-h}x(h)=x(l), \end{aligned}$$

即序列 X 为振荡序列时平滑变权缓冲算子仍然为弱

化缓冲算子. 因此平滑变权缓冲算子为弱化缓冲算子. □

定理 1 对非负单调系统行为序列 $X=\{x(1), x(2),\cdots,x(n)\}$, 若序列 X 为单调递增序列, 则缓冲算子 D 能够提高序列光滑性的充要条件是 $x(k)d/x(k) < x(s)d/x(s),\ k,s=1,2,\cdots,n$, 且 $k>s$; 若序列 X 为单调递减序列, 则缓冲算子 D 能够提高序列光滑性的充要条件是$x(k)d/x(k) > x(s)d/x(s),\ k,s=1,2,\cdots,n$, 且 $k>s$.

证明 序列 X 为单调递增序列时, 证明如下:

充分性. 因为 $x(k)>x(s)$, 且已知 $x(k)d/x(k) < x(s)d/x(s)$, 所以 $x(k)d\cdot x(s) < x(k)\cdot x(s)d$. 于是有

$$x(k)d\cdot\sum_{s=1}^{k-1}x(s) < x(k)\cdot\sum_{s=1}^{k-1}x(s)d,$$

故 $x(k)d\Big/\sum\limits_{s=1}^{k-1}x(s)d < x(k)\Big/\sum\limits_{s=1}^{k-1}x(s)$.

必要性. 采用反证法. 若缓冲算子 D 使序列光滑性提升, 则表明对于任意 k 都有

$$x(k)d\Big/\sum_{s=1}^{k-1}x(s)d < x(k)\Big/\sum_{s=1}^{k-1}x(s),$$

即 $\rho_d(k)<\rho(k)$; 若结论不真, 即

$$x(k)d\Big/\sum_{s=1}^{k-1}x(s)d \geqslant x(k)\Big/\sum_{s=1}^{k-1}x(s),$$

则当 $k=2$ 时, $x(2)d/x(2)\geqslant x(1)d/x(1)$, 可得到 $x(2)d/x(1)d\geqslant x(2)/x(1)$, 即 $\rho_d(2)\geqslant\rho(2)$, 与条件矛盾, 从而结论得证.

当序列 X 为单调递减序列时, 同理可证. □

性质 2 对于非负系统行为序列 $X=\{x(1), x(2),\cdots,x(n)\}$, 若

$$\begin{cases} XD=\{x(1)d,x(2)d,\cdots,x(n)d\},\\ x(k)d=\\ \lambda x(k)+(1-\lambda)x(k+1)d,\ k=1,2,\cdots,n-1, \end{cases}$$

则平滑变权缓冲算子 D 能够提高序列 X 的光滑性.

证明 当 X 为递增序列时, 有 $x(k-1)d-x(k-1)-[x(k)d-x(k)]=(1-\lambda)[x(k)d-x(k+1)d]<0$, 所以 $x(k-1)d-x(k-1)>x(k)d-x(k)$, 且 $x(k-1)<x(k)$, 从而 $\dfrac{x(k-1)d-x(k-1)}{x(k-1)}>\dfrac{x(k)d-x(k)}{x(k)}$, 可以得到 $\dfrac{x(k-1)d}{x(k-1)}>\dfrac{x(k)d}{x(k)}$. 进一步, 可得到 $\dfrac{x(k)d}{x(k)}<\dfrac{x(s)d}{x(s)}$, $s<k$. 由定理 1 可知, 序列 XD 的光滑性高于序列 X.

当 X 为递减序列时, 同理可证. □

定理 2 假设非负单调序列为 $X=\{x(1),x(2),\cdots,x(n)\}$, X 经过平滑变权缓冲算子 D_1 作用后为 $XD_1=\{x(1)d_1,x(2)d_1,\cdots,x(n)d_1\}$, 经过算术变权缓冲算子 D_2 作用后为 $XD_2=\{x(1)d_2,x(2)d_2,\cdots,x(n)d_2\}$. 则当序列 X 为递增序列时 $x(k)d_1\leqslant x(k)d_2$, 且 $x(k)d_1-x(k)d_2<x(k+1)d_1-x(k+1)d_2$; 当序列 X 为递减序列时 $x(k)d_1\geqslant x(k)d_2$, 且 $x(k)d_1-x(k)d_2<x(k+1)d_1-x(k+1)d_2$.

证明 当序列 X 为递增序列时, $x(k)<x(k+1)$, 由算术变权缓冲算子定义可知

$$\begin{aligned}&x(k)d_1-x(k)d_2=\\&(1-\lambda)[x(k+1)d_1-x(n)]=\\&(1-\lambda)\Big[\lambda\sum_{j=0}^{n-k}(1-\lambda)^jx(k+j)+\\&(1-\lambda)^{n-k-1}x(n)-x(n)\Big]\leqslant 0,\end{aligned}$$

故 $x(k)d_1\leqslant x(k)d_2$; 进一步, 有

$$\begin{aligned}&x(k+1)d_1-x(k+1)d_2=\\&(1-\lambda)[x(k+2)d_1-x(n)],\end{aligned}$$

且 $x(k)d_1<x(k+1)d_1$. 则

$$\begin{aligned}&x(k)d_1-x(k)d_2-[x(k+1)d_1-x(k+1)d_2]=\\&(1-\lambda)[x(k+1)d_1-x(k+2)d_1]<0,\end{aligned}$$

所以 $x(k)d_1-x(k)d_2<x(k+1)d_1-x(k+1)d_2$.

同理可证, 当序列 X 为递减序列时, $x(k)d_1\geqslant x(k)d_2$, 且 $x(k)d_1-x(k)d_2>x(k+1)d_1-x(k+1)d_2$. □

性质 3 对于非负系统行为序列 X, 平滑变权缓冲算子 D 在各点的作用强度

$$\delta(k)\geqslant(1-\lambda)\cdot\left|\frac{x(n)-x(k+1)}{x(n)-x(k)}\right|\cdot\delta(k+1).$$

证明 对于任意点 $x(k)$, 因为

$$r(k)d=\frac{x(n)-x(k)d}{n-k+1},$$

$$\begin{aligned}\delta(k)=&\left|\frac{r(k)-r(k)d}{r(k)}\right|=\left|\frac{x(k)d-x(k)}{x(n)-x(k)}\right|=\\&\left|\frac{\lambda x(k)+(1-\lambda)x(k+1)d-x(k)}{x(n)-x(k)}\right|=\\&(1-\lambda)\cdot\left|\frac{x(k+1)d-x(k)}{x(n)-x(k)}\right|\geqslant\\&(1-\lambda)\cdot\left|\frac{x(n)-x(k+1)}{x(n)-x(k)}\right|\cdot\delta(k+1),\end{aligned}$$

所以, 当 $k=n-1$ 时

$$\begin{aligned}\delta(k)=&\left|\frac{r(k)-r(k)d}{r(k)}\right|=\\&\left|\frac{\lambda x(n-1)+(1-\lambda)x(n)-x(n-1)}{x(n)-x(n-1)}\right|=\lambda.\end{aligned}$$ □

3 权重确定方法

为了避免过度调节, 利用多目标优化的方法确定权重 λ 的最优取值. 建立两个约束准则作为优化目标, 即提高序列的建模光滑性, 保持序列波动所含信息的损失尽量小.

准则 1　变权缓冲算子权重 λ 的调整使得序列 XD 较原始序列 X 的光滑性得到提升, 即

$$\min[f_1(\lambda)]=\sum_{k=2}^{n-1}\rho(k).$$

另外, 需从序列形变程度衡量变换后的信息完整程度, 利用缓冲算子作用前后的序列灰色关联度构建约束准则. 在关联度算法选取上, 常用的几个关联度中斜率关联度和相对关联度主要考虑序列间相似性, 而绝对关联度则侧重序列接近性, 一般关联度侧重序列整体性. 考虑到需要衡量算子作用后的序列整体信息的完整程度, 灰色关联度需具备整体性的要求, 因此选取一般灰色关联算法作为约束准则构建基础.

准则 2　变权缓冲算子权重 λ 的调整使得序列 XD 与原始序列 X 的灰色关联度 γ 尽可能大, 即

$$\max[f_2(\lambda)]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[\gamma(x(k),x(k)d)],$$

其中

$$\gamma(x(k),x(k)d)=\frac{\min\limits_k|x(k)-x(k)d|+\rho\max\limits_k|x(k)-x(k)d|}{|x(k)-x(k)d|+\rho\max\limits_k|x(k)-x(k)d|}.$$

根据两个优化准则构建多目标优化目标函数 $f(\lambda)=f_2(\lambda)/f_1(\lambda)$, 求目标函数 $f(\lambda)$ 的最大取值, 采用遗传算法对权重 λ 进行寻优, 算法步骤如下.

Step 1: 构造初始群落. 将 $\lambda\in[0,1]$ 表示成 n 位的二进制形式, n 的大小根据 λ 精度要求确定, 则具有 m 个体的初始群落为 $\lambda(i,0), i=1,2,\cdots,m$.

Step 2: 计算适应值和生存概率. 第 k 代个体 $\lambda(i,k)$ 相应目标函数为 $f[\lambda(i,k)]$, 第 k 代个体中最大目标函数取值为 $C_{\max}$, 适应值 $\mathrm{Fit}\,[\lambda(i,k)]=C_{\max}-f[\lambda(i,k)]$, 其中 $\lambda(i,k)\in[0,1]$. 利用适应值计算个体的生存概率

$$p_i^{(k)}=\mathrm{Fit}[\lambda(i,k)]\Big/\sum_{i=1}^{m}\mathrm{Fit}[\lambda(i,k)].$$

Step 3: 个体的杂交、遗传、变异, 转至 Step 2 计算第 $k+1$ 代个体适应值和生存概率.

循环的停止准则: 当找到一个满意的解或者达到设置的最大迭代次数时停止循环.

4　算例分析

为了验证平滑变权缓冲算子在预测中的实际应用效果, 选取江苏省某开发区 2006～2010 年工业总产值进行拟合检验. 由于受市场和产业调整的影响, 年产值呈现一定波动性.

表 1　原始序列数据表

年份	2006	2007	2008	2009	2010
产值/亿元	103.7	309	355.3	407.6	632.2

对原始序列使用平滑变权缓冲算子进行建模前数据预处理, 其中权重 λ 利用多目标优化方法结合遗传算法确定, 目标函数的构造依照准则 1 和准则 2 中提出的约束条件, 则多目标优化的约束函数为 $f(\lambda)=f_2(\lambda)/f_1(\lambda)$, 其中 λ 通过遗传算法寻优近似为 0.34. 原始序列光滑度和经过平滑变权缓冲算子作用后的序列光滑度如表 2 所示.

表 2　序列光滑度对比表

年份	X 光滑度	XD 光滑度
2007	2.979 7	1.346 6
2008	0.860 9	0.655 5
2009	0.530 7	0.451 3
2010	0.537 8	0.353 7

从表 2 中序列光滑度计算结果可以看出, 原始序列的光滑性达不到建模要求, 经过平滑变权缓冲算子作用后得到序列 XD, 序列 XD 光滑度明显得到提高, $x(4)$、$x(5)$ 所对应的光滑度分别为 0.451 3、0.353 7, 满足建模要求. 对原始序列直接建模得到拟合值记为 $\hat{X}_1$, 经过平滑变权缓冲算子作用后建立 GM(1, 1) 模型得到拟合值 $\hat{X}_2$, 预测结果如表 3 所示. 另外, 作为对比, 对原始序列采用算术变权缓冲算子进行处理并建模, 为保持一致, 可变权重取 0.34, 得到拟合序列 $\hat{X}_3$. 具体计算和分析结果见表 3.

表 3　预测拟合相对误差对比

年份	原始序列	$\hat{X}_1$	相对误差/%	$\hat{X}_2$	相对误差/%	$\hat{X}_3$	相对误差/%
2006	103.7	103.700 0	0	103.744 3	0.04	134.98	23.17
2007	309	272.546 2	11.8	311.406 2	0.77	303.48	1.82
2008	355.3	352.916 8	0.67	354.803 6	0.14	401.18	11.44
2009	407.6	456.987 9	12.12	404.248 8	0.83	505.24	19.33
2010	632.2	591.748 2	6.4	631.388 8	0.13	616.09	2.62
平均相对误差/%			6.198		0.382		11.67

5　结　论

变权缓冲算子以可变权重调节方式取代传统高阶缓冲算子, 在调节方式上拓展了缓冲算子的灵活性, 也使得算子的构造更加灵活. 本文研究了平滑方式的变权缓冲算子构造问题, 对平滑变权缓冲算子的结构、性质以及作用强度等特征进行了研究. 一方面, 改变了以往变权缓冲算子对数据利用不够充分的不足; 另一方面, 新的变权缓冲算子对序列光滑性的提

升更加有效, 并与算术变权缓冲算子进行了比较. 最后通过算例表明了所提出的平滑变权缓冲算子以及权重 λ 寻优准则对于灰色预测模型拟合精度的提高是有效的.

参考文献(References)

[1] Liu S F. The three axioms of buffer operator and their application[J]. The J of Grey System, 1991, 3(1): 39-48.

[2] 崔立志, 刘思峰, 吴正鹏. 关于新的弱化缓冲算子的研究及其应用[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1252-1256.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. Study on new weakening buffer operators and their applications[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1252-1256.)

[3] 党耀国, 刘思峰, 刘斌. 关于弱化缓冲算子的研究[J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.
(Dang Y G, Liu S F, Liu B. Study on the buffer weakening operator[J]. Chinese J of Management Science, 2004, 12(2): 108-111.)

[4] 王正新, 党耀国, 裴玲玲. 缓冲算子的光滑性研究[J]. 系统工程理论与实践, 2010, 30(9): 1643-1649.
(Wang Z X, Dang Y G, Pei L L. The smoothness of buffer operator[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2010, 30(9): 1643-1649.)

[5] 魏勇, 孔新海. 几类强弱缓冲算子的构造及其内在联系[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 196-202.
(Wei Y, Kong X H. Constructing methods of several kinds of strengthening and weakening buffer operators and their inner link[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 196-202.)

[6] 吴正鹏, 刘思峰, 米传民, 等. 弱化缓冲算子性质研究[J]. 控制与决策, 2010, 25(6): 958-960.
(Wu Z P, Liu S F, Mi C M, et al. Study on weakening buffer operator based on strictly monotone function[J]. Control and Decision, 2010, 25(6): 958-960.)

[7] Wu Z P, Liu S F, Mi C M, et al. Study on the sequence of weakening buffer operator based on old weakening buffer operator[J]. J of Grey System, 2008, 20(3): 229-234.

[8] Qin Wang, Yong Wei. A kind of new strengthening buffer operator suitable for non-equigap GM(1,1) model[J]. J of Grey System, 2009, 21(1): 105-112.

[9] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 变权缓冲算子及其作用强度的研究[J]. 控制与决策, 2009, 24(8): 1218-1222.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Study on buffer operators with variable weights and their effect strength to original sequence[J]. Control and Decision, 2009, 24(8): 1218-1222.)

[10] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 变权缓冲算子及缓冲算子公理的补充[J]. 系统工程, 2009, 27(1): 113-117.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. Buffer operators with variable weights and the complement of axioms[J]. System Engineering, 2009, 27(1): 113-117.)

[11] 王正新, 党耀国, 刘思峰. 一类幂弱化缓冲算子及其性质研究[J]. 控制与决策, 2012, 27(10): 1482-1488.
(Wang Z X, Dang Y G, Liu S F. A sort of power weaken buffer operators and its properties[J]. Control and Decision, 2012, 27(10): 1482-1488.)

[12] 钱吴永, 党耀国. 基于平均增长率的弱化变权缓冲算子及其性质[J]. 系统工程, 2011, 29(1): 105-110.
(Qian W Y, Dang Y G. Weakening buffer operator with variable weights based on the average growth rate and its properties[J]. System Engineering, 2011, 29(1): 105-110.)

[13] 张庆, 刘思峰, 王正新, 等. 几何变权缓冲算子及其作用强度研究[J]. 系统工程, 2009, 27(10): 113-117.
(Zhang Q, Liu S F, Wang Z X, et al. Geometry buffer operators with variable weights and the intensity of their influence on original sequence[J]. System Engineering, 2009, 27(10): 113-117.)

[14] 李雪梅, 党耀国, 王正新. 调和变权缓冲算子及其作用强度比较[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(11): 2486-2492.
(Li X M, Dang Y G, Wang Z X. Harmonic buffer operators with variable weights and effect strength comparison[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(11): 2486-2492.)

[15] 袁丽君, 姚天祥. 几类变权强化缓冲算子的构造方法[J]. 统计与决策, 2011(6): 45-47.
(Yuan L J, Yao T X. Constructing methods of several kinds of strengthening buffer operators[J]. Statistics and Decision, 2011(6): 45-47.)

[16] 曾波, 刘思峰. 基于振幅压缩的随机振荡序列预测模型[J]. 系统工程理论与实践, 2012, 32(11): 2493-2497.
(Zeng B, Liu S F. Prediction model of stochastic oscillation sequence based on amplitude compression[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2012, 32(11): 2493-2497.)

[17] Dai W Z, Wu Z H, Yang A P. New buffer operators with variable weight based on average tempo and their optimization[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2011, 1(2): 168-177.

[18] 高岩, 周德群, 刘晨琛, 等. 新变权缓冲算子的构造方法及其内在联系[J]. 系统工程理论与实践, 2013, 33(2): 489-497.
(Gao Y, Zhou D Q, Liu C C, et al. Constructing methods of new buffer operators with variable weights and their inner link[J]. System Engineering-Theory & Practice, 2013, 33(2): 489-497.)

(责任编辑: 曹洪武)