§1　开集、邻域、闭集、闭包、内部的特征性质

2005.3.8 第 1、2 节课

一、　开集的特征性质

(1) $\Phi,\ X \in \tau$（空集和全空间是开集）；

(2) 若 $A, B \in \tau$，则 $A \cap B \in \tau$（有限个开集的交是开集）；

(3) 若 $A_i \in \tau\ \ (i \in I)$，则 $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$（任意个开集的并是开集）.

二、　闭集的特征性质

- **定理**

(1) 空集和全空间是闭集；

(2) 有限个闭集的并是闭集；

(3) 任意个闭集的交是闭集.

- De Morgan 公式
  1) 交的余等于余的并；
  2) 并的余等于余的交.

三、　邻域的特征性质

- **定理**

(1) 若 $U \in \mathrm{N}_x$，$U \subset V$，则 $V \in \mathrm{N}_x$；

(2) 若 $U_1, U_2 \in \mathrm{N}_x$，则 $U_1 \cap U_2 \in \mathrm{N}_x$；

(3) 若 $U \in \mathrm{N}_x$，则 $x \in U$；

(4) 若 $V \in \mathrm{N}_x$，则存在 $W \in \mathrm{N}_x$ 使得 $\forall y \in W$，都有 $V \in \mathrm{N}_y$.

四、　闭包的特征性质

- **定理**

(1) $\overline{\phi} = \phi$；

(2) $\overline{A} \supset A$；

(3) $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$；

(4) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

注：只证 (3) 和 (4)

五、　内部的特征性质

- **定理**

(1) $X = X^\circ$；

(2) $A \supset A^{\circ}$；

(3) $A^{\circ\circ} = A^{\circ}$；

(4) $(A \cap B)^{\circ} = A^{\circ} \cap B^{\circ}$

注：只证（3）和（4）

六、 序列和收敛序列

- 称映射 $f: \mathbb{Z}^{+} \to X$ 为 X 中的一个序列（或点列），
- 序列 $f: \mathbb{Z}^{+} \to X$ 记作 $\{f(n)\}$ 或 $\{x_n\}$ 或 $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}^{+}}$，这里 $x_n = f(n)$.
- 设 (X, τ) 是拓扑空间， $\{x_n\}$ 是 X 中的点列，若存在 $x \in X$ ，满足下列条件：

只要 U 是 x 的邻域，一定存在正整数 N ，使得当 $n > N$ ，必有 $x_n \in U$

则称点列 $\{x_n\}$ **收敛**.

七、 子空间

- 度量空间的子空间

度量空间 (X, d) 的子空间 $(A, d|_{A \times A})$ 是指 $A \subset X$ ，且 $d_{|A \times A}: A \times A \to \mathbb{R}$ 是 $d: X \times X \to \mathbb{R}$ 的限制.

- 拓扑空间的子空间

拓扑空间 (X, τ) 的子空间 $(A, \tau|_A)$ 是指 $A \subset X$ ，且 $\tau|_A = \{G \cap A \mid G \in \tau\}$

- 子空间 $(A, \tau|_A)$ 的开集 V 是拓扑空间 (X, τ) 的某个开集 U 与 A 的交集.
- 子空间 $(A, \tau|_A)$ 的闭集 F 是拓扑空间 (X, τ) 的某个闭集 F_1 与 A 的交集.

习 题

1. 在实数空间 $\mathbf{R}$ 中， $\mathbf{Q}' = ?$， $\overline{\mathbf{Q}} = ?$.
2. 设 X 为拓扑空间, $A, B \subset X$. 证明 若 $A' \subset B \subset A$,则 B 为闭集.
3. 设 X 为拓扑空间, $A \subset X$. 证明 若 $x \in A'$,则 $x \in (A - \{x\})'$.
4. 证明度量空间中的单点集为闭集,且每个子集的导集为闭集.