第一章　　拓扑空间与连续映射

第一节　　拓扑空间

数学分析中连续概念的刻画

设函数 $f: E^1 \to E^1$，

则 f 在 x_0 处连续 $\Leftrightarrow \forall x_n \to x_0 \Rightarrow f(x_n) \to f(x_0)$。（**序列语言**）

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0,$ 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时，$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$。（$\varepsilon - \delta$ **语言**）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是包含 $f(x_0)$ 的开集，则 $\exists$ 包含 x_0 的开集 U，使 $f(U) \subset V$。

（**开集语言**）

$\Leftrightarrow$ 若 V 是 $f(x_0)$ 的邻域，则 $f(U)$ 是 x_0 的邻域 U。（**邻域语言**）

1．1 拓扑空间的定义

Def.1　设 X 是非空集合，若 X 的一个子集族 τ 它满足：

（1） $\{X, \varnothing\} \subset \tau$；

（2） τ 中任意多个成员的并集仍在 τ 中；

（3） τ 中两个成员的交集仍在 τ 中。

则称 τ 为 X 的一个拓扑，称 (X, τ) 为一个**拓扑空间**，称 τ 中的成员为这个拓扑空间的 τ **开集**，一般都简称为**开集**。(X, τ) 有时也记作 X。

例子

Ex.1　（**离散拓扑**）设 X 是非空集合，拓扑 $\tau = 2^X$。

Ex.2　（**平凡拓扑**）设 X 是非空集合，拓扑 $\tau = \{X, \varnothing\}$。

Ex.3　（**余有限拓扑**）设 X 是任意集合，

拓扑 $\tau_f = \{A^c \mid A\text{是}X\text{的有限子集}\} \cup \{\varnothing\}$。（证明留作习题）

Ex.4　（**余可数拓扑**）设 X 是任意集合,，

拓扑 $\tau_c = \{A^c \mid A\text{是}X\text{的可数子集}\} \cup \{\varnothing\}$，

Ex.5　（**欧氏拓扑**）设 $\mathbf{R}$ 是全体实数的集合，

拓扑$\tau_e=\{U\,|\,U$是若干个开区间的并集$\}$。

注 事实上，**R** 中开集的是若干个互不相交的开区间的并集。

拓扑的比较

Def.2 设τ_1和τ_2都是集合 X 上的拓扑，如果$\tau_1\subset\tau_2$，则称τ_2比τ_1大（或者说τ_2比τ_1精细）。

显然$\tau_f\subset\tau_c,\tau_f\subset\tau_e$。

问题 1（如何构造具体的拓扑）

（1）若 X 有一个元素，则 X 上一共有几个拓扑？（**1** 个）

（2）若 X 有两个元素，则 X 上一共有几个拓扑？（**4** 个）

（3）若 X 有三个元素，则 X 上一共有几个拓扑？（**29** 个）

（4）若 X 有 n（$n\geq 4$）个元素，则 X 上一共有几个拓扑？(思考题)

例 X=$\{a,b,c\}$上有 29 个拓扑：

(1)$\{\varnothing,\{a,b,c\}\}$;

(2)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a,b\}\}$;

(3)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a,c\}\}$

(4)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{b,c\}\}$;

(5)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a\}\}$;

(6)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{b\}\}$;

(7) $\{\{a,b,c\},\varnothing,\{c\}\}$;

(8)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a\},\{b,c\}\}$;

(9) $\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a\},\{a,c\}\}$;

(10) $\{\{a,b,c\},\varnothing,\{b\},\{b,c\}\}$

(11)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{c\},\{b,c\}\}$;

(12) $\{\{a,b,c\},\varnothing\ ,\ \{b\},\{a,b\}\}$;

(13)$\{\{a,b,c\}$，$\varnothing$，$\{c\},\{a,c\}\}$;

(14)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a\},\{a,b\}\}$;

(15)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{b\},\{a,c\}\}$;

(16) $\{\{a,b,c\},\varnothing,\{c\},\{a,b\}\}$;

(17)$\{\{a,b,c\},\varnothing\ ,\ \{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$;

(18)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{a\},\{a,c\},\{a,b\}\}$;

(19)$\{\{a,b,c\},\varnothing,\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$;

(20)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$;

(21) $\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a\},\{c\},\{a,c\}\}$;

(22)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{c\},\{b\},\{b,c\}\}$;

(23)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a\},\{c\},\{a,c\},\{b,c\}\}$;

(24)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a\},\{b\},\{a,b\},\{b,c\}\}$;

(25)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a,c\},\{a,b\},\{a\},\{c\}\}$;

(26)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{c\},\{b\},\{a,b\}\ \{b,c\}\}$;

(27)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{a\},\{b\},\{a,b\},\{a,c\}\}$;

(28)$\{\varnothing,\{a,b,c\},\{c\},\{b\},\{b,c\},\{a,c\}\}$;

(29)$\{\varnothing,\{a,b,c\}$，$\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{a,c\},\{b,c\}\}$。

问题 2 （1）若 τ_1 和 τ_2 都是 X 上的拓扑，则 $\tau_1\cup\tau_2$ 是 X 上的拓扑吗？（答案：不是）

(2) 若 τ_1 和 τ_2 都是 X 上的拓扑，则 $\tau_1 \cap \tau_2$ 是 X 上的拓扑吗？（答案：**是**）

问题 3　设 (X_1, τ_1) 和 (X_2, τ_2) 都是拓扑空间，则如何给出 $X_1 \times X_2$ 上的拓扑结构？（**乘积拓扑**）

问题 4 设 (X, τ) 是拓扑空间，$(X, \sim)$ 是等价关系，则如何给出商集 $X/_{\sim}$ 上的拓扑结构？（**商拓扑**）

作业　P.20　ex.1　ex.5