1．3 拓扑空间中的几个基本概念

闭集

Def. 1 拓扑空间 X 的子集 A 称为闭集，如果 A^c 是开集。

Pro. 1 拓扑空间的闭集有下列性质：
（1） X 和 $\varnothing$ 都是闭集；
（2）任意多个闭集的交集是闭集；
（3）有限多个闭集的并集是闭集。

邻域、内点和内部

Def. 2 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，$x\in A$。如果存在开集 U，使得 $x\in U\subset A$，则称 x 是 A 的一个内点，也称 A 是 x 的一个邻域。A 的所有内点所成之集称为 A 的内部，记为 A^0。

Pro. 2 （1）若 $A\subset B$，则 $A^0\subset B^0$；

（2）A^0 是包含在 A 中的所有开集的并集，因此是包含在 A 中的最大开集；

（3） $A^0\supset A\Leftrightarrow A^0=A\Leftrightarrow A$ 是开集；

（4） $(A\bigcap B)^0=A^0\bigcap B^0$；

（5） $(A\bigcup B)^0\supset A^0\bigcup B^0$.

聚点与闭包

Def. 3 设 A 是拓扑空间 X 的一个子集，$x\in A$。如果 x 的每个邻域都含有 $A\setminus\{x\}$ 中的点，则称 x 为 A 的**聚点**。A 的所有聚点的所成之集称为 A 的**导集**，记作 A'。称集合 $A\bigcup A'$ 为 A 的**闭包，记作** $\overline{A}$.

Pro. 3 若拓扑空间 X 的子集 A 与 B 互为余集，则 $\overline{A}$ 与 B^0 互为余集。

Pro. 4 （1）若 $A\subset B$，则 $\overline{A}\subset\overline{B}$；

（2） $\overline{A}$ 是所有包含 A 的闭集的交集，因此是包含 A 的最小闭集；

（3） $\overline{A}=A\Leftrightarrow A$ 是闭集；

（4） $\overline{A\bigcup B}=\overline{A}\bigcup\overline{B}$；

（5） $\overline{A\cap B}\subset\overline{A}\cap\overline{B}$.

如果 $\overline{A}=X$ ，则称拓扑空间 X 的子集 A 在 X 中是**稠密的**。如果拓扑空间 X 有一个（至多）可数的稠密子集，则称 X 是**可分的拓扑空间**。

1．4 子空间

Pro. 5 设 A 是拓扑空间 (X,τ) 的一个非空子集，则 A 的子集族

$$\tau_A=\{U\cap A\,|\,U\in\tau\}$$

是 A 上的一个拓扑，

Def. 4 称 A 的子集族 $\tau_A=\{U\cap A\,|\,U\in\tau\}$ 为由 τ 导出的**子空间拓扑**，

称 (X,τ_A) 为 (X,τ) 的**子空间**。

Pro. 6 设 X 是拓扑空间，$B\subset A\subset X$ ，则 C 是子空间 A 的闭集 $\Leftrightarrow$ C 是 A 与 X 的某一个闭集的交集。

Pro. 7 设 X 是拓扑空间， $B\subset A\subset X$ ，则

（1） 若 B 是 X 的开（闭）集，则 B 也是 A 的开（闭）集；

（2） 若 A 是 X 的开（闭）集，B 是 A 的开（闭）集，则 B 也是 X 的开（闭）集。

例

设 $X=\{a,b,c,d\}$ ，在 X 上定义拓扑 $\tau=\{\varnothing,X,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\}$ 。

（1） 写出 (X,τ) 的所有开集与闭集；

（2） 设 $A=\{a,c\}$ ，求 $\overline{A},A^0$ 。

答案

（1）开集 $\varnothing,X,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}$ ；

闭集 $\varnothing,X,\{b,c,d\},\{a,b\},\{b\}$ 。

（2） $\overline{A}=\{a,b,c,d\}$ ， $A^0=\{a\}$ 。

作业 P.20 ex.6、ex.10.