

时变概率随机拓扑条件下高阶群系统一致性分析

王忠^{1,2}, 席建祥¹, 姚志成¹, 刘光斌¹

(1. 第二炮兵工程大学控制工程系, 西安 710025; 2. 中国人民解放军 96215 部队, 广西柳州 545000)

摘要: 在时变连接概率的随机拓扑条件下, 研究了离散时间高阶线性群系统的一致性。首先, 给出一个依赖于相邻主体间拓扑连接概率和各个主体自身信息的随机控制协议; 然后, 应用状态空间分解法分析离散时间高阶线性群系统的一致性, 给出了在连接概率时变的随机拓扑条件下以概率为 1 实现一致的充分必要条件; 进而, 确定了随机拓扑条件下离散时间高阶线性群系统的一致函数; 最后, 通过数值分析验证了所得出结论的正确性。

关键词: 时变概率; 随机拓扑; 高阶群系统; 一致性

中图分类号: TP18

文献标志码: A

Consensus problems of high-order swarm system over random topologies with time-varying probability

WANG Zhong^{1,2}, XI Jian-xiang¹, YAO Zhi-cheng¹, LIU Guang-bin¹

(1. Department of Control Engineering, The Second Artillery Engineering University, Xi'an 710025, China; 2. The 96215 Troops of PLA, Liuzhou 545000, China. Correspondent: XI Jian-xiang, E-mail: xijianxiang933@126.com)

Abstract: Consensus problems of high-order swarm system over random topologies with time-varying communication probability are investigated. Firstly, based on the random relative information of neighboring agents, distributed dynamic consensus protocols are proposed. Then, by using the state space decomposition approach to analyze discrete-time high-order multi-agent network, a necessary and sufficient condition for consensus over random topologies with probability 1 is given. Moreover, the explicit expression of the consensus function is presented via random topologies. Finally, numerical simulations demonstrate the correctness of the obtained theoretical results.

Key words: time-varying probability; random topologies; high-order swarm systems; consensus

0 引言

近年来, 线性群系统协同控制得到了广泛的应用, 例如多无人机系统、多机器人系统、多传感器系统、多主体支撑系统等, 而一致性问题为群系统协同控制的一个基本问题。到目前为止, 线性群系统一致性问题的研究成果主要集中于一阶线性群系统^[1-7]和二阶线性群系统^[8-12], 已形成了较为完善的理论体系。然而, 在很多实际应用中, 群系统需要被建模为高阶线性群系统, 每个主体的状态变量增多且相互耦合, 使得高阶一致性问题更加复杂。

目前, 对高阶线性群系统的一致性问题的研究成果主要包括固定拓扑条件下的一致性^[13-21]和切换拓扑条件下的一致性^[22-24]等。高阶线性群系统的各主体通常被描述为高阶积分器模型, 而 Xi 等^[19-22]利用

状态空间分解法进行一致性研究开辟了新的途径。状态空间分解法将线性群系统一致性问题转化为降阶系统的稳定性问题, 可同时确定线性群系统的相对运动和绝对运动, 并且可处理延迟、扰动和切换拓扑条件下线性群系统的一致性问题。

从现有研究成果可以看出, 作用拓扑的谱特性是影响群系统一致性的一个重要因素。对于无向作用拓扑一般要求是连通的, 而有向作用拓扑一般要求包含生成树或强连通。上述文献中对线性群系统一致性的研究成果主要集中在固定拓扑条件或切换拓扑等条件下的一致性。然而, 很多情况下各主体间是否能正常连接通信是一个随机事件, 而非一个确定事件, 因而形成了随机拓扑条件下线性群系统一致性问题。

在随机拓扑条件下一阶线性群系统和二阶线性

收稿日期: 2013-05-15; 修回日期: 2013-10-09.

基金项目: 国家自然科学基金项目(61374054); 陕西省自然科学基金项目(2013JQ8038).

作者简介: 王忠(1986-), 男, 博士生, 从事多智能体系统协同控制的研究; 刘光斌(1963-), 男, 教授, 博士生导师, 从事导航制导与控制、多智能体系统协同控制等研究。

群系统一致性问题的研究中^[25-30], 文献 [25] 将作用拓扑建模成无向随机图, 证明了如果作用拓扑是连通的, 则一阶线性群系统以概率 1 获得一致. Tahbaz-Salehi 等^[26]利用随机过程的各态历经性和概率论给出了一个群系统几乎渐近一致的充分必要条件, 随后他们在文献 [28] 中证明了若随机图的期望图包含有向生成树, 则群系统就可以实现渐近一致. Abaid^[29]分析了有确定出度的随机拓扑条件下离散时间线性群系统的一致性. 对于高阶线性群系统随机一致性问题, Sun 等^[31-32]通过给出逐步收敛因子和渐近收敛因子的概念来衡量群系统的收敛性与收敛速度, 但没有给出随机拓扑条件下一致性问题的充分必要条件, 并且将高阶线性群系统各主体描述为特定的积分器形式.

本文研究离散时间高阶线性群系统在无向随机拓扑条件下的一致性, 且该随机拓扑的连接概率是时变的. 考虑了一个依赖于相邻主体间拓扑连接概率和各个主体自身信息的随机控制协议. 应用状态空间分解法对离散时间高阶线性群系统一致性进行分析, 给出了群系统以概率为 1 获得随机一致的必要条件. 同时, 确定了高阶线性群系统以概率为 1 实现一致情况下的一致函数.

与现有文献相比, 本文的主要贡献有两个方面: 1) 将随机拓扑条件下的高阶线性群系统各个主体考虑为一般形式, 并为系统实现随机拓扑条件下的一致提供了一个充分必要条件; 而文献 [31-32] 将各主体建模为积分器形式, 并且没有给出实现一致的充分必要条件. 2) 运用状态空间分解法分析高阶线性群系统在随机拓扑条件下的一致性; 而文献 [19-22] 中考虑的则是固定和切换拓扑条件下的一致性.

另外, 文中用 $\mathbf{0}$ 表示适当维数的零矩阵、零向量以及零子空间, $\mathbf{1}$ 表示元素全为 1 的适当维数列向量, 上标 H 表示矩阵的 Hermitian 转置.

1 预备知识

1.1 图论基础

一个随机无向图 $G = \mathcal{G}(\mathcal{V}, \mathcal{E}, \mathcal{W})$ 由节点集合 $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$, 边集合 $\mathcal{E} \subseteq \{(v_i, v_j), v_i, v_j \in \mathcal{V}\}$ 和权重邻接矩阵 $\mathcal{W} = [w_{ij}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 组成. 邻接矩阵 \mathcal{W} 的元素满足 $w_{ij} \geq 0$ 和 $w_{ii} = 0$, 并且当且仅当 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 时 $w_{ij} > 0$. 节点指标集是一个有限自然数集 $\mathcal{I}_N = \{1, 2, \dots, N\}$. 节点 v_i 的邻居集定义为 $\mathcal{N}_i = \{v_j \in \mathcal{V} : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}\}$, 度定义为 $\text{deg}(v_i) = \sum_{j \in \mathcal{N}_i} w_{ij}$, 度矩阵 \mathcal{D} 定义为对角元为各节点度的对角矩阵. 图 G 的拉普拉斯矩阵定义为 $L = \mathcal{L}(G) = \mathcal{D} - \mathcal{W}$. 如果 G 中没有孤立点, 则称该图是连通的. 下面的引理将说明无向

图拉普拉斯矩阵的基本性质^[33].

引理 1 设 $L \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是无向图 G 的拉普拉斯矩阵, 则有如下结论:

- 1) L 至少具有一个 0 特征值, 即 $L\mathbf{1} = \mathbf{0}$, 其中 $\mathbf{1} = [1, 1, \dots, 1]^T \in \mathbf{R}^N$;
- 2) 若 G 连通, 则 $\mathbf{0}$ 是 L 的唯一特征值, 且其余特征值均为正实数, 即 $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$;
- 3) 若 G 不连通, 则 L 至少有两个 0 特征值, 特征值 $\mathbf{0}$ 的几何重复度等于代数重复度.

本文研究的群系统的通信拓扑可描述成随机无向图 $\mathcal{G}_p(k) = \mathcal{G}_p(\mathcal{V}, \mathcal{E}(k), \mathcal{W}(k))$, 第 i 个主体用节点 v_i 表示. 两个节点之间是否连接是一个随机事件, 即 $(v_i, v_j) \in \mathcal{E}$ 是否连接以概率 $0 \leq p_{ij}(k) \leq 1$ 确定. 在 k 时刻, $\mathcal{N}_i(k) = \{v_j \in \mathcal{V} : (v_j, v_i) \in \mathcal{E}(k)\}$ 表示节点 v_i 的邻居集, 连接概率矩阵记为 $P(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$, 其元素 $[P(k)]_{ij} = p_{ij}(k)$ 且 $p_{ii}(k) = 0$. 邻接矩阵 $\mathcal{W}(k)$ 的元素 $[\mathcal{W}(k)]_{ij} = w_{ij}(k)$ 是统计独立的, 可表示为

$$w_{ij}(k) = \begin{cases} w_{ij}, & p = p_{ij}(k); \\ 0, & p = 1 - p_{ij}(k). \end{cases}$$

$\bar{\mathcal{G}}$ 表示随机图序列 $\{\mathcal{G}_p(k)\}_0^\infty$ 的期望图, $\bar{\mathcal{G}} = \bigcup_{k=0}^\infty \mathcal{G}_p(k)$, 其邻接矩阵为 $E[\mathcal{W}(k)] = W$, $[W]_{ij} = w_{ij}p_{ij}(k)$, 记度矩阵为 $E[\mathcal{D}(k)] = D$.

本文的主要结论是在以下假设的前提下得到的.

假设 1 对于所有 $k \geq 0$ 时刻, $\mathcal{G}_p(k)$ 服从独立同分布, 即各个时刻每条边是否连接与时刻无关.

假设 2 对于所有 $k \geq 0$ 时刻, $\mathcal{G}_p(k)$ 的连接概率矩阵 $P(k)$ 满足以下条件: 第 i 个与第 j 个主体间连接概率 $p_{ij}(k)$ 服从 $[a_{ij}, b_{ij}]$ 上的均匀分布, $0 \leq a_{ij} < b_{ij} \leq 1$, 若 $p_{ij}(k) = 0$, 则表示第 i 个与第 j 个主体间确定不连接. 可见 $E[P(k)] = P$, 其中 $p_{ij} = \frac{(b_{ij} - a_{ij})}{2}$.

记时变连接概率随机拓扑 $\mathcal{G}_p(k)$ 的期望拓扑为 $\bar{\mathcal{G}}$. 由上述假设知, $\bar{\mathcal{G}}$ 的邻接矩阵满足 $[\bar{W}]_{ij} = w_{ij}p_{ij}$, 相应的度矩阵为 \bar{D} , 则拉普拉斯矩阵 $\bar{L} = \bar{D} - \bar{W}$.

1.2 问题描述

在 $k (k = 0, 1, 2, \dots)$ 时刻, 考虑如下一个由 N 个同构主体构成的离散时间高阶线性时不变系统:

$$x_i(k+1) = Ax_i(k) + Bu_i(k). \quad (1)$$

其中: $i \in \mathcal{I}_N$, $A \in \mathbf{R}^{d \times d}$, $B \in \mathbf{R}^{d \times m}$, $x_i(k)$ 为主体 i 的状态, $u_i(k)$ 为控制输入. 考虑如下一致性控制协议:

$$u_i(k) = K_1 x_i(k) + K_2 \sum_{j \in \mathcal{N}_i(k)} w_{ij}(k) (x_j(k) - x_i(k)). \quad (2)$$

其中: $i, j \in \mathcal{I}_N$, $K_1, K_2 \in \mathbf{R}^{m \times d}$, $\mathcal{N}_i(k)$ 表示主体 i 的

邻居集, $w_{ij}(k)$ 为第 j 个主体对主体 i 的作用权重. 在协议 (2) 的作用下, 系统 (1) 可以描述为

$$x(k+1) = (I_N \otimes (A + BK_1) - L(k) \otimes BK_2)x(k). \quad (3)$$

其中: $x(k) = [x_1^T(k), x_2^T(k), \dots, x_N^T(k)]^T \in \mathbf{R}^{Nd}$, I_N 为 $N \times N$ 维的单位矩阵, $L(k) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为无向随机拓扑在时刻 k 的拉普拉斯矩阵. 下面给出系统 (3) 以概率为 1 获得一致的定义.

定义 1 对于任意给定的有界初始状态 $x(0)$, 如果存在一个与 $x(0)$ 相关的向量函数 $c(k) \in \mathbf{R}^d$, 使得 $\lim_{k \rightarrow \infty} (x(k) - c(k)) = 0$ 以概率为 1 成立, 则称系统 (3) 以概率为 1 获得一致, 并称 $c(k)$ 为系统在初始状态 $x(0)$ 条件下以概率为 1 的一致函数.

2 主要结论

记 $H(k) = I_N \otimes (A + BK_1) - L(k) \otimes BK_2$, 则系统 (3) 可表示为

$$x(k+1) = H(k)x(k), \quad \forall k \geq 0. \quad (4)$$

在 k 时刻, 对式 (4) 两端求期望. 由于 $L(k)$ 与 $x(k)$ 相互独立, 得到系统 (4) 的期望系统为

$$z(k+1) = \bar{H}z(k), \quad \forall k \geq 0. \quad (5)$$

其中: $\bar{H} = I_N \otimes (A + BK_1) - \bar{L} \otimes BK_2$, $z(k)$ 表示系数矩阵为 \bar{H} 的系统的状态矢量.

文献 [27] 和 [28] 指出, 群系统在独立同分布的无向随机作用拓扑条件下, 能够以概率为 1 实现一致当且仅当期望拓扑是连通的. 从而, 容易得知线性群系统的一致性具有以下特性.

引理 2 若 $\mathcal{G}_p(k)$ 是服从独立同分布的随机拓扑, 则在 $\mathcal{G}_p(k)$ 作用下系统 (4) 的一致性与在其期望拓扑 $\bar{\mathcal{G}}$ 作用下系统 (5) 的一致性以概率为 1 等价.

2.1 随机一致性

记服从独立同分布的无向随机拓扑 $\mathcal{G}_p(k)$ 的期望拓扑为 $\bar{\mathcal{G}}$, 且设 $0 = \bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_N$ 为 $\bar{\mathcal{G}}$ 的拉普拉斯矩阵 \bar{L} 的特征值, 则由引理 1 得 $\bar{\lambda}_1$ 相应的特征向量为 $\bar{u}_1 = \mathbf{1}$. 令 $U = [\mathbf{1}, \bar{U}] \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 是一个非奇异矩阵, 且记 $U^{-1} = [v^T, \bar{U}^T]^T$, $v^T = [1/N, 1/N, \dots, 1/N]^T \in \mathbf{R}^N$, 使得

$$U^{-1}\bar{L}U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{\bar{L}} \end{bmatrix}, \quad (6)$$

其中 $\tilde{\Psi}_{\bar{L}} = \bar{U}\bar{L}\bar{U} \in \mathbf{R}^{(N-1) \times (N-1)}$. 同理, 对于随机拓扑的 $L(k)$, 记 $\tilde{\Psi}_{L(k)} = \bar{U}L(k)\bar{U} \in \mathbf{R}^{(N-1) \times (N-1)}$, 有

$$U^{-1}L(k)U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{L(k)} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

在时刻 k , 记 $\tilde{x}(k) = [U^{-1} \otimes I_d]x(k)$, 则由系统 (4)

可得

$$\tilde{x}(k+1) = \Psi_{H(k)}\tilde{x}(k), \quad (8)$$

其中 $\Psi_{H(k)} = [U^{-1} \otimes I_d]H(k)[U \otimes I_d]$. 进而, 记 $\tilde{\Psi}_{H(k)} = I_{N-1} \otimes (A + BK_1) - \tilde{\Psi}_{L(k)} \otimes BK_2$, 有

$$\Psi_{H(k)} = \begin{bmatrix} A + BK_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\Psi}_{H(k)} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

记 $\xi_1(k) = \tilde{x}_1(k)$, $\xi_2(k) = [\tilde{x}_2^H(k), \dots, \tilde{x}_N^H(k)]^H$, 则由系统 (4) 可得

$$\xi_1(k+1) = (A + BK_1)\xi_1(k), \quad (10)$$

$$\xi_2(k+1) = \tilde{\Psi}_{H(k)}\xi_2(k). \quad (11)$$

同理, 对于期望系统 (5), 由 $\tilde{z}(k) = [U^{-1} \otimes I_d]z(k)$ 转化可得

$$\eta_1(k+1) = (A + BK_1)\eta_1(k), \quad (12)$$

$$\eta_2(k+1) = \tilde{\Psi}_{\bar{H}}\eta_2(k). \quad (13)$$

其中

$$\eta_1(k) = \tilde{z}_1(k),$$

$$\eta_2(k) = [\tilde{z}_2^H(k), \dots, \tilde{z}_N^H(k)]^H.$$

下面引入一致子空间和一致补子空间的概念^[19].

定义 2 设 $p_j \in \mathbf{R}^{Nd}$ ($j = 1, 2, \dots, Nd$) 是矩阵 \bar{H} 线性无关的特征向量和广义特征向量. 其中: $p_j = \mathbf{1} \otimes c_j$ ($j = 1, 2, \dots, d$) 和 $p_j = \mathbf{1} \otimes c_j$ ($j = d+1, d+2, \dots, Nd$) 所对应的特征值分别是 $A + BK_1$ 和 $\tilde{\Psi}_{\bar{H}}$ 的特征值; $c_j \in \mathbf{R}^d$ 是矩阵 $A + BK_1$ 线性无关的特征向量和广义特征向量. 由 $p_j = \mathbf{1} \otimes c_j$ ($j = 1, 2, \dots, d$) 张成的子空间 $\mathcal{C}(H)$ 称为一致子空间, 由 $p_j = \mathbf{1} \otimes c_j$ ($j = d+1, d+2, \dots, Nd$) 张成的子空间 $\bar{\mathcal{C}}(H)$ 称为一致补子空间.

引理 3^[19] $\mathcal{C}(H) \oplus \bar{\mathcal{C}}(H) = \mathbf{C}^{Nd}$, $\mathcal{C}(H)$ 和 $\bar{\mathcal{C}}(H)$ 都是 \bar{H} 的不变子空间.

在上述理论基础之上, 下面的定理将给出系统 (3) 以概率为 1 获得一致的充分必要条件.

定理 1 在随机拓扑 $\mathcal{G}_p(k)$ 的作用下, 若其期望图 $\bar{\mathcal{G}}$ 连通, 则系统 (3) 能以概率为 1 实现一致当且仅当如下条件成立:

$$\|\lambda_{i, \tilde{\Psi}_{\bar{H}}}\| < 1, \quad i = d+1, d+2, \dots, Nd, \quad (14)$$

其中 $\lambda_{i, \tilde{\Psi}_{\bar{H}}}$ 是矩阵 $\tilde{\Psi}_{\bar{H}}$ 的特征值.

证明 必要性. 已知系统 (3) 能以概率为 1 实现一致, 欲证式 (14) 成立. 设初始状态满足 $[U^{-1} \otimes I_d] \times x(0) = [0, \xi_2^T(0)]^T = [0, \eta_2^T(0)]^T$, 则期望系统 (12) 和 (13) 的一致性取决于

$$\eta_2(k+1) = \tilde{\Psi}_{\bar{H}}^{k+1}\eta_2(0). \quad (15)$$

用反证法证明. 假设 $\|\lambda_{i, \tilde{\Psi}_{\bar{H}}}\|$ ($i = d+1, d+2, \dots,$

Nd) 中至少有一个满足 $\|\lambda_{i, \tilde{\Psi}_H}\| \geq 1$, 则式 (15) 在 $k \rightarrow \infty$ 时极限不存在或非零. 从而由引理 2 可知

$$\xi_2(k+1) = \tilde{\Psi}_{H(k)} \tilde{\Psi}_{H(k-1)} \cdots \tilde{\Psi}_{H(0)} \xi_2(0), \quad (16)$$

在 $k \rightarrow \infty$ 时极限不存在或非零, 即可认为在 $k \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{x}(k)$ 的极限不存在或非零. 同时, 由于系统 (3) 能以概率为 1 实现一致, 则存在 $c(k)$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x(k) - \mathbf{1} \otimes c(k)) = 0. \quad (17)$$

由 $c_j(j = 1, 2, \dots, d)$ 的线性无关的特性可知, 存在 $\gamma_j(t)(j = 1, 2, \dots, d)$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(x(k) - \mathbf{1} \otimes \sum_{j=1}^d \gamma_j(t) c_j \right) = 0. \quad (18)$$

这说明, $x(k)$ 在 $k \rightarrow \infty$ 时收敛于一致子空间 $\mathbf{C}(H)$. 进而, 在 $k \rightarrow \infty$ 时 $\tilde{x}(k)$ 的极限等于零. 二者矛盾, 必要性得证.

充分性. 已知式 (14) 成立, 欲证系统 (3) 能以概率为 1 实现一致. 考虑任意初始状态 $x(0)$, 并令 $x(0) = z(0)$, 则 $\tilde{x}(0) = [\xi_1^T(0), \xi_2^T(0)]^T = [\eta_1^T(0), \eta_2^T(0)]^T$. 根据引理 3, $x(0)$ 满足唯一的分解, 即

$$x(0) = x_C(0) + x_{\bar{C}}(0). \quad (19)$$

其中

$$x_C(0) = [U \otimes I_d][\xi_1^T(0), 0]^T = [U \otimes I_d][\eta_1^T(0), 0]^T,$$

$$x_{\bar{C}}(0) = [U \otimes I_d][0, \xi_2^T(0)]^T = [U \otimes I_d][0, \eta_2^T(0)]^T.$$

先考虑 $x_{\bar{C}}(0)$ 对系统的激励. 在协议 (2) 的条件下, 系统 (4) 满足

$$x_{\bar{C}}(k+1) = (U \otimes I_d) \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\Psi}_{H(k)} \tilde{\Psi}_{H(k-1)} \cdots \tilde{\Psi}_{H(0)} \xi_2(0) \end{bmatrix}. \quad (20)$$

同时, 期望系统 (5) 满足

$$z_{\bar{C}}(k+1) = (U \otimes I_d) \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{\Psi}_{\bar{H}}^{k+1} \eta_2(0) \end{bmatrix}. \quad (21)$$

由 $\|\lambda_{i, \tilde{\Psi}_{\bar{H}}}\| < 1$ 可知

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \|\eta_2(k+1)\| &= \\ \lim_{k \rightarrow \infty} \|(U \otimes I_d) \tilde{\Psi}_{\bar{H}}^{k+1} \eta_2(0)\| &= 0, \end{aligned} \quad (22)$$

从而

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_{\bar{C}}(k+1)\| = 0. \quad (23)$$

因而, 由引理 2 可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_{\bar{C}}(k+1)\| = 0. \quad (24)$$

再考虑 $x_C(0)$ 对系统的激励, 有

$$x_C(k+1) = (U \otimes I_d) \begin{bmatrix} (A + BK_1)^{k+1} \xi_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

同时, 期望系统满足

$$z_C(k+1) = (U \otimes I_d) \begin{bmatrix} (A + BK_1)^{k+1} \eta_1(0) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

比较式 (25) 与 (26), 由于 $\xi_1(0) = \eta_1(0)$, 可知 $x_C(0)$ 对原系统与其期望系统的激励是同效果. 记 $c_1(k+1) = (A + BK_1)^{k+1} \eta_1(0)$, 由 $U = [\mathbf{1}, \bar{U}]$ 可得

$$x_C(k+1) = \mathbf{1} \otimes c_1(k+1). \quad (27)$$

综合考虑 $x_{\bar{C}}(0)$ 和 $x_C(0)$ 对系统的激励, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [x(k+1) - x_C(k+1)] = 0, \quad (28)$$

即充分性得证. \square

注 1 从定理 1 的证明过程可以看到, $x_C(0)$ 和 $x_{\bar{C}}(0)$ 分别决定了系统的一致动态特性和不一致性动态特性, 即群系统的整体宏观运动特性和内部相对运动特性. 可见, 系统 (3) 以概率为 1 获得一致当且仅当由 $x_{\bar{C}}(0)$ 激励的系统响应是渐近稳定的. 如果系统 (3) 以概率为 1 获得一致, 则一致值由 $x_C(0)$ 激励的系统响应确定. Xi 等在文献 [19-22] 中运用状态空间分解法分析了连续时间高阶线性群系统在固定和切换拓扑条件下的一致性, 本文定理 1 则是将该方法运用于分析离散时间高阶线性群系统在随机拓扑条件下的一致性.

注 2 一些文献对切换拓扑条件下群系统一致性进行了研究, 如文献 [6] 讨论了噪声对一阶群系统一致性的影响, 文献 [7] 考虑了时延对一阶群系统一致性的影响, 得到了有意义的结论. 本文分析了高阶群系统的随机一致性. 现有文献对随机一致性的研究多集中于二阶和二阶群系统, 如文献 [25-30]. 文献 [31] 和 [32] 对具有特定积分器形式的高阶群系统随机一致性进行了分析, 这与本文定理 1 中状态空间描述的系统 (1) 不同. 切换拓扑与随机拓扑的区别在于: 前者已知存在的各个拓扑的结构; 而后者对下一时刻的拓扑结构是不确定的, 一般只知道拓扑各节点间的连接概率.

根据引理 1 和定理 1 可以直接得到如下推论.

推论 1 在随机拓扑 $\mathcal{G}_p(k)$ 的作用下, 若其期望图 $\bar{\mathcal{G}}$ 不连通, 则系统 (3) 能以概率为 1 实现一致当且仅当如下条件成立:

$$\|\lambda_{i, (A+BK_1)}\| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, d, \quad (29)$$

$$\|\lambda_{i, \tilde{\Psi}_{\bar{H}}}\| < 1, \quad i = d+1, d+2, \dots, Nd, \quad (30)$$

其中 $\lambda_{i, (A+BK_1)}$ 和 $\lambda_{i, \tilde{\Psi}_{\bar{H}}}$ 分别是矩阵 $A+BK_1$ 和矩阵 $\tilde{\Psi}_{\bar{H}}$ 的特征值.

注 3 推论 1 说明群系统作用拓扑的期望图不连通情况下, 各主体要实现一致不仅需要 $x_{\bar{C}}(0)$ 决定的相对运动渐近稳定, 也需要 $x_C(0)$ 决定的整体宏观运动渐近稳定.

2.2 一致函数

定理 2 如果系统 (3) 以概率为 1 获得一致, 则其一致函数 $c(k) = \mathbf{1} \otimes c_1(k)$, 其中 $c_1(k)$ 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(c_1(k) - (A + BK_1)^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0) \right) = 0. \quad (31)$$

证明 由定理 1 的证明过程可知, 对于任意满足可以将 $\tilde{x}(0) = (U^{-1} \otimes I_d)x(0)$ 唯一地分解为式 (19) 的初始状态 $x(0)$, 系统响应满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{\bar{C}}(k) = 0$. 因而, 一致函数 $c(k)$ 由 $x_C(0)$ 完全确定. 因为

$$\begin{aligned} \xi_1(0) = \eta_1(0) &= [I_d, 0, \dots, 0] (U^{-1} \otimes I_d)x(0) = \\ (v \otimes I_d)x(0) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0), \end{aligned} \quad (32)$$

故由式 (27) 和 (28) 可得

$$x_C(k) = \mathbf{1} \otimes (A + BK_1)^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0). \quad (33)$$

所以由定义 1 可知, 当系统 (3) 以概率为 1 获得一致时, 有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[c(k) - \mathbf{1} \otimes (A + BK_1)^k \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(0) \right] = 0. \quad (34)$$

从而得到定理 2 的结论. \square

注 4 由定理 2 可知, 离散时间高阶线性群系统的一致函数与矩阵 $A + BK_1$ 的谱特性和初始值有关, 而与作用拓扑无关. 当 $\|\lambda_{l,(A+BK_1)}\| = 1$ 时, $c_{1l}(k)$ ($l = 1, 2, \dots, d$) 逐渐趋近于 $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{il}(0)$; 当 $\|\lambda_{l,(A+BK_1)}\| < 1$ 时, $c_{1l}(k)$ ($l = 1, 2, \dots, d$) 逐渐趋近于 0. 文献 [2] 指出, 在连通无向拓扑条件下一阶线性群系统的一致值为初始值的均值, 这是系统 (1) 当 $d = 1$ 时的特例, 而在文献 [25-31] 中没有给出随机拓扑条件下系统一致时的一致函数.

3 仿真算例

考虑一个由 9 个主体组成的线性群系统, 各主体由 4 维状态向量描述, 参数满足

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 6 \\ 7 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

系统的随机拓扑 $\mathcal{G}_p(k)$ 的期望拓扑 $\bar{\mathcal{G}}$ 如图 1 所示, 可见 $\bar{\mathcal{G}}$ 是连通的. 各边的连接概率服从区间 [0.5, 0.9] 上的均匀分布, 期望图中未连接的边其连接概率始终为 0.

不失一般性, 设拓扑的各边权重为 1, 系统的初始状态为 $x(0)$. 其中

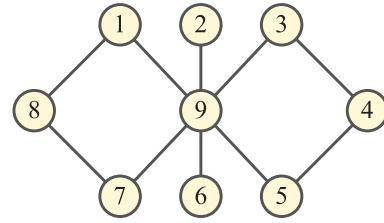


图 1 期望作用拓扑

$$\begin{aligned} x_1(0) &= [-2.2, 4.7, -1.0, -3.2]^T, \\ x_2(0) &= [-1.5, -3.9, 2.0, 2.6]^T, \\ x_3(0) &= [1.7, 2.3, 2.3, 1.3]^T, \\ x_4(0) &= [5.1, 1.7, -2.1, 3.8]^T, \\ x_5(0) &= [3.6, 2.2, -1.4, -2.8]^T, \\ x_6(0) &= [2.5, 4.1, 3.5, 8.6]^T, \\ x_7(0) &= [1.7, -4.6, 2.3, 9.1]^T, \\ x_8(0) &= [-5.2, 1.7, -2.1, 3.8]^T, \\ x_9(0) &= [7.6, -2.9, -2.5, -6.8]^T. \end{aligned}$$

根据定理 1, 令

$$K_1 = \begin{bmatrix} -0.20 & -0.34 & 0.42 & -0.03 \\ -2.60 & 4.54 & 5.57 & -0.37 \\ -1.02 & -1.14 & -1.57 & -0.43 \\ 1.01 & -1.43 & -2.72 & -0.29 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} -0.03 & -0.03 & 0.21 & -0.12 \\ -2.37 & 1.63 & -0.41 & 0.51 \\ 0.57 & -0.43 & 0.01 & 0.29 \\ 0.72 & -0.29 & 0.01 & -0.14 \end{bmatrix},$$

使得 $\|\lambda_{i,\bar{\Psi}_H}\| < 1, i = 5, 6, \dots, 36$.

图 2~图 5 给出了状态变化曲线. 从各状态曲线可以看出, 各状态在随机拓扑条件下实现了一致. 但由于随机连接的影响, 各状态曲线呈现波动状, 这与确定拓扑条件下的状态曲线呈平滑状不同. 因而, 本文结论得到验证.

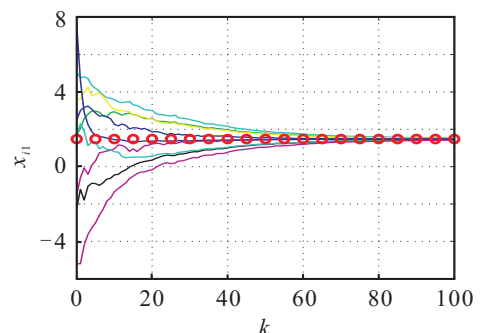
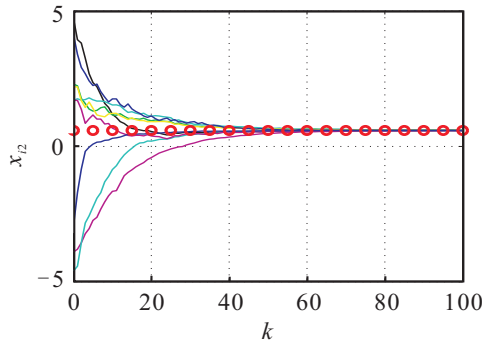
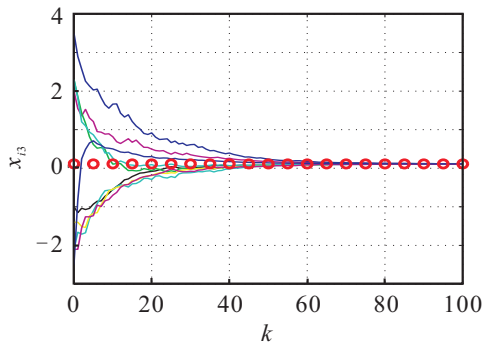
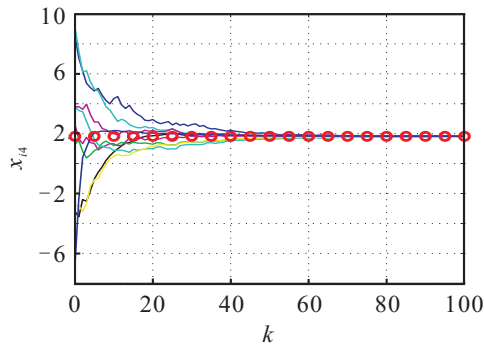


图 2 状态 x_{i1} ($i = 1, 2, \dots, 9$) 变化曲线

图 3 状态 x_{i2} ($i = 1, 2, \dots, 9$) 变化曲线图 4 状态 x_{i3} ($i = 1, 2, \dots, 9$) 变化曲线图 5 状态 x_{i4} ($i = 1, 2, \dots, 9$) 变化曲线

4 结 论

本文利用状态空间分解法分析了主体间连接概率时变的无向随机拓扑条件下离散时间高阶线性群系统一致性问题, 确定了群系统的相对运动和绝对运动. 根据服从独立同分布的随机拓扑与其期望拓扑对系统一致性的影响以概率为 1 等价, 给出了一个依赖于各个主体自身信息和相邻主体间拓扑连接概率的随机控制协议, 进而给出了该协议条件下以概率为 1 实现一致的充要条件, 并确定了一致函数的显式表达式. 本文分析的主体间通信拓扑是由无向图描述的, 进一步具有挑战性的工作是研究拓扑是有向图的随机一致性问题.

参考文献(References)

[1] Jadbabaie A, Lin J, Morse A. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

[2] Olfati-Saber R, Murray R. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[3] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.

[4] Bliman P, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. Automatica, 2008, 44(8): 1985-1995.

[5] Liu Y, Jia Y. Consensus control of multi-agent systems with switching topology: A dynamic output feedback protocol[J]. Int J of Control, 2010, 83(3): 527-537.

[6] Li T, Zhang J. Consensus conditions of multi-agent systems with timevarying topologies and stochastic communication noises[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2010, 55(9): 2043-2057.

[7] Xiao F, Wang L. State consensus for multi-agent systems with switching topologies and time-varying delays[J]. Int J of Control, 2006, 79(10): 1277-1284.

[8] Tanner H, Jadbabaie A, Pappas G. Flocking in fixed and switching networks[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(5): 863-868.

[9] Guan Z, Liu Z, Feng G, et al. Impulsive consensus algorithms for second-order multi-agent networks with sampled information[J]. Automatica, 2012, 48(7): 1397-1404.

[10] Hu J, Lin Y. Consensus control for multi-agent systems with double-integrator dynamics and time delays[J]. IET Control Theory and Applications, 2010, 4(1): 109-118.

[11] Yu W, Chen G, Cao M. Some necessary and sufficient conditions for second-order consensus in multi-agent dynamical systems[J]. Automatica, 2010, 46(6): 1089-1095.

[12] 潘欢. 二阶多智能体一致性算法研究[D]. 长沙: 中南大学信息科学与工程学院, 2012.
(Pan H. The investigation of consensus algorithms in second-order multi-agent systems[D]. Changsha: School of Information Science and Engineering, Central South University, 2012.)

[13] Cai N, Xi J, Zhong Y. Swarm stability of high-order linear time-invariant swarm systems[J]. IET Control Theory and Applications, 2011, 5(2): 402-408.

[14] Yu W, Chen G, Ren W, et al. Distributed higher order consensus protocols in multiagent dynamical systems[J]. IEEE Trans on Circuits and Systems — I: Regular Papers, 2011, 58(8): 1924-1932.

- [15] Xiao F, Wang L. Consensus problems for high-dimensional multi-agent systems[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2007, 1(3): 830-837.
- [16] Ren W, Moore K, Chen Y. High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems[J]. *J of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2007, 129(5): 678-688.
- [17] Huang Q. Consensus analysis of multi-agent discrete-time systems[J]. *Acta Automatica Sinica*, 2012, 38(7): 1127-1133.
- [18] 王寅秋, 伍清河, 王垚. 高阶有向积分器网络的包含控制[J]. *控制与决策*, 2013, 28(8): 1195-1199.
(Wang Y Q, Wu Q H, Wang Y. Containment control for high-order multi-agent systems under directed topologies[J]. *Control and Decision*, 2013, 28(8): 1195-1199.)
- [19] Xi J, Cai N, Zhong Y. Consensus problems for high-order linear time-invariant swarm systems[J]. *Physica A*, 2010, 389(24): 5619-5627.
- [20] Xi J, Shi Z, Zhong Y. Output consensus analysis and design for high-order linear swarm systems: Partial stability method[J]. *Automatica*, 2012, 48(9): 2335-2343.
- [21] Xi J, Shi Z, Zhong Y. Consensus and consensualization of high-order swarm systems with time delays and external disturbances[J]. *J of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, 2012, 134(4): 1-7.
- [22] Xi J, Shi Z, Zhong Y. Stable-protocol output consensualization for high-order swarm systems with switching topologies[J]. *Int J of Robust and Nonlinear Control*, 2013, 23(18): 2044-2059.
- [23] Ni W, Cheng D. Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies[J]. *Systems & Control Letters*, 2010, 59(3): 209-217.
- [24] Su Y, Huang J. Stability of a class of linear switching systems with applications to two consensus problems[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2012, 57(6): 1420-1430.
- [25] Hatano Y, Mesbahi M. Agreement over random networks[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2005, 50(11): 1867-1872.
- [26] Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. A necessary and sufficient condition for consensus over random networks[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2008, 53(3): 791-795.
- [27] Pereira S, Pagés-Zamora A. Mean square convergence of consensus algorithms in random WSNs[J]. *IEEE Trans on Signal Processing*, 2010, 58(5): 2866-2874.
- [28] Tahbaz-Salehi A, Jadbabaie A. Consensus over ergodic stationary graph processes[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2010, 55(1): 225-230.
- [29] Abaid N. Consensus over numerosity-constrained random networks[J]. *IEEE Trans on Automatic Control*, 2011, 56(3): 649-654.
- [30] Wen G, Duan Z, Li Z, et al. Stochastic consensus in directed networks of agents with non-linear dynamics and repairable actuator failures[J]. *IET Control Theory and Applications*, 2012, 6(11): 1583-1593.
- [31] Sun F, Guan Z, Zhan X, et al. Consensus of second-order and high-order discrete-time multi-agent systems with random networks[J]. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 2012, 13(1): 1979-1990.
- [32] 孙凤兰. 多智能体网络的一致性研究[D]. 武汉: 华中科技大学控制科学与工程学院, 2012.
(Sun F L. On consensus of multi-agent networks[D]. Wuhan: School of Control Science and Engineering, Huazhong University of Science & Technology, 2012.)
- [33] Godsil C, Royal G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2001: 279-288.

(责任编辑: 李君玲)