第一讲　　极限

一．　数列极限

1．利用单调有界数列必有极限准则

例 1． 设 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

[分析]　两个事实：1) $(1+\frac{1}{n})^n$ 单调递增 $\to e$；

2) $(1+\frac{1}{n})^{n+1}$ 单调递减 $\to e$。

有不等式　$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$　。

证　$S_n - S_{n+1} = \ln\frac{n+1}{n} - \frac{1}{n+1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n+1} > 0$，故 $\{S_n\}$ 单调下降，且 $S_n > \ln(1+\frac{1}{1}) + \ln(1+\frac{1}{2}) + \cdots + \ln(1+\frac{1}{n}) - \ln n =$ $\ln\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{n+1}{n} - \ln n = \ln(1+\frac{1}{n}) > 0$。

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

注 1：$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + C + o(1)$，其中 C 是欧拉常数。

例 2． 设 $f \in C[1,+\infty)$，f 单调递减，$f \ge 0$，$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)dx$

求证：$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

[分析]

1) $S_n - S_{n+1} = \int_n^{n+1} f(x)dx - f(n+1) > \int_n^{n+1} f(n+1)dx - f(n+1) = 0$，故 $\{S_n\}$ 单调下降。

2)

$$S_n \ge \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx = \int_1^{n+1} f(x)dx - \int_1^n f(x)dx = \int_n^{n+1} f(x)dx \ge 0$$

$\therefore$ $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 存在。

注 2：例 2 是例 1 的推广。（令 $f(x) = \frac{1}{x}$）

例 3． 设$a_1=\sqrt{c}(c>0),\ a_{n+1}=\sqrt{c+a_n},\ n=1,2,\cdots$.求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

证 首先证明$\{a_n\}$是递增数列.

$a_2=\sqrt{c+a_1}=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=a_1$，假设$a_{k+1}>a_k$成立，则
$a_{k+2}=\sqrt{c+a_{k+1}}>\sqrt{c+a_k}=a_{k+1}$，因此$\{a_n\}$是递增数列.

再证明$\{a_n\}$是有界数列．$\sqrt{c}\le a_n<1+c$．

$a_n\ge\sqrt{c}$显然成立．$a_1=\sqrt{c}<\sqrt{1+2c+c^2}=1+c$成立.

设$a_k<1+c$成立，则

$$a_{k+1}=\sqrt{c+a_k}<\sqrt{c+1+c}<\sqrt{1+2c+c^2}=1+c,$$

因此，$\sqrt{c}\le a_n<1+c$成立.

根据单调有界定理知知$\{a_n\}$收敛，设$a=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$，在
${a_{n+1}}^2=c+a_n$两边取极限，得 $a^2=c+a$，解得 $a=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$或
$a=\dfrac{1-\sqrt{4c+1}}{2}$，但由于 $a_n\ge a_1=\sqrt{c}$，因此 $a>0$，从而
$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1+\sqrt{4c+1}}{2}$.

2．利用放缩法

例 4． 计算$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+a^{2n}}$，其中$a$为常数。

解 令$b=a^2$，则$b\ge0$，

若$0\le b\le2$，则$2\le\sqrt[n]{2^n+b^n}\le\sqrt[n]{2\cdot2^n}\to2$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+b^n}=2$，

若$b>2$，则$b\le\sqrt[n]{2^n+b^n}\le\sqrt[n]{2\cdot b^n}\to b$，

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+b^n}=b=a^2$，

因此，原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2^n+b^n}=\max\{2,a^2\}$

作业：

练习 1 设$a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2a_n},n=1,2,\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

练习 2 设$x_1=a\in(0,\dfrac{\pi}{2})$，$x_{n+1}=\sin x_n$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

练习 3 设$a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\cdots+\sqrt{n}}}}$，证明$\{a_n\}$收敛。

（提示：设$b_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$，则$b_n$有上界 2，且$a_n\le 2b_n$）

二．函数极限

1．利用等价代换

当$x\to0$时，$(1)\ x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim arx\tan x\sim\ln(1+x)\sim e^x-1\sim$

$\dfrac{(1+x)^b-1}{b}$ $\quad(2)1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$。

例 1． 求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{\sin^4 x}$。

解 原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin\dfrac{x+\sin x}{2}\sin\dfrac{x-\sin x}{2}}{x^4}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\dfrac{x+\sin x}{2}\cdot\dfrac{x-\sin x}{2}}{x^4}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}(1+\frac{\sin x}{x})(\frac{x-\sin x}{x^3})=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2}{2\cdot3x^2}=\frac{1}{6}$$。

例2． 求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)(\sqrt{1+x}-1)}$。

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{2}}{x\cdot\dfrac{x}{2}}=1$

例 3．计算：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x-\tan x)\left(\sqrt{x+1}-1\right)}$。

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x e^t\cos t dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{(x\cos x-\sin x)\dfrac{x}{2}}$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^t\cos t dt-x-\dfrac{x^2}{2}}{x^4}\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x\cos x-\sin x}$$

$$=2\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{4x^3}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{-x\sin x}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-1-x}{x^3}$$

$$=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-1}{3x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-1}{x^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\sin x-e^x\cos x}{2x}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{-e^x\sin x}{x}=\frac{1}{2}。$$

作业

练习 1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x \sin(xt)^2 dt}{x^5}$。

练习 2 求极限

$$\lim_{x\to 0}\left\{\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots\cdots + a_n^x}{n}\right\}^{\frac{1}{x}}, (a_i > 0, i = 1, 2, \cdots\cdots n)$$

2． 利用定积分

例 1．设 $f \in C[0,1]$，$f(x) > 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)}$。

解 令 $S_n = \sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)}$，则

$$\ln S_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln f(\frac{i}{n}) \to \int_0^1 \ln f(x)dx。故$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{f(\frac{1}{n})f(\frac{2}{n})\cdots f(\frac{n-1}{n})f(1)} = e^{\int_0^1 \ln f(x)dx}。$$

例 2．设 $S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$。

解 $\{S_{2n}\}$ 单调递增有上界。

$$S_{2n} = 1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

$= \frac{1}{n}(\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \cdots + \frac{n}{2n}) \to \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$，而 $S_{2n+1} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$，故 $S_{2n+1} = \ln 2$。于是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$。

3． 利用中值定理

例 1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx$。

解 由积分第一中值定理知$\exists\xi\in(n,n+p)$，有

$\int_n^{n+p}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p$，故原式=$\lim\limits_{\xi\to\infty}\frac{\sin\xi}{\xi}\cdot p$=0。

例 2 设$P>0$是常数，求证$\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+p}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=0$。

解 由积分第一中值定理知$\exists\xi\in(n,n+p)$，有

$$\int_n^{n+p}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot P$$

故原式$=\lim\limits_{\xi\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}\cdot P=0$。

4．其他

例 1．设$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\arctan\frac{1}{2k^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$。

分析：利用$\arctan\frac{1}{2k^2}=\arctan\frac{1}{2k-1}-\arctan\frac{1}{2k+1}$，然后错位相消。

例 2．设$f(x)$在$\left[a,b\right]$连续且恒大于零，讨论极限

$$\lim_{n\to\infty}(\int_a^b\sqrt[n]{f(x)}dx)^n$$

解 设$f(x)$在$\left[a,b\right]$上的最小值和最大值分别为m和M，

则因

$$m(b-a)^n=(\int_a^b\sqrt[n]{m}dx)^n\le(\int_a^b\sqrt[n]{f(x)}dx)^n$$

$$\le(\int_a^b\sqrt[n]{M}dx)^n=M(b-a)^n$$

故当$|b-a|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}dx)^n=0$

当$|b-a|>1$时，由$m>0$知$\lim\limits_{n\to\infty}(\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}dx)^n=+\infty$

当$|b-a|=1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}(\int_a^b \sqrt[n]{f(x)}dx)^n=\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt[n]{f(\xi_n)}\int_a^b dx)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty} f(\xi_n)$很复杂

如$\lim\limits_{n\to\infty}(\int_0^1 \sqrt[n]{1+x}dx)^n=\frac{4}{e}$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\int_1^2 \sqrt[n]{1+x}dx)^n=\frac{9}{4e}$，

$\lim\limits_{n\to\infty}(\int_k^{k+1} \sqrt[n]{1+x}dx)^n=\frac{1}{e}\frac{(2+k)^{2+k}}{(1+k)^{1+k}}$

作业：

练习 1 求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{-n}}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}C_n^k\cdot k^2$。

练习 2 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\frac{1}{x}}}-\sqrt{x})$

练习 3 已知$f(x)\ge 0, f$ 在$[a,b]$上连续，

证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\int_a^b f^n(x)dx}=\max\{f(x)\,|\,x\in[a,b]\}$。