

文章编号: 1000-4750(2014)07-0023-06

倾斜坡体中圆孔扩张的弹性应力分析

张亚国^{1,2}, 李镜培^{1,2}, 饶平平³

(1. 同济大学岩土及地下工程教育部重点实验室, 上海 200092; 2. 同济大学地下建筑与工程系, 上海 200092;

3. 上海理工大学土木工程系, 上海 200093)

摘 要: 针对实际工程中遇到的斜坡边界下圆形孔扩张问题, 提出了相应的计算方法。在考虑坡体自重应力的情况下, 通过坐标变换将其转为水平边界半无限体中圆孔扩张, 采用复变函数共形映射的方法得到应力解析。当圆形孔埋置较深时, 将问题简化为无限体中圆孔的扩张, 通过弹性力学的基本叠加得到最终应力解答。以一斜坡边界下圆形孔洞扩张为例, 求解了圆孔周围径向正应力 s_r 、环向正应力 s_j 与切应力 t_{ij} 的分布。计算结果表明: 斜坡倾角对坡体中应力分布影响显著, 某点应力随距圆心距离的增大而减小, 超过约4倍圆孔半径远处逐渐趋于稳定, 其值接近于初始地应力场。当圆孔为深埋的情况时, 与简化为无限平面的情况进行了对比, 两种方法计算结果接近, 距圆心 $2.5R$ 远处岩体径向正应力 s_r 和环向正应力 s_j 均为负值, 而切应力 t_{ij} 正负值间隔分布, 各应力极值分布与斜坡倾向呈一定的相关性。

关键词: 斜坡边界; 圆孔扩张; 复变理论; 叠加原理; 应力分析

中图分类号: TU452 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.01.0087

ELASTIC STRESS ANALYSIS OF CIRCULAR CAVITY EXPANSION UNDER A SLOPE

ZHANG Ya-guo^{1,2}, LI Jing-pei^{1,2}, RAO Ping-ping³

(1. Key Laboratory of Geotechnical and Underground Engineering of Ministry of Education, Tongji University, Shanghai 200092, China;

2. Department of Geotechnical Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China;

3. Department of Civil Engineering, University of Shanghai for Science and Technology, Shanghai 200093, China)

Abstract: This paper presents methods for calculating circular cavity expansion under a slope. The slope boundary is turned to be horizontal with a coordinate transformation technique. Using the complex variable method and mapping the hole and half-plane to a circular ring offer an analytical solution for stress, considering the initial gravity stress. When the circular cavity is deep enough, the influence of the ground surface is ignored and the problem is simplified as cavity expansion in an infinite space. Then, the solutions are attained by superposition of results from stress components. The radial stress, σ_r , hoop stress, σ_ϕ and shear stress, $\tau_{r\phi}$, are analyzed and the results show that the stresses at a certain point in a slope are affected by the slope dip and the distance from the cavity center. Specifically, with a distance from the cavity center greater than 4 times the cavity radius R , the stress caused by a cavity at a point can be safely neglected, which means the final value is close to original gravity stresses. Meanwhile, results calculated by superposition method for the deep cavity agree with those from complex variables method. At a point, specifically a distance of $2.5R$ from the cavity center, values of σ_r and σ_ϕ are all negative. However, the positive and negative values of $\tau_{r\phi}$ are cross distributed. The distribution of stress extremum is related to the slope dip.

Key words: slope boundary; cavity expansion; complex theory; superposition principle; stress analysis

收稿日期: 2013-01-25; 修改日期: 2013-11-29

基金项目: 国家自然科学基金项目(41272288); 国家自然科学基金青年基金项目(51208301)

通讯作者: 张亚国(1984—), 男, 甘肃陇西人, 博士生, 从事岩土力学和地基基础方面研究(E-mail: zhangyaguo29@163.com).

作者简介: 李镜培(1963—), 男, 江西信丰人, 教授, 博士, 博导, 从事岩土力学及桩基础工程方面研究(E-mail: lij2773@tongji.edu.cn);

饶平平(1984—), 男, 江西东乡人, 讲师, 博士, 从事岩土及隧道工程施工环境效应的科研与教学工作(E-mail: raopingping@sohu.com).

随着基础建设和土地资源利用空间的拓宽,实际中越来越多地遇到斜坡边界下压力隧道运营^[1]或顶管掘进^[2]等较复杂地形条件下工程作业的情况。以上问题一定程度上可简化为倾斜坡体中圆孔的扩张。传统的 Vesic 圆孔扩张理论^[3]基于平面应变轴对称假设,求解简单而应用广泛。Wang^[4]根据圆孔扩张理论,采用 Hoek-Brown 破坏准则对水工压力隧道围岩应力和应变作了分析,并与 Mohr-Coulomb 强度准则下的解答进行了比较。范文等^[5]基于圆孔扩张理论,在考虑岩土材料的软化和剪胀特性的情况下,对有压隧洞围岩内应力、应变、位移及所承受的最大压力进行了求解。万敏等^[6]研究一种新的隧道暗挖施工方法—管幕箱涵顶进工法时,采用圆孔扩张理论分析了箱涵前方探头挤土时的应力状态。同时,上述扩孔理论还能进一步分析材料发生大变形的情况以及中主应力对扩孔过程的影响^[7-8];然而该法多用于无限平面问题的求解,考虑半无限平面的边界条件影响时存在困难。Verruijt^[9-10]考虑到复变函数解决平面上孔口问题的优势,将其引入半无限平面的圆孔扩张分析中,使得边界问题得到了很好的解决。晏莉等^[11]在 Verruijt 解答的基础上,对双孔平行有压隧道围岩应力和位移进行了讨论。文献[9-11]分析了地面自由应力边界对扩孔的影响,但为地面水平时的解答,且没有考虑上覆自重应力的影响。由于斜坡边界位移和应力的非轴对称性,使得下圆孔扩张问题变得复杂。斜坡边界条件下难以直接应用。

基于此,本文从目前工程施工中面临的实际问题出发,分析了斜坡边界条件下考虑坡体自重应力的圆形孔扩张问题。采用复变函数方法,通过保角映射手段对圆孔周围的应力进行了求解;随着圆孔埋深的增加,距圆孔一定远处受到的扰动变得很小,故该情况下可将问题视为无限体圆孔扩张问题进行处理,以避免繁杂的运算。通过算例分析了斜坡中圆孔扩张引起的应力变化,同时在深埋圆孔的情况下对复变函数方法和简化后的方法进行了对比分析,为复杂地形条件下该类工程问题解决提供理论依据。

1 力学模型与基本假设

斜坡边界条件下圆形孔洞的扩张问题,在 Z_0 平面如图 1 所示。斜坡边界为应力自由边界,倾角为 θ ,重度为 γ ;圆孔半径为 R ,斜坡表面到圆心的

距离为 h ,到圆周最近距离为 d ; t 为作用在孔壁上的扩孔压力。 x^0 - y^0 坐标系为水平-竖直坐标系, x - y 坐标系中 x 轴与斜面平行, y 轴与斜面垂直。模型的基本假定:① 坡体为均质、各向同性的线弹性体;② 坡体变形为小变形。

自重作用下初始应力场为^[12]:

$$\begin{aligned} s_{x_0} &= \gamma y \left(\frac{n}{1-n} + \tan^2 q \right) \cos q \\ s_{y_0} &= \gamma y \cos q, \\ t_{x_0 y_0} &= \gamma y \sin q. \end{aligned} \quad (1)$$

式中: γ 为岩土体重度; n 为泊松比; q 为斜坡倾角。

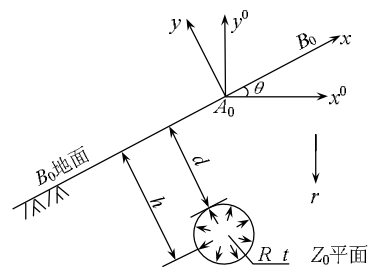


图 1 斜坡边界条件下圆孔扩张的计算模型

Fig.1 Calculation model for a round cavity under a slope

2 求解过程

2.1 模型的转换

为了考虑斜坡自由边界对扩孔问题的影响,本文采用复变函数法对该问题进行弹性解析。将图 1 按顺时针旋转 θ° ,得到水平边界下圆形孔扩张的力学模型,如图 2 所示。首先求解水平边界半无限平面(Z 平面)中圆孔扩张的问题。

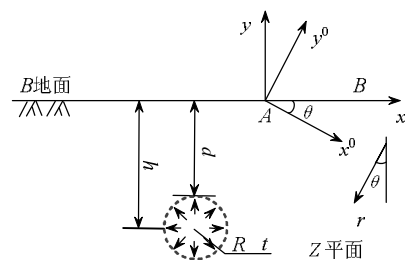


图 2 坐标旋转后的计算模型

Fig.2 Calculation model after coordinate transformation

式(1)给出了倾斜地表下的初始地应力场,经过坐标旋转后,水平边界下圆孔附近的初始地应力为 (s_x^0, s_y^0, t_{xy}^0) , 其中:

$$s_x^0 = \gamma y \left(\frac{n}{1-n} + 4 \tan^2 q \right) \cos^3 q,$$

$$s_y^0 = g y \left[\left(\frac{n}{1-n} + \tan^2 q - 3 \right) \sin^2 q + 1 \right] \cos q,$$

$$t_{xy}^0 = g y \left(2 \cos 2q - \frac{n}{1-n} \cos^2 q \right) \sin q. \quad (2)$$

2.2 水平边界下的解答

根据复变函数理论, 通过共形映射将半无限 Z 平面转换为 z 平面的圆环区域(由 $|z|=a$ 和 $|z|=1$ 两个圆周围起来的 c 区域, 其中 $a < 1$, 如图 3 所示)。 Z 平面的原点 A 和无穷原点 B 分别对应于 z 平面内 $z=-1$ 和 $z=1$ 的点。 Z 平面上的直线 $y=0$ 和圆 $x^2+(y+h)^2=R^2$ 分别对应 z 平面内的单位圆 $|z|=1$ 和圆 $|z|=a$ 。

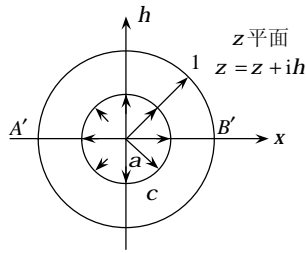


图 3 共形映射后的区域

Fig.3 Region after conformal mapping function

Mobius 共形映射公式为^[10]:

$$z = w(z) = -ih \frac{1-a^2}{1+a^2} \frac{1+z}{1-z} \quad (3)$$

式中: h 为孔洞中心的深度; a 是由圆孔半径 R 和埋深 h 的比值 (R/h) 定义的一个参数。若 $a \rightarrow 1$, 则上覆岩土体的厚度很小; 若 $a \rightarrow 0$, 则上覆岩土体厚度很大; a 值可由下式确定。

$$\frac{R}{h} = \frac{2a}{1+a^2} \quad (4)$$

求解 Z 平面内各点的应力值, 关键在于找到 R 内的解析函数 $j(z)$ 和 $y(z)$ 。由于映射函数 $w(z)$ 在圆环 c 区域内处处解析, 则 Z 区域内的解析函数 $j(z)$ 和 $y(z)$ 可视为 z 的函数, 且 $j(z)$ 和 $y(z)$ 在 z 平面的圆环 c 区域内处处解析, 结合式(1), 有:

$$j(z) = j[w(z)] = j(z) \quad (5)$$

$$y(z) = y[w(z)] = y(z) \quad (6)$$

此时地表和圆孔应力以及应力边界条件可由复数函数表示为^[9]:

$$s_x + s_y = 4 \operatorname{Re} \left[\frac{j'(z)}{w'(z)} \right] \quad (7)$$

$$s_y - s_x + 2it_{xy} = \frac{2}{w'(z)} \left\{ \overline{w(z)} \left[\frac{j'(z)}{w'(z)} \right]' + y'(z) \right\} \quad (8)$$

$$j(z) + \frac{w(z)}{w'(z)} \overline{j'(z)} + y(z) = \begin{cases} 0, & |z|=1 \\ F(z) + C, & |z|=a \end{cases} \quad (9)$$

根据图 2, 圆孔内边界 S 上力表示为:

$$F(S) = F_1 + iF_2 = i \int_{S_0}^S (t_x + it_y) ds \quad (10)$$

$$t_x = t \frac{x}{r}, \quad t_y = t \frac{y+h}{r} \quad (11)$$

其中: S_0 为边界上任意一点; r 为半径; t 为扩孔压力。

考虑初始地应力 (s_x^0, s_y^0, t_{xy}^0) 的情况下, $j(z)$ 和 $y(z)$ 可表示为:

$$j(z) = \frac{1+n}{8\pi} (X + iY) \ln z + Bw(z) + j_0(z) \quad (12)$$

$$y(z) = \frac{3-n}{8\pi} (X - iY) \ln z + (B' + iC')w(z) + y_0(z) \quad (13)$$

式中, X, Y 为圆孔整个内边界沿 x 和 y 方向的面力之和, 由于为平衡力系, 故 $X=Y=0$; $j_0(z), y_0(z)$ 为单位圆外(包括无穷远点)的解析函数, 根据 Verruijt^[9], 将其展开为罗伦级数形式:

$$j_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{-k} \quad (14)$$

$$y_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k + \sum_{k=1}^{\infty} d_k z^{-k} \quad (15)$$

B, B', C' 为初始地应力参数, 表示为:

$$B = \frac{1}{4} (s_x^0 + s_y^0) \quad (16)$$

$$B' + iC' = \frac{1}{2} [(s_y^0 - s_x^0) + 2it_{xy}^0] \quad (17)$$

在 z 平面内半径为 r 的圆周上, 有 $z = rs$, 其中 $s = \exp(iq)$, 且 $\bar{z} = rs^{-1}$, 结合式(3), 可得:

$$\frac{w(z)}{w'(z)} = -\frac{1}{2} \frac{(1+rs)(s-r)^2}{s^2(1-rs)} \quad (18)$$

地表边界映射到 z 平面上时, 对应的是 $r=1$ 的圆周, 有 $z=s$, 则:

$$\frac{w(z)}{w'(z)} = \frac{1}{2} (1-s^{-2}) \quad (19)$$

圆孔映射后对应 z 平面上 $r=a$ 的圆周, 此时 $z=as$, 则:

$$\frac{w(z)}{w'(z)} = \frac{-as - (1-2a^2) + a(2-a^2)s^{-1} - a^2s^{-2}}{2(1-as)} \quad (20)$$

考虑圆孔周边受到均布的径向应力 t , 经变换, $r = a$ 的圆周应力边界条件可表示为:

$$F = \frac{2i\theta a}{(1+a^2)(1-as)} [a - s + i(1-as)] \quad (21)$$

将式(14)、式(15)分别代入式(12)、式(13), 结合式(21), 根据边界条件(式(9)), 可以确定 $j_0(z)$ 、 $y_0(z)$; 由于初始地应力已知, 将 $j_0(z)$ 、 $y_0(z)$ 及系数 B 、 B' 、 C' 代入式(12)、式(13)可得到 $j(z)$ 和 $y(z)$, 进而由式(7)~式(8)可求得应力分量。

2.3 斜坡边界下的解

s_x 、 s_y 和 t_{xy} 为 x - y 坐标系(图 2)下的应力分量, 经过图 4 所示的坐标变换, 可得到 x^0 - y^0 坐标系(图 1)下的应力分量。其变换式为:

$$\begin{aligned} s_{x^0} &= s_x \cos^2 q + s_y \sin^2 q - 2t_{xy} \cos q \sin q, \\ s_{y^0} &= s_x \sin^2 q + s_y \cos^2 q + 2t_{xy} \cos q \sin q, \\ t_{x^0 y^0} &= (s_x - s_y) \cos q \sin q + t_{xy} (\cos^2 q - \sin^2 q). \end{aligned} \quad (22)$$

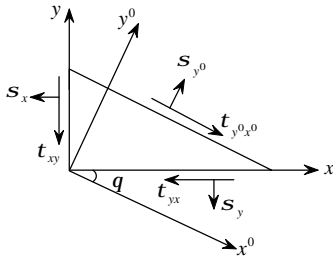


图 4 坐标变换

Fig.4 Coordinate transformation

3 求解方法讨论

上述方法能够在考虑斜坡边界影响的情况下, 对坡体中由于圆形孔洞扩张引起的应力场进行求解。同时, 式(4)中 a 的大小能够反映圆形孔上覆岩土体的厚度, 即圆孔的埋深; 表明该方法适用于求解不同埋置深度下的圆孔扩张问题。当圆孔埋置深度与孔径的比值 ($h_0 / R \geq 4$) 时, 由于距圆孔一定远处受扰动很小, 将该类问题简化为无限体中圆孔的扩张^[2,13]。

斜坡体中圆形孔埋置较深时, 其所受的初始地应力(式(1))可作如图 5(a)所示的等效处理。基于坡体线弹性的假定, 可将正应力、剪应力与扩孔压力所引起的应力变化分别求解, 然后把计算结果进行叠加(见图 5)。

正应力和剪应力的共同作用下(图 5(b)), 解得的应力表达式为^[12]:

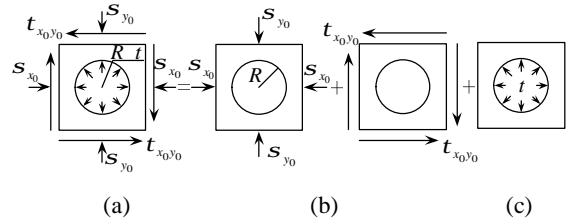


图 5 深埋圆孔扩张问题的受力分解

Fig.5 Force decomposition of a deep-buried cavity

$$\begin{aligned} s_r^{(2)} &= \frac{1}{2}(s_{x_0} + s_{y_0}) \left[1 - \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] - \frac{1}{2}[(s_{y_0} - s_{x_0}) \cdot \\ &\quad \cos 2j - 2t_{x_0 y_0} \sin 2j] \left[1 - 4 \left(\frac{R}{r} \right)^2 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right]; \\ s_j^{(2)} &= \frac{1}{2}(s_{x_0} + s_{y_0}) \left[1 + \left(\frac{R}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2}[(s_{y_0} - s_{x_0}) \cdot \\ &\quad \cos 2j - 2t_{x_0 y_0} \sin 2j] \left[1 + 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right]; \\ t_{ij}^{(2)} &= \frac{1}{2}(s_{x_0} - s_{y_0}) \sin 2j + \\ &\quad 2t_{x_0 y_0} \cos 2j \left[1 + 2 \left(\frac{R}{r} \right)^2 - 3 \left(\frac{R}{r} \right)^4 \right] \end{aligned} \quad (23)$$

式中: R 为圆孔半径; r 为坡体任意点与圆孔中心的距离; s_r 为径向应力; s_j 为环向应力; t_{ij} 为切向应力; s_{x_0} 、 s_{y_0} 和 $t_{x_0 y_0}$ 为初始地应力(式(1))。当只有圆孔扩张应力 t 作用时(如图 5(c)), 应力表达式为:

$$\begin{aligned} s_r^{(3)} &= \frac{tR^2}{r^2}, \\ s_j^{(3)} &= -\frac{tR^2}{r^2}, \\ t_{ij}^{(3)} &= 0. \end{aligned} \quad (24)$$

将图 5(b)和图 5(c)的解答进行叠加可得到图 5(a)状态下的解析表达式为:

$$\begin{aligned} s_r^{(1)} &= s_r^{(2)} + s_r^{(3)}, \\ s_j^{(1)} &= s_j^{(2)} + s_j^{(3)}, \\ t_{ij}^{(1)} &= t_{ij}^{(2)} + t_{ij}^{(3)}. \end{aligned} \quad (25)$$

4 算例及参数分析

某岩质边坡下的圆形洞室, 所受扩张压力 $t = 400 \text{ kPa}$ ^[14]; 泊松比 $n = 0.25$, 重度 $r = 27.5 \text{ kN/m}^3$ 。现采用复变函数方法, 通过共形映射的手段对洞室周围的应力场进行求解。由式(1)和式(2)可知, 本文计算结果中拉应力为正, 压应力为负。分别取斜坡倾

角 θ 为 0° 、 10° 、 20° 、 30° 和 40° ，分析斜坡边界对应力场的影响。据图 6 所示，当取 $\varphi = 45^\circ$ 时，倾角 θ 与应力之间呈近似线性变化。随着倾角的增大，径向正应力 σ_r 为压应力，其数值逐渐增大；环向正应力 σ_φ 逐渐减小，当倾角增大到一定值时，该点可能出现环向受拉的情况；而切应力 $\tau_{r\varphi}$ 则出现正值。由此可见，斜坡倾角对坡体中应力状态的影响显著。

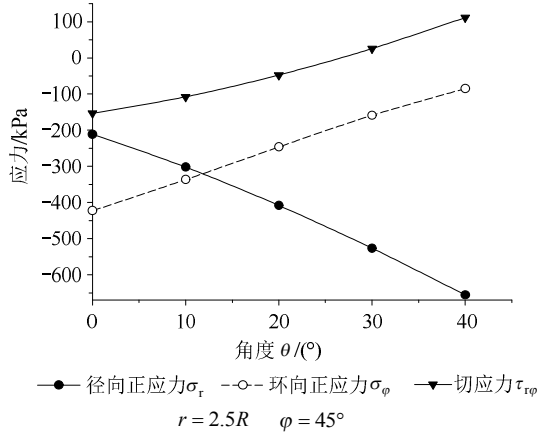


图 6 某点应力随斜坡倾角的变化

Fig.6 Stresses at a point for varying slope dips

圆形孔洞周围有限远处岩体受扩张压力 t 与斜坡重力场的共同作用，扩张压力引起的 σ_r 为正值， σ_φ 为负值，跟重力场应力叠加后呈图 7 所示。应力值随着距离 d 的增加而减小，在距离圆心约 4 倍半径远处逐渐趋于稳定。

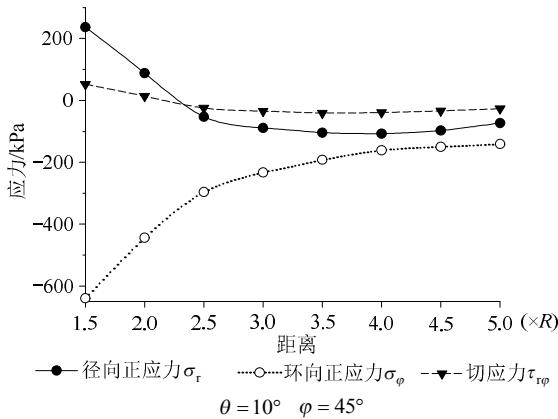
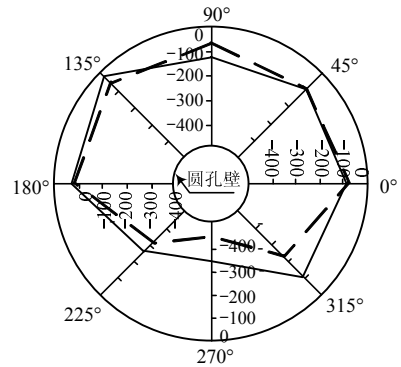


图 7 周围岩体应力随距离的变化

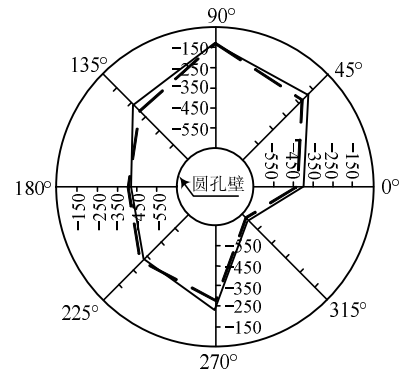
Fig.7 Stresses for varying distances

当圆心到斜坡距离 $h/R=6$ 时，为深埋圆孔扩张问题，可将其简化为无限体情况下扩孔，以距圆心 $2.5R$ 远的坡体中各点为例，通过复变函数和弹性叠加的两种方法进行求解，结果如图 8 所示。图中实线为按复变函数方法得到的解，虚线为弹性叠加法的解答。两种方法求得的径向应力 σ_r 、环向应力 σ_φ 及切应力 $\tau_{r\varphi}$ 的应力值较为接近，一定程度上反映

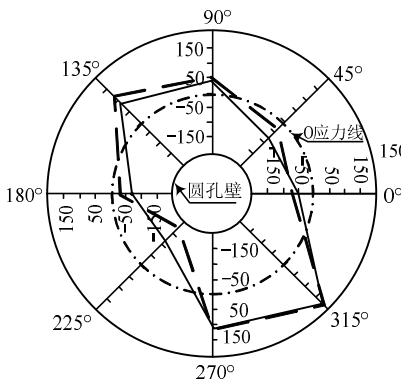
了两种计算方法的可靠性。由图 8(a)可以看出，径向正应力 σ_r 为压应力，其极小值出现在 φ 值为 $90^\circ \sim 135^\circ$ 的方向上，这是由于该点距坡面的距离最近，坡体自重应力在径向上的分量最小的缘故；极大值出现在 φ 值为 $225^\circ \sim 315^\circ$ 的方向上，是由该区域自重应力增大所致；文献[12]中也有类似的结论。图 8(b)为环向正应力 σ_φ ，其极大值出现在 $\varphi = 315^\circ$ 的方向上，近似垂直于斜坡的方向，而极小值近似平行于坡面区域。由图 8(c)可见 φ 值为 $0 \sim 90^\circ$ 及 $180^\circ \sim 270^\circ$ 的范围内切应力 $\tau_{r\varphi}$ 总体为负值，其余总体为正值。



(a) 径向正应力 σ_r



(b) 环向正应力 σ_φ



(c) 切应力 $\tau_{r\varphi}$

—— 复变函数法 - - - 叠加法

图 8 两种方法计算结果对比

Fig.8 Comparison of results of the two methods

5 结论

(1) 假定坡体为均质、各向同性的弹性介质, 初始应力场为重力场, 根据采用复变函数共形映射以及坐标转换的方法求解倾斜坡体中圆形孔洞扩张问题具有良好的可行性。

(2) 对于深埋圆孔扩张情况可将其简化为无限体中圆孔的扩张, 分别求解各应力作用下的解答, 然后进行叠加, 亦可得到与复变函数方法解答较为吻合的结果。

(3) 算例表明斜坡倾角的变化对岩体中应力值变化有很大的影响。圆孔周围土体的应力随着距圆心的距离的增大而减小, 当圆心的距离超过 4 倍的孔径时, 应力趋于稳定, 说明此时圆形孔洞扩张对其影响已变得很小。距圆心 $2.5R$ 远处岩体径向正应力 s_r 和环向正应力 s_j 均为负值, 而切应力 t_{rj} 正负值呈交叉分布。同时, s_r 和 s_j 的极值与斜坡走向呈一定的相关性。

参考文献:

- [1] Dincu S, Andras A. Environment friendly equipment and technology for underground civil excavations [J]. *Annals of the University of Petrosani, Mechanical Engineering*, 2008, 47(10): 47—25.
- [2] 王立志, 冯永冰. 倾斜坡体中水工高压隧洞围岩应力场特性分析[J]. *岩石力学与工程学报*, 2004, 23(23): 4038—4046.
Wang Lizhong, Feng Yongbing. Stress analysis of surrounding rocks of hydraulic high pressure tunnels under steep rock slope [J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(23): 4038—4046. (in Chinese)
- [3] Vesic A S. Expansion of cavities in infinite soil mass [J]. *ASCE-JSMFD*, 1972, 98(3): 265—290.
- [4] Wang Yalong. Ground response of circular tunnel in poorly consolidated rock [J]. *Journal of Geotechnical Engineering*, 1996, 122(9): 703—708.
- [5] 范文, 俞茂宏, 陈立伟. 考虑材料剪胀及软化的有压隧洞弹塑性分析的解析解[J]. *工程力学*, 2004, 21(5): 16—24.
Fan Wen, Yu Maohong, Chen Liwei. An analytic solution of elasto-plastic pressure tunnel considering material softening and dilatancy [J]. *Engineering Mechanics*, 2004, 21(5): 16—24. (in Chinese)
- [6] 万敏, 白云, 陈文财. 管幕箱涵顶进施工中迎面土压力研究[J]. *土木工程学报*, 2007, 40(6): 59—63.
Wan Min, Bai Yun, Chen Wencai. A study on the front earth pressure during box culvert jacking within pipe-roof [J]. *China Civil Engineering Journal*, 2007, 40(6): 59—63. (in Chinese)
- [7] 邹金峰, 吴亚中, 李亮, 彭建国, 张进华. 考虑大变形和排水条件时柱孔扩张问题统一解析[J]. *工程力学*, 2010, 27(6): 1—7.
Zou Jinfeng, Wu Yazhong, Li Liang, Peng Jianguo, Zhang Jinhua. Unified elastic plastic solution for cylindrical cavity expansion considering large strain and drainage condition [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(6): 1—7. (in Chinese)
- [8] 罗战友, 夏建中, 龚晓南. 不同拉压模量及软化特性材料的柱形孔扩张问题的统一解[J]. *工程力学*, 2008, 25(9): 79—84, 92.
Luo Zhanyou, Xia Jianzhong, Gong Xiaonan. Unified solution for the expansion of cylindrical cavity in strain-softening materials with different elastic moduli in tension and compression [J]. *Engineering Mechanics*, 2008, 25(9): 79—84, 92. (in Chinese)
- [9] Verruijt A. Deformations of an elastic half plane with a circular cavity [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 1998, 35(21): 2795—2804.
- [10] Verruijt A. A complex variable solution for a deforming circular tunnel in elastic half-plane [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 1997, 21: 77—89.
- [11] 晏莉, 杨军生, 刘宝琛. 浅埋双孔平行隧道开挖围岩应力和位移分析[J]. *岩土工程学报*, 2011, 33(3): 413—419.
Yan Li, Yang Junsheng, Liu Baochen. Stress and displacement of surrounding rock with shallow twin-parallel tunnels [J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2011, 33(3): 413—419. (in Chinese)
- [12] 王立志, 郭东杰. 偏压隧道二次应力场分析及应用[J]. *力学与实践*, 2000, 22(4): 25—28.
Wang Lizhong, Guo Dongjie. Secondary stress analysis of slope tunnel [J]. *Mechanics in Engineering*, 2000, 22(4): 25—28. (in Chinese)
- [13] 江学良, 杨慧, 曹平. 边坡下伏地下圆形洞室的弹性应力解析[J]. *计算力学学报*, 2012, 29(1): 62—68.
Jiang Xueliang, Yang Hui, Cao Ping. Elastic stress analytic solution of the round and underground cavern under slope [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanical*, 2012, 29(1): 62—68. (in Chinese)
- [14] 汪胡楨. 水工隧洞的设计理论和计算[M]. 第 2 版. 北京: 水利电力出版社, 1990: 273—274.
Wang Huzhen. The design theory and calculation of the hydraulic tunnels [M]. 2nd ed. Beijing: China Water Power Press, 1990: 273—274. (in Chinese)