文章编号: 1000-4750(2014)07-0250-07

基于传递阻抗能量的无基准 Lamb 波裂纹检测

何志全,周 丽,孙 虎

(南京航空航天大学机械结构力学及控制国家重点实验室,南京 210016)

摘 要: 该文提出了一种获取压电陶瓷(PZT)传感器间 Lamb 波传递阻抗的方法,以实现对板结构裂纹的无基准快速检测。该方法从两组并排的 PZT 元件间提取包含 Lamb 波转换模式的损伤特征信号,对特征信号进行分类并求出其传递阻抗,通过比较传递阻抗的能量差异来判断裂纹是否存在。首先通过有限元仿真研究了裂纹导致的 Lamb 波模式转换现象以及 PZT 极化特性对各模式之间相对相位的影响,分析了所提出的方法的可行性;进一步通过在 铝板上的实验验证了该方法的有效性。研究表明该文所提出的方法无需选择最优的激励频率和采样时间即可实现 对裂纹的快速检测,具有较强的鲁棒性和适用性。

关键词:结构健康监测;Lamb 波;模式转换;传递阻抗;无基准;裂纹检测

中图分类号: V214.8 文献标识码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.01.0113

REFERENCE-FREE LAMB WAVE CRACK DETECTION BASED ON TRANSFER IMPEDANCE ENERGY

HE Zhi-quan, ZHOU Li, SUN Hu

(State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: To detect cracks in plate-like structures without any baseline data, a method to obtain Lamb wave transfer impedance from piezoelectric transducers (PZT) was proposed. First, the damage feature signals which contained converted Lamb wave modes were extracted and classified from two sets of parallel PZT components. Subsequently, transfer impedances of the feature signals were obtained in the frequency domain, and the existence of cracks was determined by comparing the energy associated with the transfer impedances. To analyze the applicability of the proposed method, crack-induced Lamb wave mode conversion and effects of PZT polarization characteristics on the relative phase among each mode were studied using the finite element method (FEM). Further, experiments on aluminum plates verified the effectiveness of this method. This research shows that the proposed crack detection method has strong robustness and applicability, as it is not sensitive to the optimal excitation frequency and the sampling time of signals.

Key words: structural health monitoring; Lamb wave; mode conversion; transfer impedance; reference-free; crack detection

利用结构健康监测系统对飞机结构中的裂纹 进行快速检测具有重要的实际意义^[1-2]。基于 Lamb 波的结构健康监测方法可以进行大范围、长距离的 主动监测^[3]。Lamb 波在板结构中传播时,如果遇到 厚度突变,通常将发生模式转换现象,Cho^[4]指出 这一现象可以用来检测裂纹。

常规的损伤检测技术大都是探究监测信号与 基准信号之间的差异,并把这种差异与损伤联系起

收稿日期: 2013-01-31; 修改日期: 2013-05-09

基金项目:国家自然科学基金项目(11172128);国家自然科学基金国际(地区)合作与交流项目(61161120323);高等学校博士学科点专项科研基金项目(20123218110001);江苏省"六大人才高峰"项目(2010-JZ-004);江苏高校优势学科建设工程项目

通讯作者:周 丽(1963-),女,江苏人,教授,博士,博导,主要从事结构健康监测、结构振动控制研究(E-mail: lzhou@nuaa.edu.cn).

作者简介:何志全(1989-),男,江苏人,硕士生,从事结构健康监测研究(E-mail: hezhiquan@nuaa.edu.cn);

孙 虎(1987-), 男, 江苏人, 博士生, 从事结构健康监测研究(E-mail: sunhu@nuaa.edu.cn).

来。通常在获得基准信号很久以后结构才会出现明显的损伤,而环境噪声等一些与损伤无关的因素又会使监测信号产生较大变化,从而影响损伤检测的准确性^[5]。为了克服以上缺点,国内外研究学者提出了一些无基准损伤检测方案,这些方案只利用实时的监测信号即可判断损伤是否存在^[6-7]。Bagheri^[8]提出的方法要求每个压电传感器激发出的Lamb波能量完全相同,这在实际中较难实现。王强和袁慎芳^[9]提出的方法需要对采集到的信号进行时反变换,并将时反信号再次输入到结构中,操作过程比较复杂,不利于实现实时的在线监测。本文发展了一种基于传递阻抗能量的无基准Lamb 波裂纹检测方法,利用压电传感器提取和分类包含转换模式的特征信号,依据特征信号传递阻抗的能量差异建立损伤指标,得出损伤指标与裂纹存在之间的关系。

1 Lamb 波模式提取

在一定厚度的板中以一定频率激发出的 Lamb 波可认为只包含 $S_0 和 A_0$ 两种基本模式^[10]。当 Lamb 波在传播过程中遇到裂纹时, S_0 模式通常会转换出 新的 A_0 模式,记为 NA; A_0 模式通常会转换出新的 S_0 模式,记为 NS。PZT 元件具有良好的压电特性, 在结构健康监测中常被用来激励和测量 Lamb 波^[11-12]。Lamb 波模式的相对相位是随着 PZT 元件 所处位置、PZT 元件的极化方向以及 Lamb 波模式 的对称性而变化的^[13]。

本文利用 ABAQUS6.10 软件模拟了裂纹导致的 模式转换现象。如图 1 所示,建立了铝板的平面应 变模型,弹性模量 *E*=70GPa,泊松比*n*=0.3,密度 *p*=2.78×10³kg/m³。板的上下表面对称布置了四个正 极指向板外的压电传感器(PZT APC 850^[14]),传感器 尺寸为 10mm×0.5mm,*A*、*B* 为激励端,*C*、*D* 为测 量端。板模型划分成 36000 个平面应变单元,单元 大小为 1mm×1mm。每个传感器模型划分成 20 个压 电单元,单元大小为 0.5mm×0.5mm。模型中通过删 除靠近板上表面的 3 个单元模拟了裂纹的存在,裂 纹尺寸为 3mm×1mm,裂纹位置更靠近激励端。



Fig.1 Schematic diagram of finite element simulation model

选取中心频率为 120kHz、幅值为 1V 的五波峰 窄带波作为仿真输入信号在结构中激发 Lamb 波, 信号的采样间隔为 0.1µs,响应波形如图 2 所示。



Fig.2 Response signals of simulation at a driving frequency of 120kHz

由理论计算^[15]可知, 仿真中 S₀模式和 A₀模式 的传播速度分别为 5194m/s 和 3004m/s, 图 2 中 4 个波包的飞行时间依次为 0.39ms、0.46ms、0.6ms 和 0.67ms,结合模型尺寸和裂纹位置可判断出它们 所对应的 Lamb 波模式依次为 S₀、NS、NA 和 A₀。 图 2 中实线和虚线所表示的 Lamb 波模式相位相反, 可以看出:当激励与测量元件位于板的同侧时, S₀ 和 A₀是同相的, NS 和 NA 也是同相的;而当激励 与测量元件位于板的异侧时,它们就变成反相的 了。基本模式与其转换模式之间的相对相位受到裂 纹对称性的影响,在靠近裂纹的监测路径 AC 中, S₀和 NA、A₀和 NS 都是同相的;而在远离裂纹的监 测路径 BD 中,它们就都是反相的了。

根据各模式的相对相位,可用式(1)表示响应信号的组成,进一步可得到在时域中提取 Lamb 波模式的方法如式(2)所示。要使得利用式(2)提取出的模式完全准确,必须使各 PZT 元件完全一样,它们的位置完全并列,粘结条件也完全相同,实际上这些条件不可能全部满足。不仅如此,当环境噪声较大时,响应信号所包含的信息将更加复杂,在时域中精确的提取 Lamb 波模式将变得更加困难。

AC		1	1	1	1	S_0	
AD	=	1	1	-1	-1	NS	(1)
BC		1	-1	1	-1	NA	(1)
BD		1	-1	-1	1	$\begin{bmatrix} A_0 \end{bmatrix}$	
$[S_0]$	$\left = \frac{1}{4} \right $	[1 1 1	1]	$\begin{bmatrix} AC \end{bmatrix}$			
NS		1	1	-1	-1	AD	(2)
NA		1	-1	1	-1	BC	(2)
A_0		1	-1	-1	1		

2 基于传递阻抗能量的裂纹检测方法

为了克服在时域中提取 Lamb 波模式的困难, 本文发展了一种基于传递阻抗能量的无基准 Lamb 波裂纹检测方法。首先在时域中提取与损伤有关的 特征信号,如式(3)和式(4)所示。

$$\begin{bmatrix} T_{1} \\ T_{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} AC \\ AD \\ BC \\ BD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NS + NA \\ NS - NA \end{bmatrix}$$
(3)
$$\begin{bmatrix} T_{3} \\ T_{4} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1} \\ T_{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1} \\ T_{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{1} \\ T_{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AC \\ AD \\ BC \\ BD \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} NS \\ NA \end{bmatrix}$$
(4)

通过式(3)得到 T_1 和 T_2 ,如图 3 所示;进一步 通过式(4),将 T_1 和 T_2 分离而得到 T_3 和 T_4 ,如图 4(a)所示。对 4 组特征信号进行规范化处理,以使 得转换模式在不同的信号中具有相同的幅值。将 4 组特征信号分为两类: A 类信号如 T_1 和 T_2 ,它们同 时包含两种转换模式; B 类信号如 T_3 和 T_4 ,它们只



包含一种转换模式。用特征信号在频域内的幅值表 征信号能量,如图 4(b)所示,A 类信号的能量(e₁或 e₂)是 B 类信号能量(e₃或 e₄)的两倍。而当板中没有 裂纹时,转换模式并不存在,两类信号的能量都为 零。以上结果是在忽略了初始误差、环境噪声、模 式重叠等因素的理想情况下获得的。

在非理想情况下,无损状态下两类信号的幅值 不一定为零,损伤状态下两类信号的能量比也不一 定满足 2:1 的关系。随着监测路径的间距、板的 材料、几何尺寸以及裂纹位置的改变,对应最小模 式重叠程度的最优激励频率也将随之改变。为了避 免对最优激励频率的选取,本文提出的基于传递阻 抗能量的方法将在一定频带内实现对裂纹的检测。 在这里,传递阻抗的定义是:当激励频率在一定频 带内等间隔变化时,激励/测量路径输入与输出之间 的频响函数。分别对各组特征信号的传递阻抗的幅 值取平均得到其平均能量 E1-E4。在非理想条件下, A 类信号的平均能量将会比 B 类信号的平均能量 大,这种异类信号之间平均能量的差异是由裂纹导 致的模式转换现象引起的;而初始误差等其他因素 将会引起同类信号平均能量之间出现差异。因此, 当异类信号能量差异的最小值比同类信号能量差 异的最大值还大时,则可以鉴定出裂纹的存在。异 类信号能量差异的最小值可表示为{min(E1,E2) $max(E_3,E_4)$ }, 记作 D_1 ; 而同类信号能量差异的最大 值则表示为 max(|E1-E2|, |E3-E4|), 记作 D2; 损伤 指标 DI=D1-D2。如果 DI>0,则存在裂纹;如果 DI<0, 则不存在裂纹。这种依据信号平均能量定义损伤指 标的方法,实现了对裂纹的无基准检测,同时降低 了环境噪声对监测信号的影响,提高了检测结果的 准确性。

3 实验验证

本文建立的裂纹检测系统如图 5 所示,包括计算机、NI-5412 任意波形发生器、KH Model 7620M 宽频功率放大器、NI-6115 多功能数据采集卡和尺寸为 1000mm×500mm×5mm 的铝板。实验中在板的上下表面对称布置了 4 个正极指向板外的圆形 PZT 传感器,传感器直径为 10mm,厚度为 1mm。

实验中针对以下 3 种情况进行了验证:结构中 不存在裂纹的"无损情况";结构中存在裂纹的"损 伤位置 I"和"损伤位置Ⅱ"。与"损伤位置 I"相 比,"损伤位置Ⅱ"中裂纹与激励端和与测量端的 距离差更小,这使得转换模式之间的重叠现象更加 严重。实验中选取五波峰窄带波作为输入在结构中 激发 Lamb 波,激励频带为 100kHz~150kHz,扫频 步长为 1kHz。采样频率是 8MHz,采样时间为 1ms。



图 5 裂纹检测系统 Fig.5 Crack detection system

3.1 无损情况

图 6 为"无损情况"的实验试件示意图,100kHz 激励频率下"无损情况"的特征信号 $T_1 \sim T_4$ 如图 7 所示,理论上它们的幅值应该是 0,但是实验中仍 接收到了幅值小于 0.02V 的误差信号。



图 6 "无损情况"实验试件示意图

Fig.6 Schematic diagram of experimental specimen under 'undamaged condition'



图 7 100kHz 激励频率下"无损情况"的特征信号

Fig.7 Feature signals at a driving frequency of 100 kHz under 'undamaged condition'

图 8 为"无损情况"下求出的传递阻抗幅值谱 Z₁~Z₄,进一步计算出"无损情况"下的能量均值 E₁~E₄ 以及能量差异 D₁和 D₂,如图 9(a)和图 9(b)所示: D₁ <D₂,即 DI<0,可以判断出结构中不存在裂纹,判 断结果与实际情况相符。



 (a) "无损情况"平均能量 (b) "无损情况"能量差异
 图 9 "无损情况"的平均能量及其差异
 Fig.9 Average energy and their differences under 'undamaged condition'

3.2 损伤位置 I

图 10 为"损伤位置 I"的实验试件示意图,试 件中有一条长 50mm、宽 1mm、深 3mm 的裂纹, 裂纹更靠近激励端。



图 10 "损伤位置 I"的实验试件示意图 Fig.10 Schematic diagram of experimental specimen under 'damaged location I'

100kHz 激励频率下"损伤位置 I"的特征信号 $T_1 \sim T_4$ 如图 11 所示,信号幅值远大于"无损情况"。 由理论计算^[15]可知,该激励频率下 S_0 和 A_0 模式的 传播速度分别为 5282m/s 和 2857m/s。在 $T_1 \sim T_3$ 中, 第 1 个波包飞行时间都是 0.15ms,可以判断出此波 包是转换模式 NS;而在 T_4 中,第 1 个波包飞行时 间是 0.23ms,可以判断出此波包是转换模式 NA。



图 11 100kHz 激励频率下"损伤位置 I"的特征信号 Fig.11 Feature signals at a driving frequency of 100 kHz under 'damaged location I'

图 12 为"损伤位置 I"下的传递阻抗幅值谱, 进一步计算出该情况下的能量均值以及能量差异如 图 13(a)和图 13(b)所示: *D*₁>*D*₂,即 *DI*>0,可以判 断出结构中存在裂纹,判断结果与实际情况相符。







(a) "损伤位置 I" 平均能量 (b) "损伤位置 I" 能量差异
 图 13 "损伤位置 I" 的平均能量及其差异
 Fig.13 Average energy and their differences under
 'damaged location I'

3.3 损伤位置 II

如图 14 所示,在"损伤位置II"中测量端距裂纹更近。图 15 为 100kHz 激励频率下"损伤位置 II"的特征信号。其中,*T*₃和 *T*₄的第1个波包飞行时间分别为 0.07ms 和 0.09ms,可以判断出它们分

别是转换模式 NS 和 NA。由于两种转换模式间出现 了模式重叠现象,使得它们在 T₁和 T₂中相互湮没 而变得难以确定。该情况下的传递阻抗能量均值和 能量差异如图 16 所示: DI>0,该方法仍能检测出 裂纹的存在。











 (a) "损伤位置II" 平均能量 (b) "损伤位置II" 能量差异
 图 16 "损伤状态II" 的平均能量及其差异
 Fig.16 Average energy and their differences under 'damaged location II'

3.4 采样时间对本方法的影响

在"无损情况"和"损伤位置 I"中,速度最 慢的 A₀模式的飞行时间为 0.25ms。如表 1 和 2 所 示:当采样时间大于 A₀模式的飞行时间时,"无损 情况"都有 DI<0,"损伤位置 I"都有 DI>0,所 提出的方法对裂纹存在性的判断是准确的,且随着 采样时间的增加,损伤指标 DI 的绝对值也随之增 大。但是当采样时间接近或小于 A₀模式的飞行时间时,特征信号将无法完整的反映与结构健康状况有关的信息,如表 2 所示: 0.25ms 和 0.125ms 采样时间对应的 *DI*<0,判断结果就不再准确了。

表 1 "无损情况"不同采样时间的验证结果

 Table 1
 Verification results of 'undamaged condition'

 correspond to different sampling times

采样时间/ms	E_1	E_2	E_3	E_4	D_1	D_2	DI
1.000	2.92	4.24	2.54	2.58	0.34	1.32	-0.96
0.875	2.24	3.25	1.94	1.98	0.26	1.01	-0.75
0.750	1.64	2.39	1.45	1.62	0.02	0.75	-0.73
0.625	1.14	1.66	0.99	1.01	0.13	0.52	-0.39
0.500	0.73	1.06	0.66	0.64	0.07	0.33	-0.26
0.375	0.41	0.60	0.36	0.32	0.05	0.19	-0.14
0.250	0.27	0.18	0.09	0.16	0.02	0.09	-0.06
0.125	0.04	0.02	0.02	0.03	0	0.02	-0.02

主っ	"揭佐位罢 I"	不同变样时间的验证结果
तर <u>८</u>	视灯灯上自工	个回本件时间的短近纪未

 Table 2
 Verification results of 'damage location I' correspond to different sampling times

采样时间/ms	E_1	E_2	E_3	E_4	D_1	D_2	DI
1.000	36.5	39.80	26.1	26.50	10.00	3.40	+6.60
0.875	27.9	30.50	20.0	20.10	7.80	2.60	+5.20
0.750	20.5	22.40	14.9	15.70	4.80	1.90	+2.90
0.625	15.5	14.30	10.2	10.40	3.90	1.20	+2.70
0.500	9.10	10.00	6.60	6.50	2.50	1.10	+1.40
0.375	5.10	5.60	3.70	2.90	1.40	0.80	+0.60
0.250	2.30	2.50	2.10	0.80	0.20	1.30	-1.10
0.125	0.02	0.04	0.03	0.01	0.01	0.02	-0.01

由以上实验结果可知,只要采样时间大于 A₀ 模式的飞行时间,本文所提出的方法均能实现对裂 纹存在性的有效判断。

4 结论

本文提出了一种基于传递阻抗能量的无基准 Lamb 波裂纹检测方法,仿真和实验结果表明了所 提出方法的可行性和有效性。论文的主要成果有:

(1) 本文利用 Lamb 波在传播过程中遇到裂纹 而发生的模式转换现象,从监测路径中提取和分类 特征信号,通过比较特征信号的能量差异实现了对 裂纹的无基准快速检测。

(2) 本文所提出的方法不需要在时域中精确地 分解出独立的 Lamb 波模式,只需要在频域内求解 特征信号的传递阻抗,信号处理方法简单,检测效 率较高。

(3)本文所提出的方法无需选择特定的激励频 率和采样时间,也无需规定损伤阈值,只需要在一 定频带内比较特征信号传递阻抗的能量差异即可

实现对裂纹检测,具有较强的鲁棒性和适用性。

参考文献:

- Boller C. Next generation structural health monitoring and its integration into aircraft design [J]. International Journal of Systems Science, 2000, 31(11): 1333-1349.
- [2] 孙虎,周丽. 基于谱元法的裂纹梁 Lamb 波传播特性研究[J]. 工程力学, 2012, 29(9): 50-55, 59.
 Sun Hu, Zhou Li. Lamb wave propagation in a cracked beam using spectral finite element method [J]. Engineering Mechanics, 2012, 29(9): 50-55, 59. (in Chinese)
- [3] 冯勇明,周丽. 基于 Lamb 波和匹配追踪方法的结构损 伤定位[J]. 南京航空航天大学报, 2011, 43(2): 184-190.

Feng Yongming, Zhou Li. Structure damage localization based on lamb waves and matching pursuits [J]. Journal of Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2011, 43(2): 184–190. (in Chinese)

- [4] Cho Y. Estimation of ultrasonic guided wave mode conversion in a plate with thickness variation [J]. IEEE Transaction on Ultrasonic Ferroelectric and Frequency Control, 2000, 47(3): 591-603.
- [5] Sohn H. Effects of environmental and operational variability on structural health monitoring [J]. Philosophical Transaction of the Royal Society of London A, 2007, 365(1851): 539-560.
- [6] Sohn H, Park H W, Law K H, et al. Combination of a time reversal process and a consecutive outlier analysis for baseline-free damage diagnosis [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2007, 18(4): 335-346.
- [7] Nichols J M, Seaver M, Trickey S T. A method for detecting damage-induced nonlinearities in structures using information theory [J]. Journal of Sound and Vibration, 2006, 297(1-2): 1-16.
- [8] Bagheri A, Li Kaiyuan, Rizzo P. Reference-free damage detection by means of wavelet transform and empirical mode decomposition applied to Lamb waves [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2013, 24(2): 194–208.
- [9] 王强, 袁慎芳. 无参考主动 Lamb 波结构损伤时反成像 监测方法[J]. 航空学报, 2010, 31(1): 178-183.
 Wang Qiang, Yuan Shenfang. No baseline time reversal imaging method for active lamb wave structural damage monitoring [J]. Acta Aeronautica ET Astronautica Sinica, 2010, 31(1): 178-183. (in Chinese)
- [10] Viktorov I A. rayleigh and lamb waves plenum [M]. New York: Wiley, 1967.
- [11] 张光磊, 杜彦良. 智能材料与结构系统[M]. 北京: 北 京大学出版社, 2010: 59-61.

Zhang Guanglei, Du Yanliang. Smart materials and structural systems [M]. Beijing: Peking University Press,

2010: 59-61. (in Chinese)

- [12] Giurgiutiu V. Tuned lamb wave excitation and detection with piezoelectric wafer active sensors for structural health monitoring [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2005, 16(4): 291-305.
- [13] Kim S B, Sohn H. Instantaneous reference-free crack detection based on polarization characteristics of piezoelectric materials [J]. Smart Materials and Structures, 2007, 16(6): 2375-2387.
- [14] Soni S, Das S, Banerjee S, et al. Simulation of

damage-features in complex joint using guided waves [C]// Proc. SPIE 6926, Modeling, Signal Processing, and Control for Smart Structures 2008, 69260O (April 03, 2008); doi:10.1117/12.776468.

[15] 严刚. 基于应力波和时频分析的复合材料结构损伤监测和识别[D]. 南京: 南京航空航天大学, 2005: 9-16.
Yan Gang. Damage detection and identification for composites using stress waves and time-frequency analysis [D]. Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, 2005: 9-16. (in Chinese)

(上接第238页)

 [9] 金基铎,杨晓东,尹峰.两端铰支输流管道在脉动内流 作用下的稳定性和参数共振[J].航空学报,2003,24(4): 317-322.

Jin Jiduo, Yang Xiaodong, Yin Feng. Stability and parametric resonances of a pinned-pinned pipe conveying pulsating fluid [J]. Acta Aeronautica Et Astronautica Sinica, 2003, 24(4): 317-322. (in Chinese)

- [10] Wiggert D C, Tijsseling A S. Fluid transients and fluid-structure interaction in flexible liquid-filled piping[J]. Applied Mechanics Reviews, 2001, 54(5): 455-481.
- [11] Païdoussis M P, Issid N T. Dynamic stability of pipes conveying fluid [J]. Journal of Sound and Vibration, 1974, 33(2): 267–294.
- [12] Ashley H, Haviland G. Bending vibration of a pipe line containing flowing fluid [J]. Journal of Applied Mechanics, 1950, 17(3): 229-232.
- [13] Feodos'ev V P. Vibrations and stability of a pipe when liquid flows through it [J]. Inzhenernyi Sbornik, 1951, 10: 169-170.
- [14] 金基铎, 宋志勇, 杨晓东. 两端固定输流管道的稳定性
 和参数共振[J]. 振动工程学报, 2004, 17(2): 190-195.
 Jin Jiduo, Song Zhiyong, Yang Xiaodong. Stability and

parametric resonances of clamped-clamped pipe conveying fluid [J]. Journal of Vibration Engineering, 2004, 17(2): 190–195. (in Chinese)

- [15] 吴天新, 陆鑫森. 钻柱内外沿轴向流动的钻井液对钻 柱横向振动的影响[J]. 振动与冲击, 1995, 14(2): 1-6.
 Wu Tianxin, Lu Xinsen. The influence of the annular and the internal drilling fluids flowing in axial on the lateral vibrations of a drill collar [J]. Journal of Vibration and Shock, 1995, 14(2): 1-6. (in Chinese)
- [16] 郭长青,刘红涛,王晓锋,张楚汉. 输流管道在分布随 从力作用下的振动和稳定性[J]. 工程力学,2010,27(4): 190-196.

Guo Changqing, Liu Hongtao, Wang Xiaofeng, Zhang Chuhan. Vibration and stability of pipes conveying fluid with distributed follower force [J]. Engineering Mechanics, 2010, 27(4): 190–196. (in Chinese)

[17] 包日东, 冯颖, 毕文军. 弹性支承输流管道的动力学特性[J]. 机械设计与制造, 2010(3): 129-131.
Bao Ridong, Feng Ying, Bi Wenjun. Dynamic characteristics of pipeline conveying fluid with elastic supports [J]. Machinery Design & Manufacture, 2010(3): 129-131. (in Chinese)