

# 用于失谐叶盘动力学特性分析的 减缩计算方法

王培屹, 李琳

(北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191)

**摘 要:** 提出了一种用于失谐叶盘动力学特性分析的减缩计算方法. 该方法采用基于周期对称的谐波平衡法, 建立非线性的迭代方程, 能够基于单扇区的矩阵求解整个失谐叶盘的强迫响应, 且不存在任何截断误差, 因而效率高于部件模态综合法但精度并不降低. 从周期对称结构理论出发给出了方法原理的数学推导, 在此基础上通过一个失谐叶盘有限元模型算例对该方法的效率与精度进行了讨论. 结果表明: 相较部件模态综合法, 周期对称谐波平衡法矩阵维度减小 59.5%, 计算复杂度减少 93.4%, 计算时间节省 57.4%.

**关键词:** 周期对称; 谐波平衡; 失谐叶盘; 减缩模型; 块循环矩阵

中图分类号: V231

文献标志码: A

## Reduced order computational method for analysis of mistuning bladed disk dynamics characteristic

WANG Pei-yi, LI Lin

(School of Energy and Power Engineering,  
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

**Abstract:** A reduced order method was proposed to analyze the dynamics characteristic of mistuning bladed disks. Based on cyclic symmetry and harmonic balance method, a non-linear iteration equation was formed, of which the matrix scale was the same to the matrix size of a single sector and was solved without any truncate error, consequently its efficiency was higher than the component mode synthesis method without losing any accuracy. The mathematical deduction was given based on cyclic periodicity theory. Furthermore, the efficiency and accuracy of this method were investigated by performing a numerical study on a finite element model of mistuning bladed disk. The results show that, compared with component mode synthesis method, the matrix size of the method proposed is reduced by 59.5%, the computational complexity is lowered by 93.4%, the computational time is saved by 57.4%.

**Key words:** cyclic symmetry; harmonic balance; mistuning bladed disk;  
reduced order modeling; generalized Fourier matrix; blocked cyclic matrix

航空发动机中叶盘的理想结构形式是完美的周期对称结构. 然而制造安装过程中不可避免的偏差及使用过程中的磨损使得实际的叶盘结构并非完美的周期对称, 各结构扇区间存在着不同程度的差异. 这一现象被称为“失谐”, 意即(结构)失

去了循环对称的谐调特性. 失谐可以导致叶盘的局部振动响应大于对应的谐调叶盘, 对航空发动机的结构安全性有不可忽视的影响. 因此长期以来关于失谐叶盘结构动力学特性的研究一直是航空发动机结构分析的热点.

收稿日期: 2013-11-06

作者简介: 王培屹(1986-), 男, 陕西白河人, 博士生, 主要研究方向为叶盘结构流固耦合振动.

E-mail: wangpeiyi@sjp.buaa.edu.cn

研究失谐叶盘结构首先要解决的是减缩建模问题. 由于失谐叶盘结构的周期对称性被破坏, 设计与研究人员不再能利用其缩减计算规模; 而且失谐具有随机性, 失谐结构的特性需要进行大量的统计计算. 因此关于失谐叶盘减缩建模技术的研究是失谐叶盘研究中的一个关键问题.

在基于有限元法的减缩建模中, 模态综合法最早得到较多的关注. Tran<sup>[1]</sup>用部件模态综合法将系统的自由度缩减到较低的程度; Moyroud等<sup>[2]</sup>针对带冠叶盘结构的减缩建模进行研究, 将经典的C-B模型(Craig and Bampton substructure mode)用于叶冠间存在摩擦约束的情况; 2001年, Yang和Griffin提出了具有重要意义的公称模态子集的方法<sup>[3]</sup>. 这种方法将完整的系统矩阵投影到一组谐调的模态基上, 因此叶盘被处理成单一的转子结构, 减缩模型的自由度取决于用于投影的模态基保留了多少阶模态. 在Petrov等提出的基于传递函数矩阵的方法中<sup>[4]</sup>, 失谐系统的强迫响应用谐调系统的强迫响应向量和修正矩阵表示. 该修正矩阵是由谐调系统的频响函数及由受失谐扰动的系统动力刚度矩阵构成. 本质上, 这是一种类似于公称模态子集的方法. Sinha<sup>[5]</sup>和Brown等<sup>[6]</sup>研究的正交分解法通过正交分解把多个变量转化为少数几个主成分的多元统计方法, 这些主成分能够反映原始变量的大部分信息, 通常为原始变量的线性组合, 为使得这些主成分所包含的信息互不重叠, 要求各主成分之间互不相关. 该方法由于较强依赖于叶片频率与振型对随机变量主方向的线性关系, 因而对于叶片高阶振型及频率模拟精度较差; 姚建尧等<sup>[7]</sup>在研究失谐叶盘瞬态响应求解方法时, 为了利用叶盘结构的周期对称性将失谐叶盘结构表示成一个谐调叶盘结构和相应失谐量叠加的形式, 再将失谐量作为激励项移至方程右端对方程进行求解, 但此时右端激励与同时刻的响应是相关的, 因此原来失谐的线性问题被转换成为一个谐调结构的非线性问题. 对于小阻尼的整体叶盘结构, 在时域中求解该方程其迭代效率较频域方法还是较低的. 李琳<sup>[8-9]</sup>针对带冠叶盘的二维子结构循环非线性力学模型, 采用时频转换的谐波平衡法进行求解, 在此基础上用概率统计的方法讨论了带冠叶盘系统的非谐调对其固有特性以及受迫响应特性的影响, 重点研究了叶冠间非谐调耦合程度的影响. Poudou<sup>[10]</sup>在研究带干摩擦的叶盘结构建模方法及动力学特性时, 为减小计算规模及提高计算效

率, 周期对称性被用于时频转换的谐波平衡计算.

综上所述, 失谐叶盘的减缩建模技术可分为两大类: 一类是基于模态综合理论的线性求解; 另一类是利用对应的谐调结构周期对称性的非线性求解. 后者在模拟带接触(如叶冠、凸肩)的失谐结构时有明显的优势. 本文的研究思路属于后者. 本文提出的方法是: 利用谐调结构周期对称特性, 在广义傅里叶空间导出以失谐内力作为激振力的结构运动方程的拟对角化块循环矩阵形式, 在此基础上应用谐波平衡法进行求解. 由于方程不是理想的块循环形式, 因此按块循环求解时, 加入了迭代步骤. 按块循环矩阵形式求解使得实际的求解规模大大减小, 且不存在截断误差, 具有效率高、不损失精度的特点. 进一步的分析发现, 该方法能够从数学形式上给出导致失谐响应放大的原因. 鉴于该方法本质上是基于周期对称的谐波平衡法, 故本文用CHBM(cyclic-based harmonic balance method)作为方法的简称.

## 1 CHBM的原理

一般循环对称结构的自由运动方程可由下式给出<sup>[11]</sup>:

$$(\mathbf{B}_{\text{circ}}[\mathbf{K}_1 \cdots \mathbf{K}_N] - \omega^2 \cdot \mathbf{B}_{\text{circ}}[\mathbf{M}_1 \cdots \mathbf{M}_N]) \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (1)$$

式(1)中 $\mathbf{B}_{\text{circ}}[\cdot]$ 为块循环矩阵;  $\omega$ 为某阶固有振动频率;  $\mathbf{u}$ 为相应的振动位移;  $N$ 为扇区数;  $\mathbf{K}_1$ 为基本扇区刚度阵;  $\mathbf{K}_2, \dots, \mathbf{K}_N$ 为扇区间的耦合刚度阵. 若取坐标变换

$$\mathbf{u} = (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{q} \quad (2)$$

式(2)中 $\mathbf{E}$ 为 $N \times N$ 阶傅里叶矩阵,  $\otimes$ 为克罗内科积符号,  $\mathbf{I}$ 为 $n \times n$ 阶的单位阵,  $n$ 为单扇区自由度数,  $\mathbf{q}$ 为傅里叶坐标. 将式(2)代入式(1), 可以得到

$$\left[ \mathbf{B}_{\text{diag}}(\tilde{\mathbf{K}}_1 \quad \tilde{\mathbf{K}}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{K}}_N) - \omega^2 \cdot \mathbf{B}_{\text{diag}}(\tilde{\mathbf{M}}_1 \quad \tilde{\mathbf{M}}_2 \quad \cdots \quad \tilde{\mathbf{M}}_n) \right] \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3)$$

式(3)中 $\mathbf{B}_{\text{diag}}[\cdot]$ 表征块对角矩阵. 由前述可知, 系统的矩阵维度被减缩到分块矩阵上

$$(\tilde{\mathbf{K}}_i - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}}_i) \mathbf{q}_i = \mathbf{0} \quad (4)$$

对于整体叶盘, 仅相邻扇区间存在耦合, 因此存在

$$\mathbf{K}_i = \begin{cases} \mathbf{K}_1 & i = 1 \\ \mathbf{K}_c & i = 2 \\ \mathbf{K}_c^T & i = N \\ \mathbf{0} & i = \text{else} \end{cases} \quad (5)$$

对于质量阵也是类似,将式(5)代入式(4),可以得到

$$\left\{ \mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_c \cos \left[ \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] \right\} - \omega^2 \left\{ \mathbf{M}_1 + 2\mathbf{M}_c \cos \left[ \frac{2\pi}{N}(i-1) \right] \right\} \mathbf{q} = 0 \quad (6)$$

式(6)为基于单扇区矩阵的谐调叶盘模态方程.对于带阻尼的受迫循环对称系统,其运动方程为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (7)$$

式(7)中  $\mathbf{C}$  为阻尼矩阵.若外激励可表示为谐波形式的行波激励叠加,即  $\mathbf{f}(t)$  可用下式表示:

$$\mathbf{f}(t) = e^{j\omega t} \cdot \sum_{i=1}^N (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_i) \quad (8)$$

式(8)中  $\mathbf{e}_i$  为  $N \times 1$  的行波向量

$$\mathbf{e}_i = [\omega_i^0 \quad \omega_i^1 \quad \cdots \quad \omega_i^{N-1}]^T \quad (9)$$

其中

$$\omega_i = e^{-j\frac{2\pi}{N}(i-1)} \quad (10)$$

则式(7)的频域表达具有如下形式:

$$\Delta \mathbf{u} = (-\omega^2 \mathbf{M} + j\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}) \mathbf{u} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_i) \quad (11)$$

将坐标变换公式(式(2))代入式(11),并将方程左右端同乘  $\mathbf{E}^H \otimes \mathbf{I}$ ,则可以得到

$$(\mathbf{E}^H \otimes \mathbf{I}) \Delta (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{q} = \sum_{i=1}^N (\mathbf{E}^H \otimes \mathbf{I}) (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_i) \quad (12)$$

式(12)中上标 H 代表共轭转置.可以得到

$$\mathbf{B} \text{diag}[\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \cdots \quad \Lambda_N] \mathbf{q} = \sum_{i=1}^N (\hat{\mathbf{1}}_i \otimes \mathbf{f}_i) \quad (13)$$

式(13)中向量符号  $\hat{\mathbf{1}}_i$  为维度为  $N \times 1$ ,且仅有第  $i$  个元素为 1 的单位向量.综上,系统的响应的求解规模可以降阶到单块矩阵的规模:

$$\Lambda_i \mathbf{q}_i = \mathbf{f}_i \quad (14)$$

### 1.1 失谐叶盘结构的谐波平衡方程式

失谐叶盘结构的有限元方程可以由下式给出:

$$(\mathbf{M} + \Delta \mathbf{M}) \ddot{\mathbf{u}} + (\mathbf{C} + \Delta \mathbf{C}) \dot{\mathbf{u}} + (\mathbf{K} + \Delta \mathbf{K}) \mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (15)$$

式(15)也可写作

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) + \mathbf{f}_{nl}(t) \quad (16)$$

式中

$$\mathbf{f}_{nl}(\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}, t) = -(\Delta \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \Delta \mathbf{K}\mathbf{u}) \quad (17)$$

方程(式(16))的物理意义是:循环对称的叶盘结构受到了  $\mathbf{f}(t)$  和  $\mathbf{f}_{nl}(t)$  的双重激励;其中  $\mathbf{f}_{nl}(t)$  与结构位移相关(实际上是由失谐引起的结构内力).因此式(16)是一个非线性方程.用谐波平衡法求解时<sup>[12]</sup>,将已知的激励函数与未知的位移响应函数均写成若干阶傅里叶级数的和式形式,即

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) \approx \sum_{k=0}^{n_h} \mathbf{u}_k e^{jk\omega t} \\ \mathbf{f}(t) \approx \sum_{k=0}^{n_h} \mathbf{f}_k e^{jk\omega t} \\ \mathbf{f}_{nl}(t) \approx \sum_{k=0}^{n_h} \mathbf{f}_k^{nl} e^{jk\omega t} \end{cases} \quad (18)$$

其中  $\mathbf{f}_k$  为已知,  $\mathbf{u}_k$  为未知,  $\mathbf{f}_k^{nl}$  为  $\mathbf{u}_k$  的函数.将式(18)代入式(16),可以得到

$$[-(k\omega)^2 \mathbf{M} + jk\omega \mathbf{C} + \mathbf{K}] \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^{nl} \quad (19)$$

记做

$$\Delta_k \mathbf{u}_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{f}_k^{nl} = \mathbf{0} \quad (20)$$

其中  $k=0, 1, \dots, n_h$ ; 表征谐波阶次.

### 1.2 失谐刚度矩阵的块循环形式

式(16)的左端各项对应谐调叶盘结构动力,其系数矩阵均具有对称块状循环特征.因而以下将讨论如何利用谐调叶盘的对称块状循环特性,以减缩非谐调叶盘结构的计算规模.

设叶盘结构仅发生叶片刚度失谐,每个叶片刚度失谐量与叶片本身刚度呈线性关系,则失谐矩阵可以表示为

$$\Delta \mathbf{K} = \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \otimes \mathbf{K}_b \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\delta} = [\delta_1 \quad \cdots \quad \delta_N] \quad (22)$$

式中  $\boldsymbol{\delta}$  为失谐向量.  $\mathbf{K}_b$  为与单扇区刚度矩阵  $\mathbf{K}_1$  同维矩阵,若  $\mathbf{K}_1$  表示为

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{dd} & \mathbf{K}_{db} \\ \mathbf{K}_{bd} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \quad (23)$$

式(23)中下标 d 表示轮盘自由度,下标 b 表示叶片自由度.则失谐基准矩阵  $\mathbf{K}_b$  表示为

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{bb} \end{bmatrix} \quad (24)$$

图 1 为物理坐标中的失谐矩阵示意图,不同的区块颜色表明失谐量大小不同.由式(21)及图 1 可知,物理坐标下的失谐矩阵为块对角矩阵.

傅里叶坐标下失谐矩阵可由下式给出

$$(\mathbf{E}^H \otimes \mathbf{I}) \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \otimes \mathbf{K}_b (\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}) = [\mathbf{E}^H \text{diag}(\boldsymbol{\delta}) \mathbf{E}] \otimes \mathbf{K}_b = \text{circ}(\tilde{\delta}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\delta}_n) \otimes \mathbf{K}_b \quad (25)$$

式(25)中  $\text{circ}(\cdot)$  表示循环矩阵. 图 2 为傅里叶坐标下的失谐矩阵示意图, 由图及式(25)可知, 其为块循环矩阵.

由图 2 可知: 由于块循环的失谐矩阵, 原本互相解耦的不同节径下的响应发生耦合, 使得原本单一节径成份的强迫响应变成多节径成分响应, 因而导致了结构的响应放大.

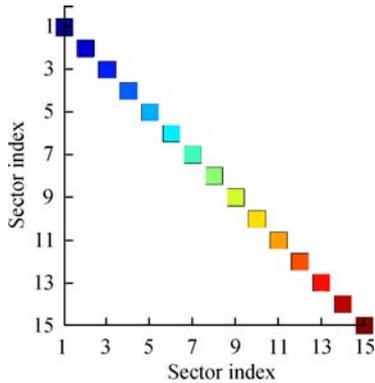


图 1 物理坐标下失谐矩阵示意图  
Fig. 1 Sketch of mistuning matrix in physical coordinate

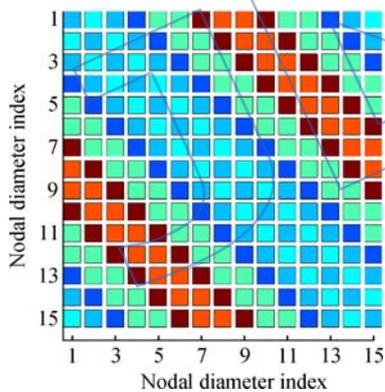


图 2 傅里叶坐标下失谐矩阵示意图  
Fig. 2 Sketch of mistuning matrix in Fourier coordinate

### 1.3 CHBM 的迭代求解方程

若  $f(t)$  和  $f_{nl}(t)$  均可表示为行波激励叠加的形式

$$\begin{cases} f_k = \sum_{i=1}^N (e_{i,k} \otimes f_{i,k}) \\ f_k^{nl} = \sum_{i=1}^N (e_{i,k} \otimes f_{i,k}^{nl}) \end{cases} \quad (26)$$

将式(26)代入式(20), 可以得到

$$\Lambda_k u_k = [- (k\omega)^2 M + jk\omega C + K] u_k = \sum_{i=1}^N (e_{i,k} \otimes f_{i,k}) + \sum_{i=1}^N (e_{i,k} \otimes f_{i,k}^{nl}) \quad (27)$$

将谐波叠加假设式(18)代入式(27), 并经过简化可以得到

$$B \text{diag}(\Lambda_{1,k} \quad \Lambda_{2,k} \quad \cdots \quad \Lambda_{n,k}) q_k = \sum_{i=1}^N (\hat{1}_i \otimes f_{i,k}) + \sum_{i=1}^N (\hat{1}_i \otimes f_{i,k}^{nl}) \quad (28)$$

式(28)左端项为对应谐波叶盘的谐波阶次为  $k$  的块对角矩阵, 右端项为同阶次的激励. 求解过程中仅需要求解基于单扇区矩阵的方程即可.

$$\Lambda_{i,k} q_{i,k} = f_{i,k} + f_{i,k}^{nl} \quad (29)$$

如此, 将方程的求解规模从式(20)中的  $Nn \times (Nn)$  减小到  $n \times n$  的规模(但需要在傅里叶坐标中求解  $N$  次). 计算的复杂度大大降低, 效率大大提高.

为节省计算资源以提高 CHBM 效率, 引入以下假设, 若失谐之后系统(傅里叶空间内)的响应记做谐波响应与失谐响应摄动值之和

$$q_{i,k} = q_{i,k}^t + q_{i,k}^m \quad (30)$$

式(30)中上标为  $t$  表示谐波响应, 上标为  $m$  表示失谐响应. 已知对于谐波叶盘存在

$$\Lambda_{i,k} q_{i,k}^t = f_{i,k} \quad (31)$$

将式(30)、式(31)代入式(28), 可以得到

$$B \text{diag}(\Lambda_{1,k} \quad \Lambda_{2,k} \quad \cdots \quad \Lambda_{n,k}) q_{i,k}^m = \text{circ}(\tilde{\delta}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\delta}_n) \otimes K_b q_{i,k}^t + \text{circ}(\tilde{\delta}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\delta}_n) \otimes K_b q_{i,k}^m \quad (32)$$

式(32)可以简化为

$$B \text{diag}(\Lambda_{1,k} \quad \Lambda_{2,k} \quad \cdots \quad \Lambda_{n,k}) q_{i,k}^m = \sum_{i=1}^N (\hat{1}_i \otimes f_{i,k}^t) + \sum_{i=1}^N (\hat{1}_i \otimes f_{i,k}^m) \quad (33)$$

式(33)中右端第 1 项为谐波叶盘响应在各傅里叶坐标上引起的失谐激励, 第 2 项为各傅里叶坐标上引起的失谐内力. 若对应的行波激励为单节径成份, 傅里叶阶次为  $r$ , 对应谐波响应为  $q_{r,k}^t$ , 则存在

$$\sum_{i=1}^N (\hat{1}_i \otimes f_{i,k}^t) = (\tilde{\delta}_r K_b q_{r,k}^t \quad \tilde{\delta}_{r-1} K_b q_{r,k}^t \quad \cdots \quad \tilde{\delta}_1 K_b q_{r,k}^t \quad \cdots \quad \tilde{\delta}_{r+1} K_b q_{r,k}^t)^T \quad (34)$$

若经历第  $p$  次迭代, 失谐响应为  $(q_k^m)^p$ , 计算失谐响应引起的失谐力:

$$\sum_{i=1}^N (\hat{1}_i \otimes f_{i,k}^m) = \text{circ}(\tilde{\delta}_1 \quad \cdots \quad \tilde{\delta}_n) \otimes K_b (q_k^m)^p \quad (35)$$

则对应于单扇区的迭代方程为

$$\mathbf{A}_{i,k} \mathbf{q}_{i,k}^m = \mathbf{f}_{i,k}^i + \mathbf{f}_{i,k}^m \quad (36)$$

式(36)为基于 CHBM 的迭代方程. 在迭代过程中, 仅需根据残差条件来判断是否要利用式(35)更新失谐内力  $\mathbf{f}_{i,k}^m$ . 由于采用迭代解法, 整个叶盘的强迫响应方程在形式上是解耦的, 因而能够基于单扇区的矩阵求解整个叶盘的失谐强迫响应问题, 从而大大提高失谐强迫响应计算效率, 由于不存在截断误差及过强的假设条件, 因而具备较高的求解精度.

### 1.4 阻尼矩阵的处理方法

在建模过程中引入比例阻尼假设,  $\alpha$  为质量阻尼系数,  $\beta$  为刚度阻尼系数, 则阻尼矩阵可以表示为

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (37)$$

则对于式(27), 有

$$\mathbf{\Lambda}_k = [\mathbf{j}k\omega\alpha - (k\omega)^2] \mathbf{M} + (\mathbf{j}k\omega\beta + 1) \mathbf{K} \quad (38)$$

利用广义傅里叶矩阵对角化上式, 可以得到

$$(\mathbf{E} \otimes \mathbf{I}) \mathbf{\Lambda}_k (\mathbf{E}^H \otimes \mathbf{I}) = \epsilon_k \mathbf{B} \text{diag}(\tilde{\mathbf{M}}_1 \dots \tilde{\mathbf{M}}_n) + \eta_k \mathbf{B} \text{diag}(\tilde{\mathbf{K}}_1 \dots \tilde{\mathbf{K}}_n) \quad (39)$$

式(39)中

$$\begin{cases} \epsilon_k = \mathbf{j}k\omega\alpha - (k\omega)^2 \\ \eta_k = \mathbf{j}k\omega\beta + 1 \end{cases} \quad (40)$$

### 1.5 基于 CHBM 的减缩建模流程

基于以上的分析, 利用谐波平衡法, 能够将失谐叶盘结构强迫响应由时域转换到频域. 利用周期对称条件, 能够将耦合的整个叶盘矩阵维度降阶到单扇区矩阵的规模. 但是由于失谐矩阵在傅里叶坐标中不再具有块对角形式, 因而该方法需要迭代求解. 由于失谐问题本质上是线性问题, 因而迭代方法能够较快得到收敛解. 基于 CHBM 的主要步骤如下:

- 1) 求解谐调叶盘傅里叶坐标下的响应.
- 2) 生成失谐向量  $\delta$ , 并将之转化为傅里叶坐标下的循环矩阵.
- 3) 计算谐调响应引起的失谐力(式(34)).
- 4) 给定初始失谐响应  $(\mathbf{q}_k^m)^0$ , 计算由其引起的失谐力(式(35)).
- 5) 若残差满足收敛, 则停止计算, 若不满足, 更新失谐响应, 重复第 4 步.

该方法流程图见图 3.

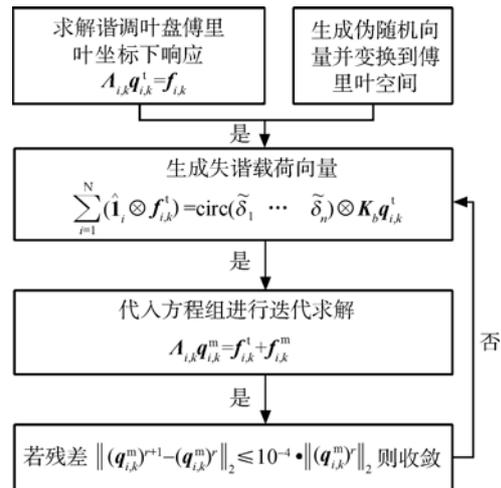


图 3 CHBM 求解流程图

Fig. 3 Flow chart of CHBM

## 2 CHBM 的算例验证

### 2.1 叶盘结构的频率转向

图 4 为本文研究叶盘的有限元模型, 扇区数为 15, 其他基本参数见表 1.

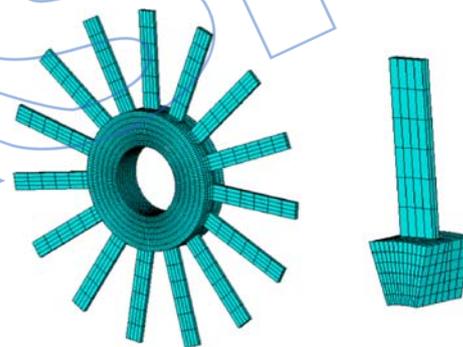


图 4 叶盘有限元模型

Fig. 4 Finite element model of bladed disk

表 1 叶盘的基本参数

Table 1 Basic parameters of bladed disk

参数	数值
弹性模量/ $10^5$ MPa	2.1
密度/ $10^{-9}$ (t/mm <sup>3</sup> )	7.8
泊松比	0.3
盘内径/mm	15
盘外径/mm	30
盘厚度/mm	12.5
叶片展长/mm	42
叶片弦长/mm	7
叶片厚度/mm	1.5
单扇区节点数	818
单扇区单元数	552

利用式(6),可以得到不同节径下叶盘的前若干阶固有频率,进而绘制节径频率图,见图 5.

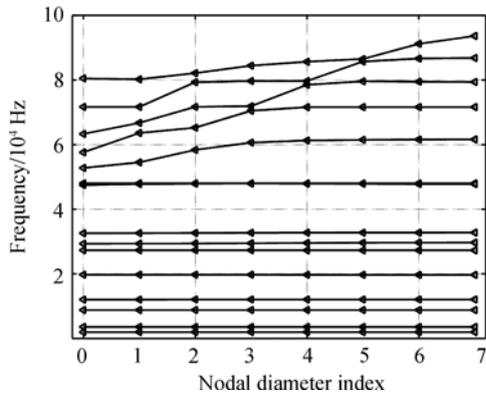


图 5 叶盘节径频率图

Fig. 5 Nodal diameter frequency plot of bladed disk

在叶盘的节径频率图中,水平线部分代表以叶片振型为主导的模式,斜线部分则表示以轮盘振型为主导的模式.对于叶片的高阶振型,盘片耦合振动随频率变化的形式先是以叶片振动为主导,在某一节径数之后变成以轮盘振动为主导的形式;而对应的低阶振型,盘片耦合振动随频率变化的形式则先是以轮盘振动为主导,在某一节径数之后变成以叶片振动为主导的形式.这就是盘片耦合振动的频率转向现象<sup>[13]</sup>.

已有的研究表明<sup>[14-16]</sup>,轮盘在频率转向区附近由失谐引起的响应放大问题最为突出,直接影响叶盘结构高周疲劳寿命.因此在对减缩算法进行研究时,本文结合频率转向处的失谐响应放大进行计算与分析.

图 6 为叶盘频率转向局部放大图,其中,节径

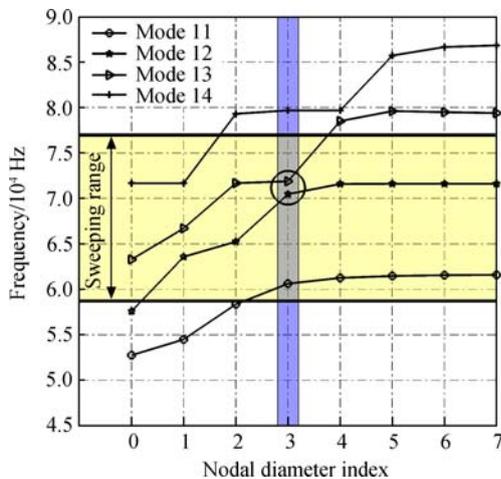


图 6 叶盘频率转向局部放大图

Fig. 6 Enlarged detail of frequency veering of bladed disk

为 3 的第 12,13 阶处发生了频率转向,如图 6 中圆圈所示频率转向模态(veering mode).在频率转向附近的频率范围内的失谐响应放大,是研究人员较为关心的现象.

一般响应放大因子的定义为叶盘失谐前后在同等阻尼水平、同样激励条件下,在同一频率区间内,以同样扫频精度得到的最大强迫响应之比<sup>[17]</sup>

$$A_f = \frac{\max[\mathbf{A}([\omega_1, \omega_2, \Delta\omega], \mathbf{F}(r), \Delta)]}{\max[\mathbf{A}([\omega_1, \omega_2, \Delta\omega], \mathbf{F}(r))]} \quad (41)$$

式(41)中  $\mathbf{A}$  为叶盘结构物理坐标下的响应,  $[\omega_1, \omega_2]$  为扫频范围,由式(42)确定(式中  $\tau=50$  以保证足够的扫频范围);  $\Delta\omega$  为扫频精度;  $r$  为激励节径成分;  $\Delta$  为失谐量.为保证扫频精度兼顾效率,在该频率区间上进行了 1000 步等间距扫频.

$$\begin{cases} \omega_1 = (1 - \tau \cdot \xi_{3,12}) \cdot \omega_{3,12} \\ \omega_2 = (1 + \tau \cdot \xi_{3,13}) \cdot \omega_{3,13} \end{cases} \quad (42)$$

采用本文提出的基于 CHBM 时,直接求得的是叶盘在傅里叶坐标下的响应,在计算响应放大因子时,应利用式(2)将其转换到物理坐标下.

## 2.2 效率及精度分析

为验证 CHBM 的效率和精度,本文采用了完全矩阵法(full method, FM)、部件模态组合法(component mode synthesis, CMS)、模态减缩法(modal reduction method, MRM)、渐进失谐法(asymptotic mistuning method, AMM)作为对比.

在本文强迫响应计算中,比例阻尼的系数设置为  $\alpha=10^{-7}$ ,  $\beta=10^{-10}$ ,此时频率转向区内的模态的模态阻尼比约为 0.5%,这是叶盘结构中较为常见的阻尼水平.在响应分析中,取响应幅值最大点进行分析.

图 7 给出了假设的同一叶盘失谐形式在物理坐标和傅里叶坐标内的示意图,其失谐强度约为 1%.

如图 6 所示,谐波叶盘在节径数为 3,模态阶次为 12,13 阶处发生了频率转向,因而选择外激励节径为 3,在如图 6 所示扫频区间内进行扫频,利用前述各种建模方法计算得到的响应局部放大如图 8 所示.

在结果对比中,将完全矩阵法计算结果作为精确值(accurate).由图 8 可知,部件模态组合法与 CHBM 在共振、非共振点处,其计算结果与精确值较为接近(如图 9 所示),CHBM 在各频率处与精确值的相对误差均低于 1%.采用模态减缩法或者渐进失谐法,在共振峰处误差较大.显然,

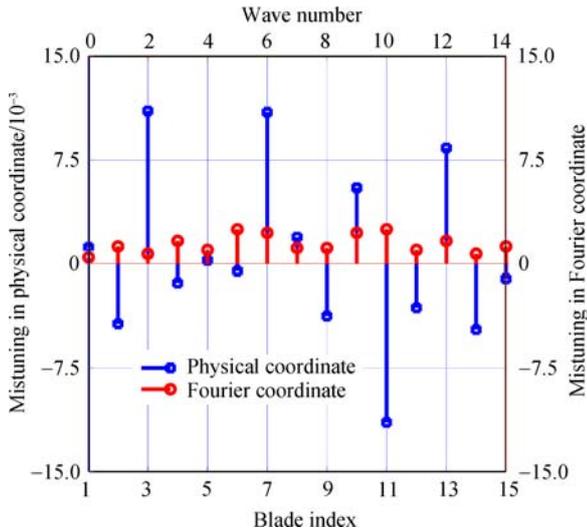


图 7 物理坐标与傅里叶坐标下失谐向量对比  
Fig. 7 Comparison of mistuning in physical and Fourier coordinates

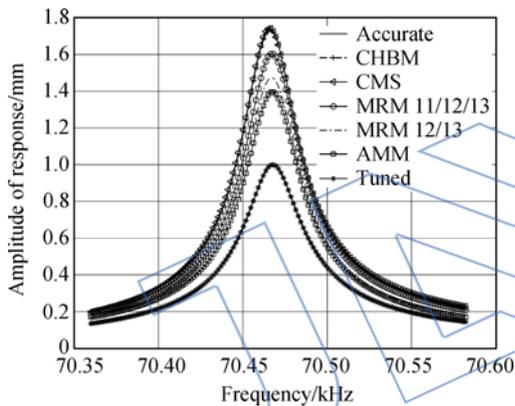


图 8 失谐叶盘响应放大稳态结果  
Fig. 8 Harmonic response of mistuning bladed disk

基于模态减缩法,选取的模态正交基越多,其精度越高,如图 8 所示,选取模态阶次为 11/12/13 的各节径模态作为减缩基的计算结果精度高于仅选择第 12/13 阶模态的计算结果.由于渐近失谐法选取的减缩基过少,因而其精度最低.

减缩矩阵的规模决定了减缩算法的效率,复杂度是体现减缩计算量多少的重要指标,而计算时间从直观上能够反映计算速度的快慢.部件模态综合法要求子结构的模态减缩基数要大于连接界面自由度,本文中因假设仅叶片刚度失谐;CHBM 的矩阵维度仅为单扇区自由度数;模态减缩法,取决于选择的减缩基个数.

对于线性方程组的求解,采用矩阵求逆的方法计算量为 LU 分解法的 3 倍左右.本文中不同的减缩算法均采用 LU 分解法进行求解.其计算

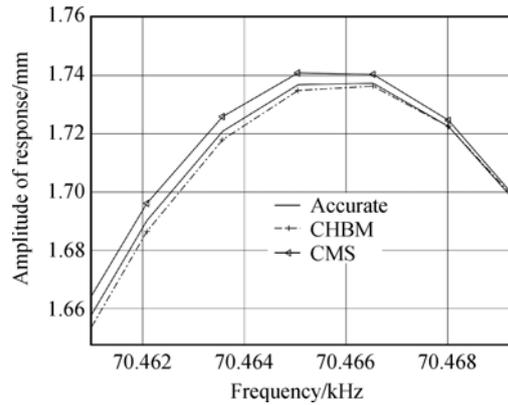


图 9 失谐叶盘响应放大稳态结果的局部放大  
Fig. 9 Enlarged detail of harmonic response of mistuning bladed disk

复杂度公式为<sup>[18]</sup>

$$N_c = \frac{2}{3} \bar{n}^3 + \frac{5}{2} \bar{n}^2 + \frac{7}{6} \bar{n} \quad (43)$$

式中  $\bar{n}$  为减缩矩阵维度.

表 2 给出了不同减缩方法的计算时间、矩阵维度及计算复杂度对比,由表中结果可知:完全矩阵法矩阵维度大,计算复杂度高,因而计算耗时最长,CHBM 矩阵维度仅为完全矩阵法的 6.7%,其计算复杂度仅为完全矩阵法的 3%,但是由于存在迭代过程,CHBM 计算耗时为完全矩阵法的 8.1%. 相较 CMS 和 CHBM 矩阵维度减小 59.5%,计算复杂度减少 93.4%,计算时间节省 57.4%.

表 2 不同减缩计算方法效率对比

Table 2 Efficiency comparison of different reduced order methods

方法	耗时/s	矩阵维度	计算复杂度
FM	3555.2	29970	$1.7948 \times 10^{13}$
CMS	675.3	4935	$8.0186 \times 10^{10}$
CHBM	288.04	1998	$5.3273 \times 10^9$
MRM11/12/13	2.2	45	65865
MRM11/12	1.74	30	20285
AMM	0.56	10	928.33
谐调	55.3	1998	$5.3273 \times 10^9$

CHBM 的计算耗时比基于模态减缩基的减缩算法高两个量级,但由图 8 所示,后者的计算精度较低.

综上所述,CHBM 计算精度与部件模态综合法接近,但计算时间仅为后者的 42.6%;虽然计

算耗时高于模态减缩方法两个量级,但后者计算精度远不及 CHBM.

### 3 结论

本文采用 CHBM 进行失谐叶盘响应放大,其失谐响应放大因子相较精确值相对误差在 1% 以下;其计算时间比部件模态综合法减少 57.4%. 该方法能够直接给出响应在各个波数上的响应,能够帮助研究人员在物理上理解失谐的交叉耦合作用. 采用 CHBM,其更广泛的应用前景在于,CHBM 可用于解决带接触、摩擦的非线性因素的失谐叶盘强迫响应计算,限于篇幅,本文中未涉及.

### 参考文献:

- [1] Tran D M. Component mode synthesis methods using interface modes; application to structures with cyclic symmetry[J]. *Computers and Structures*, 2001, 79(2): 209-222.
- [2] Moyroud F, Jacquet-Richardet G, Fransson T. A comparison of two finite element reduction techniques for mistuned bladed disks[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, 124(4): 942-952.
- [3] Yang M T, Griffin J H. A reduced-order model of mistuning using a subset of nominal system modes[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2001, 123(4): 893-900.
- [4] Petrov E P, Sanliturk K Y, Ewins D J. A new method for dynamic analysis of mistuned bladed disks based on the exact relationship between tuned and mistuned systems[J]. *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2002, 124(3): 586-597.
- [5] Sinha A. Reduced-order model of a bladed rotor with geometric mistuning[J]. *Journal of Turbomachinery*, 2009, 131(3): 031007. 1-031007. 7.
- [6] Brown J M, Grandhi R V. Reduced-order model development for airfoil forced response[J]. *International Journal of Rotating Machinery*, Article ID 387828, 2008.
- [7] 姚建尧, 王建军. 周期对称性在叶盘结构瞬态响应求解中的应用[J]. *航空动力学报*, 2011, 26(2): 385-391.  
YAO Jianyao, WANG Jianjun. Application of cyclic property in transient forced vibration of bladed disks[J]. *Journal of Aerospace Power*, 2011, 26(2): 385-391. (in Chinese)
- [8] 李琳. 带冠叶盘的二维子结构循环非线性力学模型及其响应特性[J]. *航空学报*, 1999, 20(1): 58-61.  
LI Lin. Non-linear model of cyclic 2 DOF substructure of shrouded blisk[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 1999, 20(1): 58-61. (in Chinese)
- [9] 李琳. 非谐带冠叶盘系统动特性的统计特征[J]. *航空学报*, 2000, 21(5): 405-408.  
LI Lin. Statistics of dynamic characteristics of mistuned shrouded blisk[J]. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, 2000, 21(5): 405-408. (in Chinese)
- [10] Poudou O J. Modeling and analysis of the dynamics of dry-friction-damped structural systems[D]. Michigan: University of Michigan, 2010.
- [11] Óttarsson G. Dynamic modeling and vibration analysis of mistuned bladed disks[D]. Michigan: University of Michigan, 1994.
- [12] Von Groll G, Ewins D J. The harmonic balance method with arc-length continuation in rotor/stator contact problems[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2001, 241(2): 223-233.
- [13] Castamier M P, Pierre C. Modeling and analysis of mistuned bladed disk vibration; current status and emerging directions[J]. *Journal of Propulsion and Power*, 2006, 22(2): 384-396.
- [14] Pierre C. Mode localization and eigenvalue loci veering phenomena in disordered structures[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1988, 126(3): 485-502.
- [15] Afolabi D, Alabi B. Catastrophe theory, curve veering and the vibration of bladed discs[J]. *Journal of Mechanical Engineering Science*, 1992, 206(2): 143-144.
- [16] Zeeman E C. Catastrophe theory; selected papers 1972-1977[M]. Oxford, England: Addison Wesley, 1977.
- [17] Kaneko Y, Mase M, Fujita K, et al. Vibrational response analysis of mistuned bladed disk[J]. *JSME International Journal: Series C Dynamics, Control, Robotics, Design and Manufacturing*, 1994, 37(1): 33-40.
- [18] Golub G H, Van Loan C F. Matrix computations[M]. Baltimore, MD, USA: Johns Hopkins University Press, 1996.