

# 基于滑动 Kriging 插值的无网格 MLPG 法求解结构动力问题

王峰<sup>1</sup>, 林皋<sup>1</sup>, 郑保敬<sup>2</sup>, 胡志强<sup>1</sup>, 刘俊<sup>1,3</sup>

(1. 大连理工大学 水利工程学院, 大连 116024; 2. 大连理工大学 航空航天学院, 大连 116024;

3. 上海交通大学 海洋工程国家重点实验室, 上海 200240)

**摘要:** 利用基于滑动 Kriging 插值的无网格局部 Petrov-Galerkin (MLPG) 法来求解二维结构动力问题, Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数并采用精细积分法来离散时间域。基于滑动 Kriging 插值构造的形函数满足 Kronecker Delta 性质, 因此可以直接施加本质边界条件。刚度矩阵形成过程中只涉及到边界积分, 而没有涉及到区域积分和奇异积分。计算结果表明: 基于滑动 Kriging 插值的 MLPG 法具有模拟简单、计算精度高优点。

**关键词:** 滑动 Kriging 插值; 无网格局部 Petrov-Galerkin; 无网格法; Heaviside 函数; 结构动力问题

中图分类号: O343.1

文献标识码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.04.006

## MLPG method based on moving Kriging interpolation for structural dynamic analysis

WANG Feng<sup>1</sup>, LIN Gao<sup>1</sup>, ZHENG Bao-jing<sup>2</sup>, HU Zhi-qiang<sup>1</sup>, LIU Jun<sup>1,3</sup>

(1. School of Hydraulic Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

2. School of Aeronautics and Astronautics, Dalian University of Technology, Dalian 116024, China;

3. Shanghai Jiao Tong University State Key Laboratory of Ocean Engineering, Shanghai 200240, China)

**Abstract:** A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method based on the moving Kriging interpolation was employed for solving two-dimensional structural dynamic problems. With the method, Heaviside step function was used as a weight function in each sub-domain and the precise time step integration method was adopted for time domain discretization. As the shape functions constructed based on moving Kriging interpolation had the property of Kronecker Delta, the essential boundary conditions could be used directly. The boundary integral was only involved to form a global stiffness matrix, and the field integral and the singular integral were not involved. Numerical examples showed that MLPG method based on moving Kriging interpolation has advantages of easy implementation and high accuracy.

**Key words:** moving Kriging interpolation; meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method; meshless method; Heaviside step function; structural dynamic problems

结构的动力学计算是计算力学主要的研究内容之一, 也是工程师进行结构设计的重要基础。有限元法<sup>[1]</sup>和边界元法<sup>[2]</sup>是处理这类问题比较有效的数值计算方法, 但是由于它们依赖于网格, 因此在数值模拟过程中会出现网格的重构现象, 从而降低了求解效率。

无网格法是一种基于节点近似新的求解偏微分方程边值问题的数值算法<sup>[3-4]</sup>, 其将求解域只用节点离散, 因而在断裂力学、大变形等问题数值模拟时具有其

他基于网格数值算法无法比拟的优势。许多学者采用不同方式的近似场函数对无网格法进行了研究, 无网格局部 Petrov-Galerkin (MLPG) 法是由 Atluri 等<sup>[5]</sup>提出的, 它是基于移动最小二乘 (Moving Least Squares, MLS) 和微分方程的局部弱形式产生的, 这种方法无论是构造近似函数, 还是数值积分均不需要划分单元或网格, 因此是一种真正意义的无网格法, 已经被用来求解结构的动力问题<sup>[6-8]</sup>。但是这种无网格法采用移动最小二乘法构造近似函数, 在一些本质边界条件的施加存在困难, 同时形函数也不满足 Kronecker Delta 特性。许多方法已经被用来处理本质边界条件, 例如: Lagrange 乘子法<sup>[9]</sup>和罚函数法, 然而 Lagrange 乘子法增加了未知量的个数, 导致计算量增加, 而罚函数法罚因子大小的选取缺少理论依据。

为了克服这一困难, 将滑动 Kriging 插值法引入到无网格法中, 可以明显提高无网格法的计算效率和精

基金项目: 国家自然科学基金重点项目(51138001); 国家自然科学基金委创新研究群体基金(51121005); 上海交通大学海洋工程国家重点实验室开放基金(1202); 中国博士后科学基金(2013M530919); 国家重大科技专项“cap1400 安全审评技术与独立验证试验”(2011ZX06002-10); 重大科技专项“cap1400 关键审评技术研究”(2013ZX06002001-09); 中央高校基本科研业务费专项资金(DUT13LK16)

收稿日期: 2012-11-02 修改稿收到日期: 2013-04-08

第一作者 王峰男, 博士生, 1987年生

度。与传统无网格法相比, Kriging 插值方法在形成形函数时虽然用到局部支持域中的点,但是它用插值而非拟合来求出其它点的值,因此具有精确的函数拟合性质,这改变了无网格法形函数构造理论。由于滑动 Kriging 插值法所构造的形函数满足 Kronecker Delta 特性,因此能直接准确施加本质边界条件,其计算代价明显低于移动最小二乘无网格方法。Gu<sup>[10]</sup>将滑动 Kriging 插值与 EFG (Element Free Galerkin method) 结合来解决稳态热传导问题, Bui 等<sup>[11]</sup>用其来解决结构的动力学问题。但是由于 EFG 法是基于全局弱形式产生的,需要使用背景网格进行积分,计算量很大,因此将滑动 Kriging 插值与 MLPG 相结合更具有优势<sup>[12-14]</sup>。Lam 等<sup>[15]</sup>对其收敛性、稳定性、离散点布置方式等进行了研究。Dai 等<sup>[16]</sup>将 RPIM 和 Kriging 插值无网格法进行比较研究,并指出两种方法异同之处。

本文使用滑动 Kriging 插值法来构造形函数,并与无网格局部 Petrov-Galerkin 法相结合, Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数并采用精细积分法来离散时间域,从而推导相应的离散方程。将该方法用来求解结构动力问题,通过两个数值算例来验证该方法的有效性。

## 1 滑动 Kriging 插值

Kriging 插值是以南非矿业工程师 D. G. Kriging 名字命名的一项实用空间估计技术,最先应用于地质数学<sup>[17]</sup>,本文采用滑动 Kriging 插值来构造无网格法中的形函数。设定义在问题域  $\Omega$  及其边界  $\Gamma$  上的形函数为  $u(\mathbf{x})$ , 问题域及边界通过  $N$  个场节点离散,在任意点  $\mathbf{x}$  的支持域内有  $n$  个场节点,该支持域被称为点  $\mathbf{x}$  的插值域。若已知节点的场函数值为  $u(\mathbf{x}_1), \dots, u(\mathbf{x}_n)$ , 点  $\mathbf{x}$  处的近似函数可以通过滑动 Kriging 插值<sup>[10]</sup>来逼近:

$$u^h(\mathbf{x}) = [\mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{B}]\mathbf{u} \quad (1)$$

简写为:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\mathbf{x})u_i = \Phi(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (2)$$

其中:

$$\mathbf{u}^T = [u(\mathbf{x}_1), u(\mathbf{x}_2), \dots, u(\mathbf{x}_n)] \quad (3)$$

形函数:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x})\mathbf{A} + \mathbf{r}^T(\mathbf{x})\mathbf{B} \quad (4)$$

$$\phi_k(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x})A_{jk} + \sum_i^n r_i(\mathbf{x})B_{ik} \quad (5)$$

式中:矩阵  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  可由下式决定:

$$\mathbf{A} = (\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1} \quad (6)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{P}\mathbf{A}) \quad (7)$$

式中: $\mathbf{I}$  为  $n \times n$  的单位矩阵,  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  为:

$$\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) = [p_1(\mathbf{x}), p_2(\mathbf{x}), \dots, p_m(\mathbf{x})] \quad (8)$$

式中: $p_j(\mathbf{x})$ , 为空间坐标  $\mathbf{x}^T = [x, y]$  中的单项式,  $m$  为多项式基函数的个数。节点处基函数值形成的矩阵  $\mathbf{P}$  为:

$$\mathbf{P}^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \dots & \mathbf{x}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_m(\mathbf{x}_1) & p_m(\mathbf{x}_2) & \dots & p_m(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix}_{m \times n} \quad (9)$$

矩阵  $\mathbf{R}$  和矢量  $\mathbf{r}(\mathbf{x})$  为:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{R}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) & \dots & \mathbf{R}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_n) \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1) & 1 & \dots & \mathbf{R}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{R}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_1) & \mathbf{R}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_2) & \dots & 1 \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (10)$$

$$\mathbf{r}^T(\mathbf{x}) = \{\mathbf{R}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}) \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}) \quad \dots \quad \mathbf{R}(\mathbf{x}_n, \mathbf{x})\} \quad (11)$$

其中: $\mathbf{R}$  为对角线为 1 的对称相关矩阵,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$  为节点  $\mathbf{x}_i$  和  $\mathbf{x}_j$  之间的相关函数,这里我们取 Gaussian 型函数:

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = e^{-\theta r_{ij}^2} \quad (12)$$

其中  $\theta > 0$  为模型相关参数,  $r_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|$ 。

## 2 结构动力问题的 MLPG 法

### 2.1 控制方程的弱形式及其离散

设问题的求解域为  $\Omega$ , 其边界为  $\Gamma$ , 结构动力问题的平衡微分方程为:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = \rho \ddot{u}_i + c \dot{u}_i \quad (13)$$

其中: $\sigma_{ij}$  为相对于位移场  $u_i$  的应力张量,  $b_i$  是体力分量,  $\rho$  是质量密度,  $c$  是阻尼系数;  $\ddot{u}_i$  和  $\dot{u}_i$  分别为位移  $u_i$  对时间  $t$  的二阶导数和一阶导数。

相应的边界条件为:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{当 } \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (14)$$

$$t_i = \sigma_{ij}n_j = \bar{t}_i \quad \text{当 } \mathbf{x} \in \Gamma_t \quad (15)$$

其中: $\bar{u}_i$  是位移边界  $\Gamma_u$  上的已知位移分量,  $\bar{t}_i$  是面力边界  $\Gamma_t$  上的已知面力分量, 且  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ ,  $\mathbf{n}_j$  是边界  $\Gamma$  的外法线方向余弦。初始条件为:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (16)$$

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t_0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega \quad (17)$$

其中: $\mathbf{u}_0$  和  $\mathbf{v}_0$  为初始时刻  $t_0$  相对应的初始位移和初始速度。

将问题域及边界用  $N$  个节点离散,在任意节点  $I$  对应的子域  $\Omega_s$  内采用加权余量法,式(13)写成:

$$\int_{\Omega_s} w_i(\sigma_{ij,j} + b_i - \rho \ddot{u}_i - c \dot{u}_i) d\Omega = 0 \quad (18)$$

问题域边界和局部积分子域边界相交的时候,局部积分子域边界可以分解成三部分:内边界  $\Gamma_{si}$ , 位移边界  $\Gamma_{su}$  和面力边界  $\Gamma_{st}$ 。

对式(18)采用分部积分和高斯散度定理,并施加面力边界条件(15)可得:

$$\int_{\Omega_s} (w_i \rho \ddot{u}_i + w_i \dot{c} u_i + w_{i,j} \sigma_{ij}) d\Omega - \int_{\Gamma_{si}} w_i t_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} w_i t_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{su}} w_i \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} w_i b_i d\Omega \quad (19)$$

采用 Heaviside 分段函数作为权函数之后,式(19)变为:

$$\int_{\Omega_s} (\rho \ddot{u}_i + \dot{c} u_i) d\Omega - \int_{\Gamma_{si}} t_i d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} t_i d\Gamma = \int_{\Gamma_{su}} \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} b_i d\Omega \quad (20)$$

位移场函数不仅是空间坐标的函数,而且还与时间有关,因此位移场近似函数可表示为:

$$u^h(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^n \phi_k(\mathbf{x}) u_k(t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(t) \quad (21)$$

将式(21)代入式(20)可得如下离散方程:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (22)$$

其中: $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{C}$ 、 $\mathbf{K}$ 和 $\mathbf{F}$ 分别为质量矩阵、阻尼矩阵、刚度矩阵和节点荷载向量。它们分别表示如下

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega_s} \rho \phi_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (23)$$

$$\mathbf{C}_{ij} = \int_{\Omega_s} c \phi_j(\mathbf{x}) d\Omega \quad (24)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = - \int_{\Gamma_{si}} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Gamma - \int_{\Gamma_{su}} \mathbf{N} \mathbf{D} \mathbf{B}_j d\Gamma \quad (25)$$

$$\mathbf{F}_i = \int_{\Gamma_{su}} \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega_s} b_i d\Omega \quad (26)$$

式中

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{平面应力}) \quad (28)$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \phi_{j,x} & 0 \\ 0 & \phi_{j,y} \\ \phi_{j,y} & \phi_{j,x} \end{bmatrix} \quad (29)$$

## 2.2 自由振动分析

在自由振动分析中,不考虑阻尼和外荷载,则式(22)变成二阶齐次常微分方程组

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = 0 \quad (30)$$

$u(\mathbf{x}, t)$ 可写成如下形式:

$$u^h(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \sin(\omega t + \varphi) \quad (31)$$

其中: $\omega$ 为自振频率。式(31)代入式(30)可得

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = 0 \quad (32)$$

从而求得结构的自振频率和对应振型。

## 2.3 强迫振动分析

本文采用精细积分法<sup>[18]</sup>来离散时间域并用来求解式(22),引入对偶变量:

$$\mathbf{v} = \{\mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t)\}^T,$$

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \mathbf{u}(t) / 2 \quad (33)$$

可得到 Hamilton 体系下的动力学方程:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{H} \mathbf{v}(t) + \mathbf{f}(t) \quad (34)$$

式中:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}(t) \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$\mathbf{A} = -\frac{\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}}{2}, \quad \mathbf{G} = -\frac{\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1}}{2},$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{M}^{-1}, \mathbf{B} = \frac{\mathbf{C} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}}{4} - \mathbf{K} \quad (36)$$

从常微分方程组的理论可知,应当先求式(34)的齐次方程:

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{H} \mathbf{v}(t), \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{D} \\ \mathbf{B} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \quad (37)$$

对于定常系统, $\mathbf{H}$ 是常数阵,其通解可写成:

$$\mathbf{v} = e^{(\mathbf{H} \cdot t)} \mathbf{v}_0 \quad (38)$$

令时间步长为 $\tau$ ,则有:

$$\mathbf{v}(\tau) = e^{(\mathbf{H} \cdot \tau)} \cdot \mathbf{v}_0 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}_0 \quad (39)$$

其中:

$$\mathbf{T} = e^{(\mathbf{H} \cdot \tau)} \quad (40)$$

在时间间隔 $[k\tau, (k+1)\tau]$ 上有:

$$\mathbf{v}[(k+1)\tau] = e^{(\mathbf{H} \cdot \tau)} \mathbf{v}(k\tau) \quad (k = 0, 1, \dots) \quad (41)$$

式中:指数矩阵 $e^{(\mathbf{H} \cdot \tau)}$ 可由 $2^N$ 算法<sup>[18]</sup>得到。

## 3 数值算例

### 3.1 四边固定矩形板自由振动

矩形板几何及物理参数:边长 $a = b = 320$  mm,弹性模量 $E = 100$  GPa,泊松比 $\nu = 0.3$ ,质量密度 $\rho = 8.0 \times 10^5$  kg/m<sup>3</sup>,不考虑阻尼的影响。如图1所示,在矩形求解域内均匀布置121(11 × 11)个节点,计算中按平面应力问题处理。

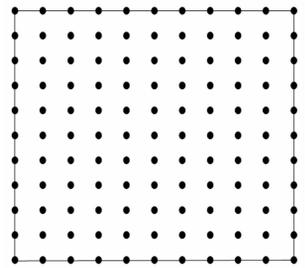


图1 板的节点分布  
Fig.1 Node distribution of the rectangular plate

表1列出了矩形板的前5阶自由振动频率,并与 ANSYS 计算的结果作以比较。

表1 矩形板的自振频率

Tab.1 Natural frequencies of the rectangular plate

振型	频率/Hz	
	MLPG(11 × 11)	ANSYS(6561DOFs)
1	655.2	655.39
2	655.2	655.39
3	779.1	780.83
4	957.0	956.07
5	1077.5	1080.3

第5阶频率的相对误差为0.26%，若想提高计算精度可以增加节点的个数，但是计算量增大，综合考虑本文选择11×11节点分布。

### 3.2 悬臂梁的受迫振动

如图2所示的悬臂梁，长 $L=48\text{ m}$ ，高度 $h=12\text{ m}$ ，单位厚度 $t=1\text{ m}$ ，按平面应力问题计算。梁的材料参数：弹性模量 $E=3.0\times 10^7\text{ Pa}$ ，泊松比 $\nu=0.3$ ，质量密度 $\rho=1\text{ kg/m}^3$ 。梁的自由端 $t=0\text{ s}$ 时受到如图3所示的突加集中力的作用，不计梁的自重。

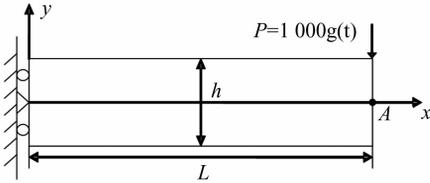


图2 梁自由端受突加集中力  
Fig.2 A cantilever beam subjected to a transient concentrated force

在悬臂梁内均匀布置 $21\times 9$ 个节点，如图4所示。时间步长 $\tau=5\times 10^{-3}\text{ s}$ ，在数值积分过程中节点支持域半径取2.0，局部积分分子域半径取0.5，采用2个高斯积分点。当阻尼系数 $c=0.4$ 时，A点竖向位移随时间变化见表2和图5，其解析解为 $-0.0089\text{ m}^{[19]}$ 。

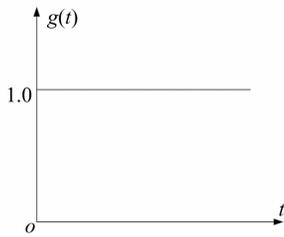


图3 单位阶跃荷载  
Fig.3 Heaviside step loading

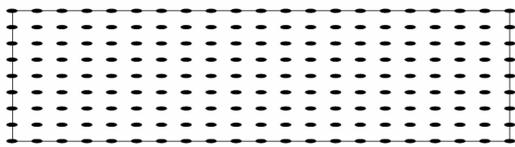


图4 梁的节点分布

Fig.4 Node distribution of the cantilever beam

表2 阶跃荷载作用下A点处时间步的计算值  
Tab.2 Computed results at several time-steps under Heaviside step loading with damping

时间步	时间/s	A点竖向位移/m
9 400	47.00	-0.008 812 66
9 500	47.50	-0.008 814 55
9 600	48.00	-0.008 814 29
9 700	48.50	-0.008 815 11
9 800	49.00	-0.008 816 46
9 900	49.50	-0.008 812 23
10 000	50.00	-0.008 814 24

可以看出本文方法可以很好的解决悬臂梁受迫振动问题。当梁的自由端 $t=0\text{ s}$ 时受到如图6所示的突加集中力的作用，阻尼系数 $c=0.5$ ，A点处竖向位移随时间的变化情况如图7所示。

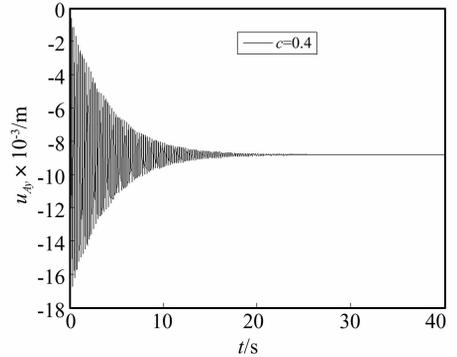


图5 A点竖向位移随时间变化  
Fig.5 Response at point A with damping under constant loading

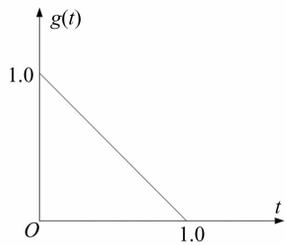


图6 瞬时荷载

Fig.6 Transient loading with a finite decreasing time

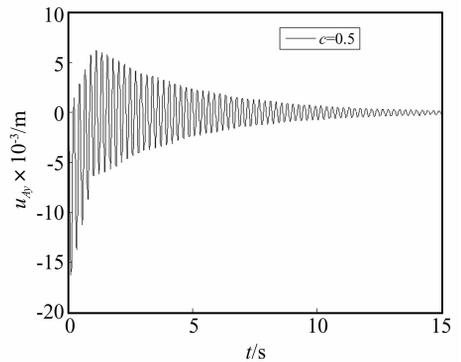


图7 A点竖向位移随时间变化  
Fig.7 Response at point A with damping under transient loading

可以看出，随着时间的增加，位移幅值维持相对不变并逐渐减至0。但同时也应该指出，当节点计算数目增加，计算时间增加，导致计算效率低下，例如该悬臂梁均匀布置 $37\times 13$ 个节点，计算时间增加了将近11倍，因此如何选取节点个数满足精度及效率要求是无网格法非常亟待解决的问题。

## 4 结论

本文将滑动的 Kriging 插值法和无网格局部 Petrov-Galerkin 法相结合, 并用来求解结构动力学问题, 动力学积分弱形式的推导采用加权余量法, 时间域采用精细积分法进行离散。由于滑动的 Kriging 插值构造的形函数满足 Kronecker Delta 性质, 因此可以直接施加本质边界条件。采用 Heaviside 分段函数作为局部弱形式的权函数, 在计算刚度矩阵时只涉及边界积分, 从而明显减少了计算量。数值算例表明, 基于滑动 Kriging 插值的无网格 MLPG 法具有稳定性好以及易施加边界条件等优点。

### 参考文献

- [ 1 ] Hughes T J R. The finite element method-linear static and dynamic finite element analysis [M]. Mineola, New York; Dover Publications, 2000.
- [ 2 ] Manolis G D, Beskos D E. Boundary element methods in elastodynamics [M]. London; Unwin Hyman, 1988.
- [ 3 ] Belytschko T, Krongauz Y, Organ D, et al. Meshless methods; an overview and recent developments [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1996, 139: 3-47.
- [ 4 ] 张雄, 刘岩, 马 上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36.  
ZHANG Xiong, LIU Yan, MA Shang. Meshfree methods and their applications[J]. Advance in Mechanics, 2009, 39(1): 1-36.
- [ 5 ] Atluri S N, Zhu T. A new meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics [J]. Computational Mechanics, 1998, 22(2): 117-127.
- [ 6 ] Gu Y T, Liu G R. A meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method for free and forced vibration analyses for solids[J]. Computational Mechanics, 2001, 27(3): 188-198.
- [ 7 ] Sladek J, Sladek V, Zhang C Z. Application of meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method to elastodynamic problems in continuously nonhomogeneous solids [J]. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2003, 4(6): 637-647.
- [ 8 ] 熊渊博, 龙述尧. 用局部 Petrov-Galerkin 法分析薄板自由振动[J]. 力学季刊, 2004, 25(4): 577-582.  
XIONG Yuan-bo, LONG Shu-yao. An analysis of free vibration problem for a thin plate by local Petrov-Galerkin method [J]. Chinese Quarterly of Mechanics, 2004, 25(4): 577-582.
- [ 9 ] Belytschko T, Lu Y Y, Gu L. Element free Galerkin method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(2): 229-256.
- [ 10 ] Gu L. Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003, 56(1): 1-11.
- [ 11 ] Bui T Q, Nguyen M N, Zhang C. A moving kriging interpolation-based element-free Galerkin method for structural dynamic analysis [J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2011, 200: 1354-1368.
- [ 12 ] Zheng B J, Dai B D. A meshless local moving Kriging method for two-dimensional solids[J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218(2): 563-573.
- [ 13 ] Chen L, Liew K M. A local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation for solving transient heat conduction problems [J]. Computational Mechanics, 2011, 47(4): 455-467.
- [ 14 ] 郑保敬, 戴保东. 位势问题改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 法[J]. 物理学报, 2010, 59(8): 5182-5189.  
ZHENG Bao-jing, DAI Bao-dong. Improved meshless local Petrov-Galerkin method for two-dimensional potential problems [J]. Acta Physica Sinica, 2010, 59(8): 5182-5189.
- [ 15 ] Lam K Y, Wang Q X, Li Hua. A novel meshless approach Local Kriging (LoKriging) method with two-dimensional structural analysis [J]. Computational Mechanics, 2004, 33(3): 235-244.
- [ 16 ] Dai K Y, Liu G R, Lim K M, et al. Comparison between the radial point interpolation and the Kriging interpolation used in meshfree methods[J]. Computational Mechanics, 2003, 32: 60-70.
- [ 17 ] Krige D G. A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand [J]. Journal of the Chemical Metallurgical and Mining Society of South Africa, 1951, 52: 119-139.
- [ 18 ] 钟万勰. 结构动力方程的精细时程积分法[J]. 大连理工大学学报, 1994, 34(2): 131-136.  
ZHONG Wan-xie. On precise time-integration method for structural dynamics [J]. Journal of Dalian University of Technology, 1994, 34(2): 131-136.
- [ 19 ] Timoshenko S P, Goodier J N. Theory of Elasticity [M]. New York; McGraw-Hill, 1970.
- [ 20 ] 王勖成, 邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.