

一类电力系统的分岔和奇异性分析

王晓东, 陈予恕

(哈尔滨工业大学 航天学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 研究了单机无穷大电力系统在外部周期性负荷扰动作用下的非线性动力学行为: 运用多尺度法分析了单机无穷大系统主共振的解析解及其稳定性, 根据系统的分岔方程, 运用 C-L 方法分析了主共振响应在不同系统参数下的不同分岔模式, 研究表明该系统的不同分岔模式与其运行参数和结构参数有密切联系; 数值仿真表明随着激励幅值的变化, 该系统具有由倍周期分岔通往混沌直至增幅振荡失步的丰富动力学行为, 从而为电力系统中同步发电机的同步运行、振荡失步提供理论指导。

关键词: 单机无穷大电力系统; 主共振; 分岔; C-L 方法; 奇异性分析

中图分类号: O322 **文献标识码:** A

Bifurcation and singularity analysis for a class of power systems

WANG Xiao-dong, CHEN Yu-shu

(School of Astronautics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The nonlinear dynamic behavior of a single-machine-infinite bus (SMIB) power system with a periodical load disturbance were studied here. The method of multi-scale was used to analyze the system's approximate primary resonance analytical solution and its stability. According to the system's bifurcation equation, different bifurcation models of the primary resonance with different system parameters were analyzed directly by using C-L method. It was shown that the occurrence of different bifurcation models is closely related to the operational parameters and structural parameters of the power system. The numerical simulation results showed that with varying of the excitation amplitude, this system has rich dynamic behaviors characterized with period-doubling bifurcation transferring to chaos and oscillation losing steps. The results provided a theoretical guidance for synchronous operation and oscillation losing steps of a synchronous generator.

Key words: SMIB power system; primary resonance; bifurcation; C-L method; singularity analysis

电力系统振荡是关系电力系统安全稳定运行的重要问题,除了正常运行的周期振荡外,电力系统还时有发生混沌振荡现象,其表现为非周期的、似乎无规则的、突发性或阵发性的机电振荡,在振荡严重的情况下会导致互联系统的解列^[1]。为此,越来越多的科学家和工程技术人员认识到电力系统稳定性问题的重要性,并将其作为系统安全运行的重要方面在理论和工程技术应用领域进行研究^[2-6]。

对于单机无穷大系统, Duan 等^[7]分析了带有一系列电容补偿器的单机无穷大系统的次同步谐振,应用分岔理论分析了该系统出现的复杂的周期轨道分岔,环面折叠分岔; Zhu 等^[8]研究了单机无穷大系统中的

次同步谐振,用 Hopf 分岔定理分析了 Hopf 分岔现象和稳定的周期解; Alberto 等^[9]应用 Melnikov 方法计算单机无穷大系统中异宿轨道横截相交的条件; Wei 等^[10]研究了高斯白噪声对电力系统安全盆侵蚀的影响; Chen 等^[11]用数值方法研究了单机无穷大系统中混沌现象并对其进行控制; Zhang 等^[12]分析了一个非线性三参数电力系统的异宿分支,用 Melnikov 函数确定了发生混沌现象的阈值,获得了发生混沌现象的参数区域; Chen 等^[13]研究了一类电力系统的混沌和次谐波振荡,给出了 Melnikov 函数的计算方法,并获得电力系统发生混沌振荡和次谐波振荡的锥形参数区域; Nayfeh 等^[14]用多尺度方法分析了一种电力系统中的亚谐波共振和混沌现象,并用数值方法得到了发生混沌现象的途径; Abed 等^[15]采用的修正单机无穷大模型考虑了系统状态对机组阻尼系数的影响,分析了 Hopf 分岔现象。

现有大多数文献[10-14]中同步发电机采用的是

常数阻尼,即令阻尼系数 D 为常数。实际上,阻尼在系统正常运行的情况下是与系统的状态变量相关的,而且可能为正,也可能为负^[15]。因此若 D 取用常值可能会改变系统的非线性动力学特性,不能真实反映系统的稳定性情况,影响了分析的准确性。

为此本文在文献[15]提出的修正单机无穷大模型基础上,建立了单机无穷大系统的数学模型,研究具有非线性阻尼时单机无穷大系统的动力学行为,运用多尺度法分析了周期负荷扰动下单机无穷大系统的主共振响应,求得了二阶近似周期解的解析表达式,得到了主共振响应的幅频曲线,应用 C-L 方法分析了不同参数区域内的局部分岔现象及其稳定性,通过数值仿真所得的结论,解释了同步发电机在不同系统参数下对应的实际运行工况,也为同步发电机的稳定同步运行提供定性理论指导。

1 单机无穷大电力系统的数学模型

单机无穷大系统模型如图 1 所示。图 1 中“1”和“2”分别为同步发电机和无穷大系统,“3”和“4”为主变压器,“5”为负荷,“6”为断路器,“7”为系统联络线。设无限大母线电压 $U \angle 0^\circ$ 为电压参考相量,同步发电机

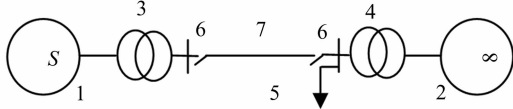


图 1 单机无穷大系统

Fig. 1 The SMIB power system model

的内电动势为 E , δ 为发电机转子 q 轴与同步参考轴间的相对角度,俗称“功角”, ω 为相对角速度,发电机的惯性时间常数为 T_j , ω_0 为同步参考轴线的同步角速度,记 $M = T_j/\omega_0$,发电机的机械输入功率 P_M 为恒定值,发电机到无限大母线之间的等效电抗为 X , P_E 为发电机的电磁功率,则系统的数学模型为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega - \omega_0 \\ M \frac{d\omega}{dt} &= P_M - P_E \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

当发电机为隐极式时有:

$$P_M = \frac{UE}{X} \sin\delta = P_s \sin\delta$$

考虑系统受到某周期性负荷扰动并考虑同步发电机的阻尼作用,则得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\delta}{dt} &= \omega - \omega_0 \\ M \frac{d\omega}{dt} &= P_M - P_s \sin\delta - \\ &D(\omega - \omega_0) + P_D \cos(\Omega t) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中: D 为等值阻尼系数, P_D 为扰动功率幅值, Ω 为扰动频率。

做无量纲化处理,令:

$$\begin{aligned} \tau &= t \sqrt{\frac{P_s}{M}}, \quad x(\tau) = \delta(t), \\ y(\tau) &= \sqrt{\frac{M}{P_s}} [\omega(t) - \omega_0] \end{aligned}$$

并记:

$$\begin{aligned} c &= \frac{D}{\sqrt{P_s M}}, \quad 0 < \rho = \frac{P_M}{P_s} \leq 1, \\ f &= \frac{P_D}{P_s}, \quad \bar{\omega} = \Omega \sqrt{\frac{M}{P_s}} \end{aligned}$$

则方程(2)化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= -\sin x - cy + \rho + f \cos(\bar{\omega}\tau) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

为理解单机无穷大电力系统的动力学行为,首先对于无扰系统即 $c=0, f=0$ 时的系统进行分析,可得其相图如图 2 所示:

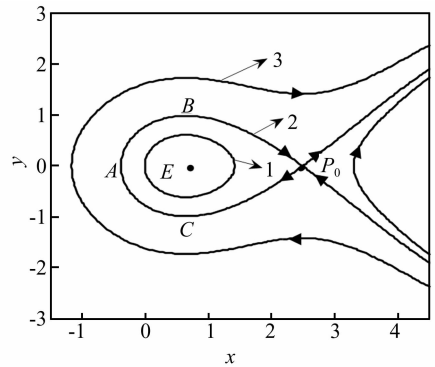


图 2 $0 < \rho < 1$ 时无扰系统的相图

Fig. 2 Phase trajectories of unperturbed system when $0 < \rho < 1$

图 2 是不同初始条件的无扰系统的相轨迹,“1”代表小幅振荡轨道,“2”为联接两个平衡点的同宿轨道,为“1”与“3”的分界线,“3”代表旋转轨道。

记无扰系统的平衡点为 E, P_0 , 则其坐标分别为:

$$(x_1, 0) = (\arcsin\rho, 0), \quad (x_2, 0) = (\pi - \arcsin\rho, 0)$$

易知 $E(x_1, 0)$ 为中心, $P_0(x_2, 0)$ 为鞍点。

随着参数 ρ 的增大,中心和鞍点的位置逐渐靠近,当参数 $\rho=1$ 时,中心和鞍点重合在一起退化成为中心-鞍点(如图 3 所示),此时对应同步发电机稳定与不稳定的临界点,系统处于静态稳定极限,同时表明静态稳定极限所对应的功角正好与最大电磁功率的功角一致。

考虑系统正常运行的情况下,同步发电机中阻尼与系统的状态变量相关性作用,文献[15]给出的修正

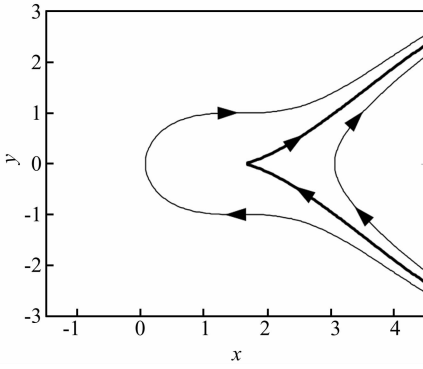


图3 $\rho=1$ 时,无扰系统相图

Fig.3 Phase trajectories of unperturbed system when $\rho=1$

单机无穷大模型考虑了系统状态对机组阻尼系数的影响,结合文献[16]给出的非线性阻尼模型(经验公式),本文用 vander Pol 阻尼代替常系数阻尼,即令式(3)中 $c = \xi + \gamma x^2$,则得:

$$\ddot{x} + \sin x + (\xi + \gamma x^2)\dot{x} - \rho = f \cos(\bar{\omega}\tau) \quad (4)$$

2 小幅振荡的主共振分析

下面讨论周期性负荷扰动时系统的主共振响应,将式(4)中的非线性项 $\sin x$ 在中心点 $(x_1, 0) = (\arcsin \rho, 0)$ 处 Taylor 展开,由奇异性理论^[17]中的识别条件,保留至二次非线性项得:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + (\xi + \gamma x^2)\dot{x} - \alpha x^2 = f \cos(\bar{\omega}\tau) \quad (5)$$

其中 $\omega_0^2 = \cos(x_1)$, $\alpha = \frac{1}{2}\sin(x_1)$ 。

重新标度方程令:

$$\xi \rightarrow \varepsilon^2 \xi, \quad \gamma \rightarrow \varepsilon^2 \gamma, \quad \alpha \rightarrow \varepsilon \alpha, \quad f \rightarrow \varepsilon^2 f, \quad 0 < \varepsilon \ll 1$$

为小参数,则方程化为:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \varepsilon^2(\xi + \gamma x^2)\dot{x} - \varepsilon \alpha x^2 = \varepsilon^2 f \cos(\bar{\omega}\tau) \quad (6)$$

现用多尺度法^[18]寻求方程的渐近解:

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon x_1(T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2 x_2(T_0, T_1, T_2) \quad (7)$$

式中: $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, T_2 = \varepsilon^2 t, T_0$ 为快变时间尺度, T_1, T_2 为慢变时间尺度。

研究主共振情况,因而设:

$$\bar{\omega}^2 = \omega_0^2 + \varepsilon^2 \sigma \quad (8)$$

由多尺度法,比较 ε 同次幂的系数,得下列微分方程组:

$$D_0^2 x_0 + \bar{\omega}^2 x_0 = 0 \quad (9)$$

$$D_0^2 x_1 + \bar{\omega}^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + \alpha x_0^2 \quad (10)$$

$$D_0^2 x_2 + \bar{\omega}^2 x_2 = -2D_0 D_1 x_0 - D_1^2 x_0 - [\xi + \gamma x_0^2] D_0 x_0 - 2D_0 D_2 x_0 + 2\alpha x_0 x_1 + f \cos(\bar{\omega}\tau) + \sigma x_0 \quad (11)$$

方程(9)的复数形式的解为:

$$x_0 = A(T_1, T_2) \exp(i\bar{\omega}T_0) + \bar{A}(T_1, T_2) \exp(-i\bar{\omega}T_0) \quad (12)$$

式中: \bar{A} 为 A 的共轭复数,将式(12)代入式(10)得到:

$$D_0^2 x_1 + \bar{\omega}^2 x_1 = -2i\bar{\omega}D_1 A \exp(i\bar{\omega}T_0) + \alpha[A^2 \exp(2i\bar{\omega}T_0) + A\bar{A}] + cc \quad (13)$$

式中: cc 表示等式右端函数的共轭复数部分,为使解中不出现久期项,须有:

$$D_1 A = 0$$

由上式得: $A = A(T_2)$, 则方程(13)的特解为:

$$x_1 = -\frac{\alpha}{3\bar{\omega}^2} A^2 \exp(2i\bar{\omega}T_0) + \frac{\alpha}{\bar{\omega}^2} A\bar{A} + cc \quad (14)$$

于是系统周期振荡响应的二阶近似解为:

$$x = a \cos(\bar{\omega}t + \phi) + \frac{\varepsilon \alpha a^2}{12\bar{\omega}^2} [3 - \cos(2\bar{\omega}t + 2\phi)]$$

将式(12),式(14)代入式(11)得:

$$D_0^2 x_2 + \bar{\omega}^2 x_2 = [-D_1^2 A - 2i\bar{\omega}D_2 A - \xi i\bar{\omega}A - 2\gamma i\bar{\omega}A^2 \bar{A} + \frac{4\alpha^2}{3\bar{\omega}^2} A^2 \bar{A} + \frac{1}{2}f + \sigma A] \exp(i\bar{\omega}T_0) + NST + cc \quad (15)$$

式中: NST 表示不产生久期项的项,消除式(15)中的久期项得:

$$D_1^2 A + 2i\bar{\omega}D_2 A + \xi i\bar{\omega}A + 2\gamma i\bar{\omega}A^2 \bar{A} - \frac{4\alpha^2}{3\bar{\omega}^2} A^2 \bar{A} = \frac{1}{2}f + \sigma A \quad (16)$$

设:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\phi) \quad (17)$$

式中: a, ϕ 为 T_2 的实函数,将式(17)代入式(16)分离实部与虚部得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dT_2} &= -\frac{1}{2\bar{\omega}}\sigma - \frac{\alpha^2}{6\bar{\omega}^3}a^2 - \frac{f}{2a\bar{\omega}}\cos\phi \\ \frac{da}{dT_2} &= -\frac{1}{2}\xi a - \frac{1}{4}\gamma a^3 - \frac{f}{2\bar{\omega}}\sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

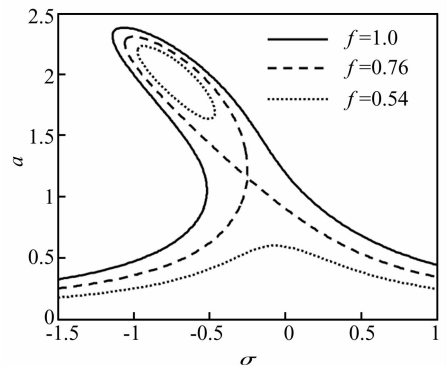


图4 幅频特性曲线

Fig.4 Frequency-response curves

系统的定常运动对应于 $\dot{a} = \frac{da}{dT_2} = 0, \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dT_2} = 0$,

亦即对应于方程组的解:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2}\sigma a - \frac{\alpha^2}{6\bar{\omega}^3}a^3 &= \frac{f}{2}\cos\phi \\ \frac{1}{2}\xi \bar{\omega}a + \frac{1}{4}\gamma \bar{\omega}a^3 &= -\frac{f}{2}\sin\phi \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

从方程组(19)消去 ϕ 得频率响应方程:

$$\left(\sigma a + \frac{\alpha^2}{3\omega^2}a^3\right)^2 + \left(\xi\bar{\omega}a + \frac{1}{2}\gamma\bar{\omega}a^3\right)^2 = f^2 \quad (20)$$

当 $\xi=1, \gamma=-0.5, \alpha=1, \bar{\omega}=1$ 时, 系统的幅频曲线如图4所示, 从图可知, 系统具有软特性刚度的动态特性, 在较低频率时即可发生跳跃现象; 图5为无量纲的响应幅值-激励幅值曲线。

讨论定常运动的稳定性, 设:

$$\left. \begin{aligned} a &= a_0 + a_1 \\ \phi &= \phi_0 + \phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

其中: a_0, ϕ_0 为式(20)的一组解, a_1, ϕ_1 为小的扰动量, 将式(21)代入式(18)并对 a_1, ϕ_1 展开, 注意到 a_0, ϕ_0 满足式(19)并略去 a_1, ϕ_1 二阶及以上微量, 得:

$$\left. \begin{aligned} \frac{da_1}{dT_2} &= -\left(\frac{\alpha^2}{2\omega^3}a_0 + \frac{\sigma}{2\omega a_0^2}\right)a_1 + \left(\frac{f}{2\omega}\sin\phi_0\right)\phi_1 \\ \frac{d\phi_1}{dT_2} &= -\left(\frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\gamma a_0^2\right)a_1 - \left(\frac{f}{2\omega}\cos\phi_0\right)\phi_1 \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

因而定常运动的稳定性依赖于式(22)的右端的系数矩阵的特征值。

利用式(19), 可得特征方程为:

$$\begin{bmatrix} \lambda + \frac{\alpha^2}{2\omega^3}a_0 + \frac{\sigma}{2\omega a_0^2} & \frac{1}{2}\xi a_0 + \frac{1}{4}\gamma a_0^3 \\ \frac{1}{2}\xi + \frac{3}{4}\gamma a_0^2 & \lambda - \frac{\alpha^2}{2\omega}a_0 - \frac{\sigma}{6\omega^3}a_0^3 \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

由特征方程的特征根可知, 在幅频曲线图像(图4)中, 对于每一幅频曲线, 具有铅垂切线的曲线之间的部分为不稳定, 其余部分稳定, 即当有多值解时, 中间的一个解为不稳定的, 其余两个为稳定的, 其在该区间内有可能发生振幅的跳跃现象。

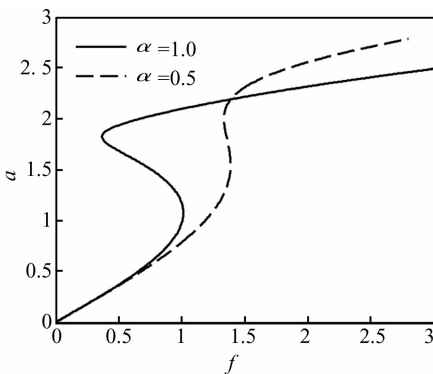


图5 响应幅值-激励幅值曲线

Fig. 5 Response-Excitation amplitude curves

3 主共振的奇异性分析

根据 C-L 方法^[17]对方程(20)作奇异性分析, 令:

$$z = a^2 \quad (24)$$

得:

$$c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = 0 \quad (25)$$

其中:

$$c_3 = \frac{\alpha^4}{9\omega^4} + \frac{1}{4}\gamma^2\bar{\omega}^2, \quad c_2 = \frac{2\sigma\alpha^2}{3\omega^2} + \xi\gamma\bar{\omega}^2$$

$$c_1 = \sigma^2 + \xi^2\bar{\omega}^2, \quad c_0 = \frac{1}{4}\gamma^2\bar{\omega}^2 a^6 - f^2$$

记:

$$c_3 z^3 + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 = c_3 \left(z^3 + \frac{c_2}{c_3} z^2 + \frac{c_1}{c_3} z + \frac{c_0}{c_3} \right) \hat{=}$$

$$c_3 (z^3 + \varepsilon_2 z^2 + \lambda z + \varepsilon_1) = c_3 G(z, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$$

$$G(z, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = z^3 + \varepsilon_2 z^2 + \lambda z + \varepsilon_1 \quad (26)$$

取 λ 为分岔参数, $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ 为开折参数, 显然 $G(z, \lambda, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ 为芽 $g = (z, \lambda) = z^3 + \lambda z$ 的普适开折, 且余维数为2。由奇异性理论^[19]通过计算得:

转迁集 $\Sigma = B \cup H \cup D$ 。其中分岔集: $B = \{\varepsilon_1 = 0\}$, 滞后集: $H = \{\varepsilon_1 = \varepsilon_2^3/27\}$, 双极限点集: $D = \Phi$ 。

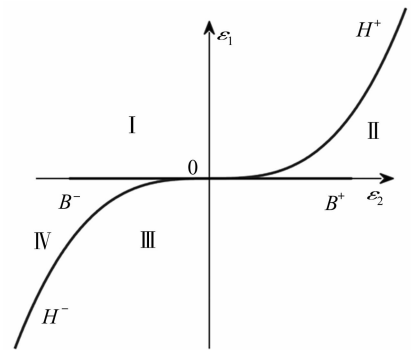


图6 转迁集

Fig. 6 Transition set

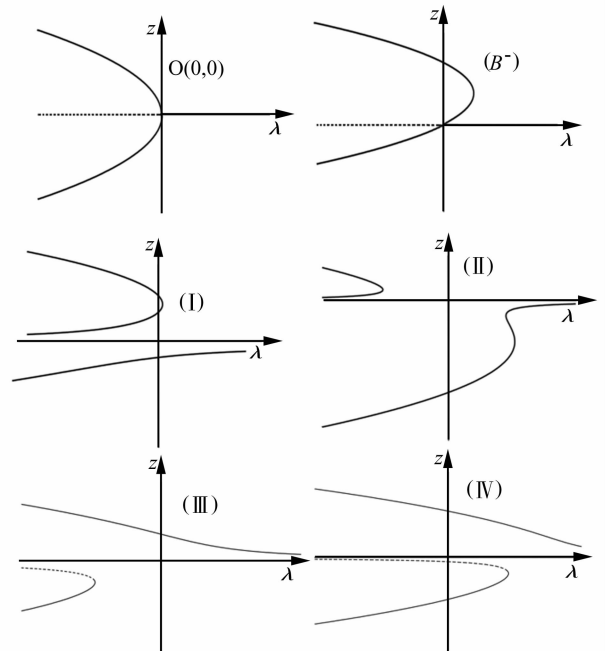


图7 不同保持域内的分岔图

Fig. 7 Bifurcation diagrams on different persistent regions

转迁集如图6所示,可以看出,转迁集将平面 $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$ 分成四个不同的保持域,在不同区域内的分岔模式如图7所示,依之可调整系统参数达到选择工程中允许的动态行为模式的目的,因而可为同步发电机不同运行参数和结构参数下的动力学分析、分岔控制和工程优化设计提供理论指导。

4 数值分析

为更好的理解单机无穷大电力系统随着周期性负荷扰动的变化所呈现的动态特性,以下用数值仿真的方法讨论系统(4)的动力学行为变化情况。

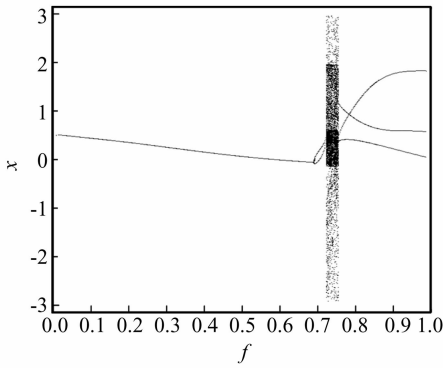


图8 f 不同时的分岔图

Fig. 8 Bifurcation diagram for the different amplitude of f

选择周期激励的幅值 f 为分岔参数,固定系统中的其它参数,当 $\rho = 0.50, \xi = 0.35, \gamma = 0.02, \bar{\omega} = 1.0$ 时,图8给出的 Poincaré 映射是根据时间 $T = 2\pi/\bar{\omega}$ 所取的相点 x 对应于分岔参数 f 的系统(4)的分岔图。

由图8可以看出,随着激励幅值 f 的增大,系统响应出现了倍周期分岔现象,轨道经历了周期1→周期2→混沌解的变化。当激励的幅值较小时,系统出现了周期1解,其相图如图9(a)所示,此时同步发电机可以保持同步运行,电力系统处于暂态稳定状态,随着外激励幅值 f 增大,当 $f = 0.72$ 时出现了周期2解,其相图如图9(b)所示;当 $f = 0.7259$ 时出现了混沌解,此时发电机功角出现了不规则也不衰减的类似随机的混沌振荡,功角不再稳定可靠,系统失稳。图9(c)和图9(d)分别为混沌状态的相图和对应的混沌吸引子,由全局分岔图(图8)可见,混沌状态仅存在于扰动幅值 f 的一个很窄的数值范围内,当 $f = 0.79$ 时出现了旋转周期轨道,其相图如图9(e)所示,此时随着功角 δ 的增大,加速转矩不断增大,使发电机转子不断加速,发电机就不可能再恢复到同步运行,系统由于增幅振荡最终失去稳定,发电机失去同步后将在系统间产生功率和电压的强烈振荡,结果使发电机组和负荷被迫切除,甚至导致系统解列或瓦解。

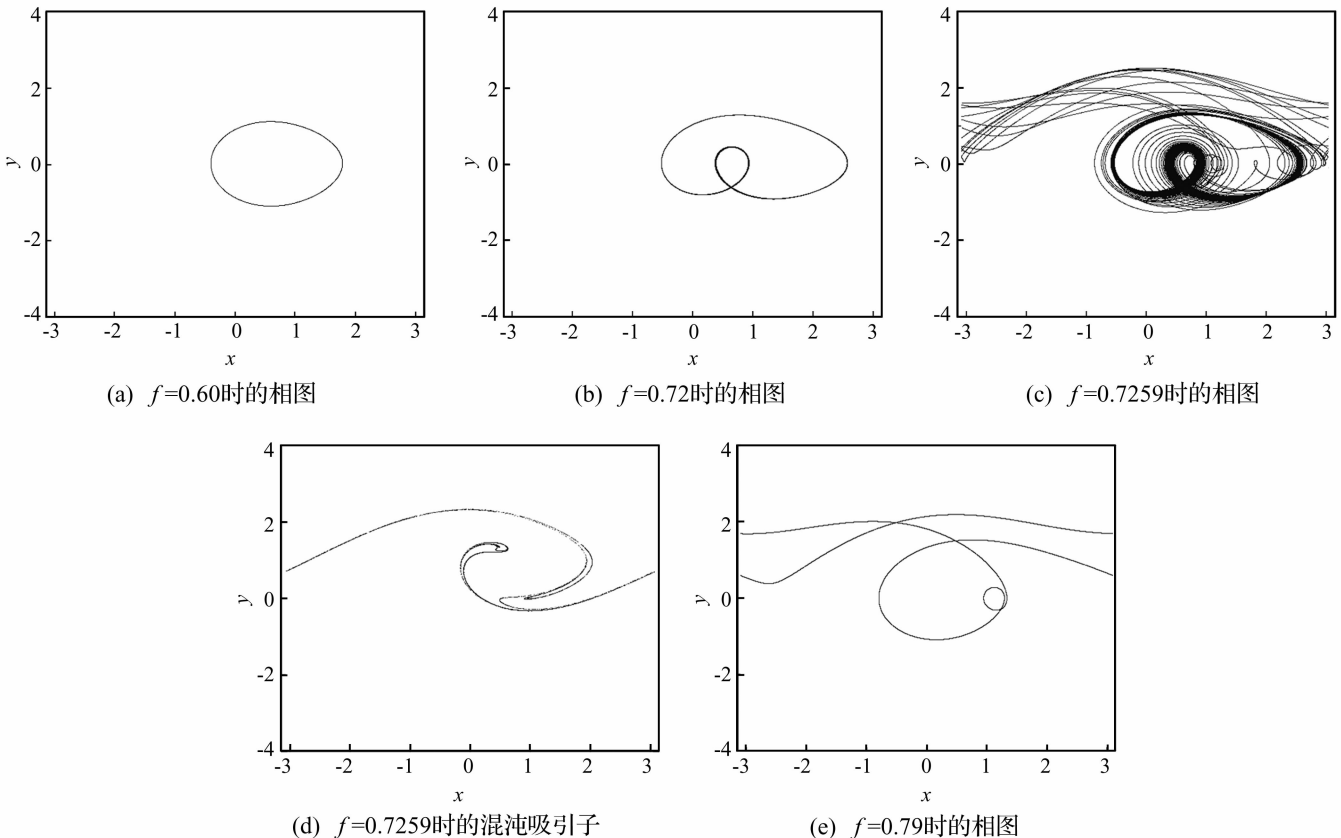


图9 f 不同时的相图及混沌吸引子

Fig. 9 Phase portraits and chaotic attractor for different f

5 结论

本文应用非线性动力学的解析方法,分析了在周期性负荷扰动下电力系统振荡的失稳现象,考虑了同步发电机非线性阻尼转矩的作用,比传统文献更贴近工程实际,由于保留了电力系统的非线性特征,因此所得结果能够更好地反应振荡失稳的机理,可以为电力系统的稳定运行提供依据,具体有:

(1) 应用多尺度方法和C-L方法,对受周期负荷扰动的单机无穷大电力系统的主共振进行了研究,得到了系统小幅振荡周期解的二次解析表达式和幅频响应方程,分析了定常解的稳定性并得到了系统稳态响应分岔方程的转迁集和对应的分岔图,研究表明该系统的不同分岔模式与其运行参数和结构参数有密切联系,可为同步发电机的动力学分析、分岔控制和工程优化设计提供理论指导。

(2) 电力系统在周期性激励下,当扰动激励幅值较小时,同步发电机功角具有小幅振荡周期解,数值结果与理论结果一致,同步发电机能够保持同步运行,扰动幅值达到某个临界值时,发电机功角出现不规则的振荡现象,系统处于混沌振荡状态,影响了系统的正常运行,同步发电机失步,电力系统失稳,扰动幅值若继续增大,发电机功角持续增大,同步发电机失步,造成系统解列。

参考文献

- [1] 卢强,梅生伟,孙元章. 电力系统非线性控制[M]. 北京:科学出版社,1993.
- [2] 贾宏杰,余贻鑫,王成山. 电力系统混沌现象及相关研究[J]. 中国电机工程学报,2001,21(7):26-30.
JIA Hong-jie, YU Yi-xin, WANG Cheng-shan. Chaotic phenomena in power systems and its studies[J]. Proceedings of the CSEE,2001,21(7):26-30.
- [3] Gerardo E P, Paul M O, Arnau D C, et al. Output-feedback IDA stabilisation of an SMIB system using a TCSC[J]. International Journal of Control, 2010, 83(12): 2471-2482.
- [4] Shi J, Tang Y, Dai T, et al. Determination of SMES capacity to enhance the dynamic stability of power system[J]. Physica C, 2010, 470(20):1707-1710.
- [5] Manjarekar N S, Banavar R N, Ortega R. Application of interconnection and damping assignment to the stabilization of a synchronous generator with a controllable series capacitor[J]. International Journal of Electrical Power and Energy Systems, 2010, 32(1): 63-70.
- [6] Kumaran R C, Venkatesh T G, Swaru K S. Voltage stability-Case study of saddle node bifurcation with stochastic load dynamics[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2011, 33(8): 1384-1388.
- [7] Duan X Z, Wen J Y, Cheng S J. Bifurcation analysis for an SMIB power system with series capacitor compensation associated with sub-synchronous resonance[J]. Science in China. Series E: Technological Sciences, 2009, 52(2): 436-441.
- [8] Zhu W, Mohler R R. Hopf bifurcations in a SMIB power system with SSR[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 1996, 11(3): 1579-1584.
- [9] Alberto L F C, Bretas N G. Application of Melnikov's method for computing heteroclinic orbits in a classical SMIB power system model[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2000, 47(7): 1085-1089.
- [10] Wei D Q, Zhang B, Qiu D Y, et al. Effect of noise on erosion of safe basin in power system[J]. Nonlinear Dynamics, 2010, 61: 477-482.
- [11] Chen H K, Lin T N, Chen J H. Dynamic analysis, controlling chaos and chaotification of a SMIB power system[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2005, 24: 1307-1315.
- [12] Zhang W N, Zhang W D. Chaotic Oscillation of a Nonlinear Power System[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 1999, 20(10): 1175-1183.
- [13] Chen X W, Zhang W N, Zhang W D. Chaotic and subharmonic oscillations of a nonlinear power system[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems II, 2005, 52(12): 811-815.
- [14] Nayfeh M A, Hamdan A M A, Nayfeh A H. Chaos and stability in a power system: subharmonic-resonant case[J]. Nonlinear Dynamics, 1991, 2: 53-72.
- [15] Abed E H, Varalya P P. Nonlinear Oscillations in Power systems[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 1984, 6(1): 37-43.
- [16] Liwshitz M M. Positive and negative damping in synchronous machines[J]. AIEE Trans, 1941, 60: 210-213.
- [17] 陈予恕. 非线性振动系统的分岔和混沌理论[M]. 北京:高等教育出版社,1993.
- [18] 陈予恕. 非线性振动[M]. 北京:高等教育出版社,2002.