

# 重合度对人字齿轮非线性系统振动特性的影响分析

王 峰, 方宗德, 李声晋

(西北工业大学 机电学院, 西安 710072)

**摘 要:** 由轮齿接触分析以及轮齿承载接触分析计算出考虑安装误差的轮齿综合啮合刚度和单齿啮合刚度, 提出了考虑齿轮啮合重合度的啮合冲击计算模型, 建立了考虑时变啮合刚度、啮入冲击、齿侧间隙的人字齿轮十二自由度啮合型弯-扭-轴耦合非线性振动模型。以某船用单级人字齿轮副为实例, 通过改变轮齿高度变位系数调整重合度进行验证计算, 将所提出的线外啮合冲击模型冲击力计算结果与文献[8]中模型计算结果进行比较, 验证了该模型的有效性。通过实例计算, 结果表明在负载一定的情况下, 轮齿啮合周向及小轮轴向振动随着重合度的增大而减小; 而当轮齿啮合重合度增大到 4.07 时, 系统振动呈增大趋势。

**关键词:** 重合度; 线外啮合冲击; 齿侧间隙; 非线性动力学模型; 振动特性

**中图分类号:** TH132; O322 **文献标识码:** A

## Effect of contact ratio on dynamic behavior of a double-helical gear nonlinear system

WANG Feng, FANG Zong-de, LI Sheng-jin

(School of Mechatronics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

**Abstract:** The integrated and single tooth-meshing stiffness were calculated using tooth contact analysis and loaded tooth contact analysis with assembly misalignment. A corner meshing impact calculation model was put forward considering contact ratio, and a 12-DOF nonlinear double-helical gear vibration model was established considering meshing stiffness, corner mesh impact, and backlash. A ship transmission system was taken as an example, the proposed models were verified by changing the contact ratio. The contact ratio was changed by adjusting tooth height modification coefficients. The effectiveness of the meshing impact model was proved through comparing its calculation results with those in the literature [8]. The results showed that under the constant load, the system's vibration decreases with increase in contact ratio; however, when contact ratio exceeds 4.07, the system's vibration grows.

**Key words:** contact ratio; corner meshing impact; backlash; nonlinear dynamic model; vibration characteristic

随着现代工业对齿轮传动系统高速、重载、轻量化以及低噪声的要求, 减少齿轮的疲劳损伤, 降低其传动噪声显得尤为重要, 这就迫切需要我们建立更精确的动力学分析模型, 考虑诸如啮合间隙、啮合冲击、时变啮合刚度、传动误差、时变系统支撑刚度等非线性因素<sup>[1]</sup>。为此国内外学者早在上世纪 80 年代就开始对齿轮系统非线性动力学进行了大量的研究, Vaishya 等<sup>[2]</sup>比较了在线性时不变系统(LTI)、线性时变系统(LTV)和非线性时变系统(NLTV)下, 齿面间的滑动摩擦对系统振动特性的影响作用。Sato 等<sup>[3]</sup>利用时变非线性模型, 考察了随机激励对系统动态响应稳定性的影响。Song 等<sup>[4]</sup>通过半解析法, 分析了齿轮动力学系

统中啮合刚度和滑动摩擦之间的相互影响。一般情况, 提高齿轮啮合重合度可以增加齿轮的传动平稳性, 但重合度的提高, 对啮合冲击力的影响如何, 对考虑间隙的非线性人字齿轮系统的振动特性具体影响又如何, 这方面问题的探讨尚未见有文献发表。

本文由轮齿接触分析(Tooth Contact Analysis)以及轮齿承载接触分析(Load Tooth Contact Analysis)计算出考虑安装误差的轮齿综合啮合刚度和单齿啮合刚度<sup>[5]</sup>, 提出了考虑重合度的啮合冲击模型, 建立了考虑时变啮合刚度、啮入冲击、齿侧间隙的人字齿轮系统十二自由度啮合型弯-扭-轴耦合振动模型。通过实例计算结果分析了重合度对轮齿啮合冲击力的影响, 探讨了通过变位系数改变轮齿啮合重合度对人字齿轮非线性系统左端轮齿啮合周向、小轮轴向动力学特性的影响。

### 1 考虑重合度的啮合冲击模型

在齿轮轮齿啮合过程中,由于传动系统误差和轮齿受载变形,使轮齿产生“啮合成基节误差”,使一对轮齿在进入和退出啮合时,其啮入啮出点偏离啮合线上的理论啮入啮出点,引起啮入啮出冲击<sup>[6]</sup>。在齿轮传动系统动力学中,这种因“啮合成基节误差”引起的冲击称为啮合过程的啮合冲击。Seireg等<sup>[7]</sup>计算并试验验证了啮入冲击的影响明显比啮出冲击大,故本文仅考虑啮入冲击对系统的影响。需要说明的是,轮齿啮合冲击包括基节误差使轮齿偏离理论啮合线产生的冲击以及参与啮合齿对数变化而产生的冲击,对于后者本文将其作为刚度激励考虑进动力学系统中。

周长江等<sup>[8]</sup>对齿轮传动的线外啮合冲击的计算中,采用“轮齿综合变形-载荷历程”反推啮入冲击点的轮齿变形,进而获得啮入冲击点的准确位置、冲击速度和冲击力。作者通过考虑安装误差的轮齿接触分析以及轮齿承载接触分析,将齿形齿距误差等效考虑进轮齿修形,求得啮入点的承载传动误差即为啮入冲击点的法向轮齿变形。冲击点的位置和冲击速度文献<sup>[8]</sup>中已有详尽的推导,在此不再赘述。对于啮入点D的冲击力计算,本文提出图1所示的考虑重合度的啮入冲击模型。

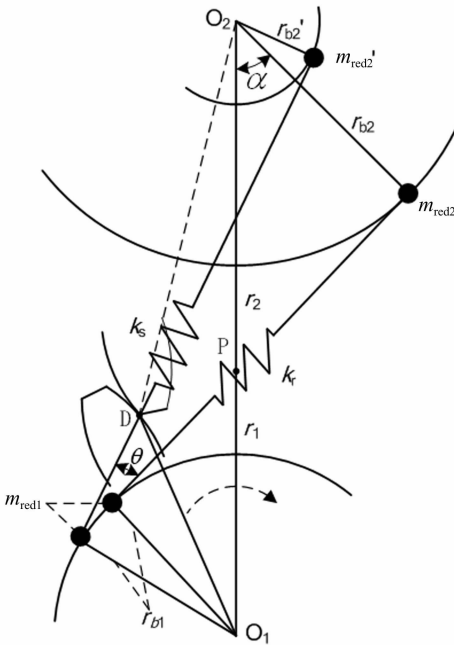


图1 考虑重合度的啮入冲击模型

Fig.1 Mesh impact model considering contact ratio

对于重合度较大的啮合轮齿,比如斜齿轮、人字齿轮,其啮入冲击过程可理解为在已有一对甚至几对齿正常啮合的情况下,新进入啮合的主被动轮齿由于啮入点在瞬时啮合线方向速度不一样而产生冲击。根据

冲击力学理论,得:

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{I_1 I_2 v_s^2}{(I_1 r_{b2}'^2 + I_2 r_{b1}'^2)} = \frac{1}{2q_s} \delta_s^2 + \frac{1}{2q_r} \delta_r^2 \quad (1)$$

$$\delta_s = F_s \cdot q_s, \quad \delta_r = \cos\theta F_s \cdot q_r$$

其中: $E_k$ 为冲击动能; $I_1$ 、 $I_2$ 为大小齿轮转动惯量; $v_s$ 为啮入冲击D点的冲击速度; $r_{b1}$ 为正常啮合时小轮基圆半径; $r_{b2}'$ 为线外啮合瞬时大轮基圆半径; $q_s$ 为线外啮入D点单对轮齿柔度,可以通过轮齿接触分析程序求得轮齿啮合综合刚度再乘以载荷分配系数得到; $q_r$ 为啮入时刻除冲击齿对外,剩余其它啮合齿对的综合柔度; $\delta_s$ 为冲击齿对的冲击变形; $\delta_r$ 为剩余其它啮合齿对的冲击变形; $\theta$ 为啮入冲击D点瞬时啮合线与正常啮合线之间的夹角,可由图1中几何关系得到:

$$\theta = \arccos\left(\frac{r_{b2}'}{r_{O_2D}}\right) - \angle PO_2D - \alpha \quad (2)$$

其中: $r_{O_2D}$ 为从动轮齿顶圆半径; $\alpha$ 为齿面压力角;则可求得啮入最大冲击力的表示式:

$$F_s = v_s \sqrt{\frac{I_1 I_2}{(I_1 r_{b2}'^2 + I_2 r_{b1}'^2) (q_s + q_r \cos^2 \theta)}} \quad (3)$$

### 2 啮合型弯-扭-轴耦合人字齿轮动力学模型

在人字齿轮传动系统中,由于左右斜齿轮副传动不可能达到完全理想状态,因此系统除具有扭转振动和横向振动外,还会引起轴向窜动,从而形成了人字齿轮系统的啮合型弯-扭-轴耦合振动(图2),其中一般将小齿轮浮动安装<sup>[9]</sup>。

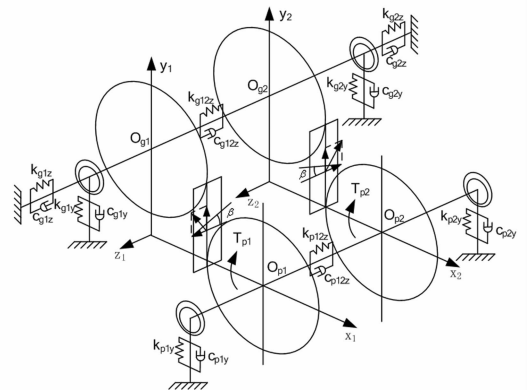


图2 啮合型弯-扭-轴耦合人字齿轮振动模型

Fig.2 Bending-torsion-shaft herringbone gear coupling vibration model

为简化,不考虑齿面摩擦,这时系统为十二自由度系统,系统的广义位移列阵可表示为:

$$\{\delta\} = \{y_{p1}, z_{p1}, \theta_{p1}, y_{g1}, z_{g1}, \theta_{g1}, y_{p2}, z_{p2}, \theta_{p2}, y_{g2}, z_{g2}, \theta_{g2}\}^T \quad (4)$$

式中:  $y_{ij}$ 、 $z_{ij}$ 、 $\theta_{ij}$  ( $i = p, g; j = 1, 2$ ) 分别为主、从动人字齿轮中心点  $O_{p1}$ 、 $O_{p2}$  和  $O_{g1}$ 、 $O_{g2}$  在  $y$  向、 $z$  向的平移振动位移和转角位移。综合考虑刚度激励、间隙激励和啮合冲击激励的影响, 采用弯-扭-轴耦合振动分析模型。根据牛顿力学定律, 由图 2 可得系统的动力学方程为:

$$\begin{cases} m_{p1}\ddot{y}_{p1} + c_{p1y}\dot{y}_{p1} + k_{p1y}y_{p1} = -F_{y1} \\ m_{p1}\ddot{z}_{p1} + c_{p12z}(\dot{z}_{p1} - \dot{z}_{p2}) + k_{p12z}(z_{p1} - z_{p2}) = -F_{z1} \\ I_{p1}\ddot{\theta}_{p1} = -F_{y1} \cdot R_p + T_{p1} - F_{s1} \cdot R_p \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} m_{g1}\ddot{y}_{g1} + c_{g1y}\dot{y}_{g1} + k_{g1y}y_{g1} = F_{y1} \\ m_{g1}\ddot{z}_{g1} + c_{g1z}\dot{z}_{g1} + k_{g1z}z_{g1} + c_{g12z}(\dot{z}_{g1} - \dot{z}_{g2}) + k_{g12z}(z_{g1} - z_{g2}) = F_{z1} \\ I_{g1}\ddot{\theta}_{g1} = F_{y1} \cdot R_g - T_{g1} + F_{s1} \cdot R_g \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} m_{p2}\ddot{y}_{p2} + c_{p2y}\dot{y}_{p2} + k_{p2y}y_{p2} = -F_{y2} \\ m_{p2}\ddot{z}_{p2} - c_{p12z}(\dot{z}_{p1} - \dot{z}_{p2}) - k_{p12z}(z_{p1} - z_{p2}) = -F_{z2} \\ I_{p2}\ddot{\theta}_{p2} = -F_{y2} \cdot R_p + T_{p2} - F_{s2} \cdot R_p \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} m_{g2}\ddot{y}_{g2} + c_{g2y}\dot{y}_{g2} + k_{g2y}y_{g2} = F_{y2} \\ m_{g2}\ddot{z}_{g2} + c_{g2z}\dot{z}_{g2} + k_{g2z}z_{g2} - c_{g12z}(\dot{z}_{g1} - \dot{z}_{g2}) - k_{g12z}(z_{g1} - z_{g2}) = F_{z2} \\ I_{g2}\ddot{\theta}_{g2} = F_{y2} \cdot R_g - T_{g2} + F_{s2} \cdot R_g \end{cases} \quad (8)$$

式中:  $m_p$ 、 $m_g$ 、 $I_p$ 、 $I_g$  分别为小轮和大轮的质量及转动惯量;  $R_p$ 、 $R_g$  为小轮和大轮的分度圆半径;  $c_{p1y}$ 、 $c_{g1y}$ 、 $c_{p2y}$ 、 $c_{g2y}$ 、 $k_{p1y}$ 、 $k_{g1y}$ 、 $k_{p2y}$ 、 $k_{g2y}$  为传动轴、轴承在中心点  $O_{p1}$ 、 $O_{g1}$ 、 $O_{p2}$ 、 $O_{g2}$  的等效支撑阻尼和刚度;  $c_{p12z}$ 、 $c_{g1z}$ 、 $c_{g2z}$ 、 $c_{g12z}$ 、 $k_{p12z}$ 、 $k_{g1z}$ 、 $k_{g2z}$ 、 $k_{g12z}$  分别为齿轮、轴的轴向等效平移振动阻尼和刚度;  $F_{y1}$ 、 $F_{y2}$ 、 $F_{z1}$ 、 $F_{z2}$  分别为轮齿啮合切向及轴向动态啮合力,  $F_{s1}$ 、 $F_{s2}$  为啮合冲击力激励。

式(5)~(8)中的切向及轴向动态啮合力的参数表达式为:

$$F_{y1} = \cos\beta_1 c_{m1} [\cos\beta_1 (\dot{y}_{p1} - \dot{y}_{g1} + R_p \dot{\theta}_{p1} - R_g \dot{\theta}_{g1}) + \sin\beta_1 (\dot{z}_{p1} - \dot{z}_{g1})] + \cos\beta_1 k_{m1} f [\cos\beta_1 (y_{p1} - y_{g1} + R_p \theta_{p1} - R_g \theta_{g1}) + \sin\beta_1 (z_{p1} - z_{g1})] \quad (9)$$

$$F_{z1} = \sin\beta_1 c_{m1} [\cos\beta_1 (\dot{y}_{p1} - \dot{y}_{g1} + R_p \dot{\theta}_{p1} - R_g \dot{\theta}_{g1}) + \sin\beta_1 (\dot{z}_{p1} - \dot{z}_{g1})] + \sin\beta_1 k_{m1} f [\cos\beta_1 (y_{p1} - y_{g1} + R_p \theta_{p1} - R_g \theta_{g1}) + \sin\beta_1 (z_{p1} - z_{g1})] \quad (10)$$

$$F_{y2} = \cos\beta_2 c_{m2} [\cos\beta_2 (\dot{y}_{p2} - \dot{y}_{g2} + R_p \dot{\theta}_{p2} - R_g \dot{\theta}_{g2}) + \sin\beta_2 (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{g2})] + \cos\beta_2 k_{m2} f [\cos\beta_2 (y_{p2} - y_{g2} + R_p \theta_{p2} - R_g \theta_{g2}) + \sin\beta_2 (z_{p2} - z_{g2})] \quad (11)$$

$$F_{z2} = \sin\beta_2 c_{m2} [\cos\beta_2 (\dot{y}_{p2} - \dot{y}_{g2} + R_p \dot{\theta}_{p2} - R_g \dot{\theta}_{g2}) + \sin\beta_2 (\dot{z}_{p2} - \dot{z}_{g2})] + \sin\beta_2 k_{m2} f [\cos\beta_2 (y_{p2} - y_{g2} + R_p \theta_{p2} - R_g \theta_{g2}) + \sin\beta_2 (z_{p2} - z_{g2})] \quad (12)$$

其中:  $\beta$  为螺旋角;  $k_{m1}(t)$ 、 $k_{m2}(t)$  为左右两齿轮副法向啮合刚度; Kahraman 等<sup>[10]</sup>已经证明了可以忽略啮合阻

尼的时变性, 像大多数文献一样, 将法向啮合阻尼等效为粘性阻尼  $c_{m1}$ 、 $c_{m2}$ <sup>[11]</sup>;  $f(x)$  为分段非线性函数, 其表达形式参见文献[12]。需要说明的是, 由于本文采用轮齿承载接触分析来求得轮齿啮合刚度, 其中已经考虑了安装及齿形齿距误差, 即将误差激励合成了刚度激励中。

### 3 实例验证与结果分析

表 1 中给出某单级人字齿轮副参数, 作为本文中的分析实例。

表 1 某船用单级人字齿轮副参数

Tab. 1 Parameters of example herringbone gear pairs

参数	小齿轮(主动轮)	大齿轮(被动轮)
法向模数/mm		6
端面压力角/(°)		20
螺旋角/(°)		24.43
齿侧间隙/ $\mu\text{m}$		2
负载扭矩/N·m		800
阻尼率系数		0.1
密度/( $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$ )		7.85
齿数	17	44
旋向	左右旋	右左旋
齿宽/mm	75	75
转动惯量/( $\text{kg} \cdot \text{m}^{-2}$ )	0.065	3.70
正常工况转速/( $\text{r} \cdot \text{min}^{-1}$ )	2 000	772

#### 3.1 啮合冲击力计算分析

根据表 1 的数据, 由式(3)计算通过改变小轮轮齿变位系数得到的五种重合度下的最大啮入冲击力, 并与文献[8]中提出的啮合冲击模型结算结果相比较。

表 2 啮入点 D 冲击力计算结果比较

Tab. 2 Comparison of mesh impact in point D

小轮变位系数	啮合重合度	文献[8]模型计算结果/kN	本文模型计算结果/kN
+0.25	2.72	9.255	8.896
+0.12	2.91	8.661	8.378
0	3.30	6.593	6.469
-0.13	3.68	5.180	5.121
-0.22	4.07	2.107	2.096

由表 2 可知, 随着重合度的增大, 啮入点的冲击力减小, 这是因为重合度的增大使得轮齿综合啮合刚度增大, 从而轮齿载荷变形减小即导致啮合冲击的综合基节误差减小。对比两种计算模型, 可以看出本文提出的考虑重合度的啮合冲击力计算模型与文献[8]计算的冲击力计算结果偏差在 1%~5% 之间, 而且重合度越小偏差越明显, 这是因为重合度越小, 除冲击齿对外其它正常啮合齿对柔度越大, 从而对啮合冲击能量

的缓冲性能越好,而文献[8]则未考虑此缓冲作用。

### 3.2 系统振动响应分析

对第三节中建立的啮合型弯-扭-轴耦合非线性人字齿轮动力学方程组量纲一化<sup>[12]</sup>,代入表1中的人字齿轮副参数,利用变步长四阶 Runge-Kutta 数值积分方法<sup>[13]</sup>对其进行求解,得到仿真数值解。通常认为齿轮产生噪声的主要原因是轮齿之间的相对振动<sup>[14]</sup>,对于人字齿轮本文主要研究其左端啮合副啮合周向和小

轮轴向的振动。

重合度  $\varepsilon$  取 2.72 时,轮齿啮合周向和小轮轴向的振动加速度响应见图3、图4。啮合周向加速度均方根值为  $32.7\text{m/s}^2$ ,小轮轴向加速度均方根值为  $2.07\text{m/s}^2$ 。

重合度  $\varepsilon$  取 3.30 时,轮齿啮合周向和小轮轴向的振动加速度响应见图5、图6。啮合周向加速度均方根值为  $15.8\text{m/s}^2$ ,小轮轴向加速度均方根值为  $1.02\text{m/s}^2$ 。

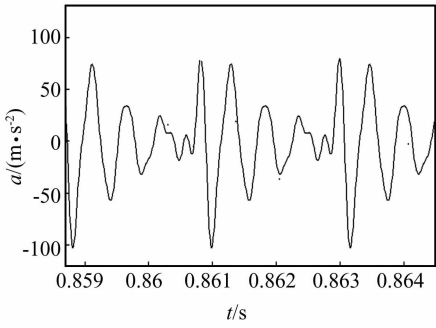


图3 啮合周向振动加速度 ( $\varepsilon = 2.72$ )

Fig.3 Acceleration amplitude of mesh circumferential ( $\varepsilon = 2.72$ )

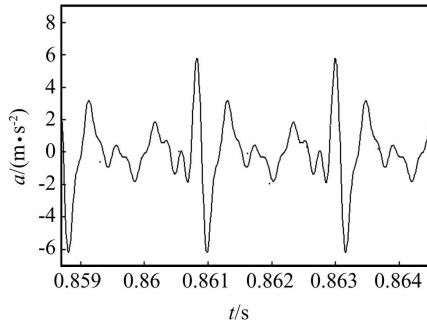


图4 小轮轴向振动加速度 ( $\varepsilon = 2.72$ )

Fig.4 Acceleration amplitude of pinion axial ( $\varepsilon = 2.72$ )

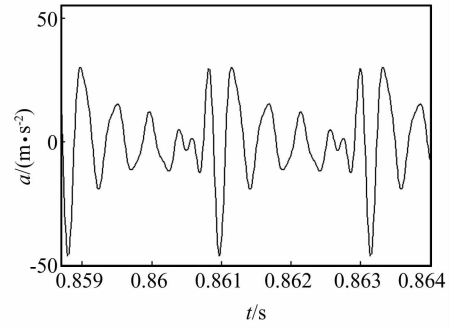


图5 啮合周向振动加速度 ( $\varepsilon = 3.30$ )

Fig.5 Acceleration amplitude of mesh circumferential ( $\varepsilon = 3.30$ )

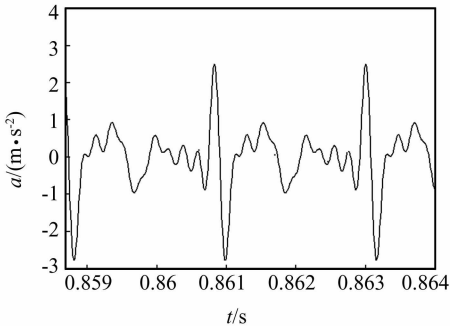


图6 小轮轴向振动加速度 ( $\varepsilon = 3.30$ )

Fig.6 Acceleration amplitude of pinion axial ( $\varepsilon = 3.30$ )

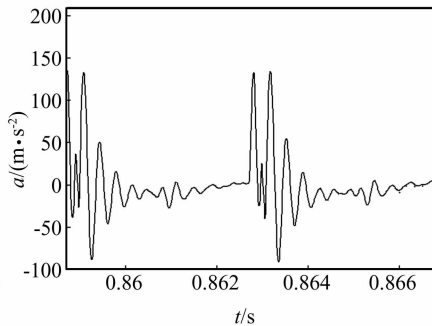


图7 啮合周向振动加速度 ( $\varepsilon = 4.07$ )

Fig.7 Acceleration amplitude of mesh circumferential ( $\varepsilon = 4.07$ )

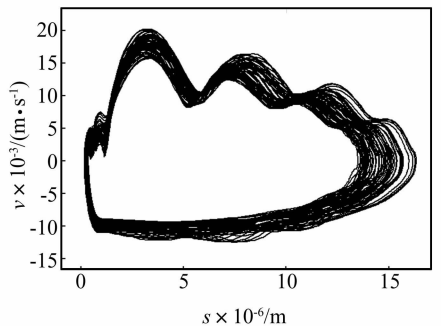


图8 啮合周向相平面图 ( $\varepsilon = 4.07$ )

Fig.8 Phase plane of mesh circumferential ( $\varepsilon = 4.07$ )

重合度  $\varepsilon$  取 4.07 时,轮齿啮合周向和小轮轴向的振动加速度响应、相平面图如图7~图10。啮合周向加速度均方根值为  $34.4\text{m/s}^2$ ,小轮轴向加速度均方根值为  $2.56\text{m/s}^2$ 。

可以看出,在文中建立的考虑间隙啮合型弯-扭-轴耦合人字齿轮非线性振动模型中,重合度由 2.72 增至 3.30 时,由于啮合刚度增大、刚度变化幅值减小,从而线外啮入冲击减小,人字齿轮系统轮齿啮合周向和小轮轴向振动加速度均减小,说明增大轮齿啮合重合度起到了减振降噪的效果。重合度继续增大至 4.07 时,啮合周向和小轮轴向的振动加速度均方根值呈增大趋势。这是因为在外载荷一定的情况下,当啮

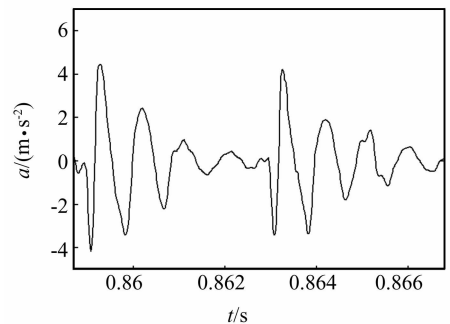


图9 小轮轴向振动加速度 ( $\varepsilon = 4.07$ )

Fig.9 Acceleration amplitude of pinion axial ( $\varepsilon = 4.07$ )

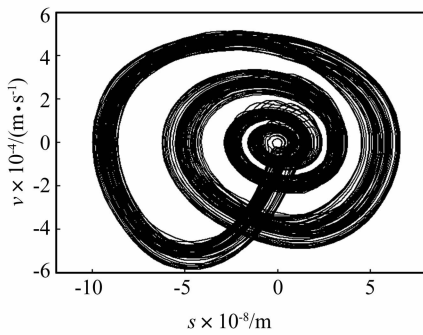


图10 小轮轴向相平面图( $\varepsilon=4.07$ )

Fig. 10 Phase plane of pinion axial ( $\varepsilon=4.07$ )

合刚度小于某一值时,外载荷使得轮齿变形消除了轮齿啮合齿侧间隙的非线性影响,此时系统呈线性周期性,而当啮合刚度大于这一值时,外载荷使得轮齿的变形不足以消除齿侧间隙,相平面图8、10表明系统此时呈强非线性,此时啮合间隙对系统的冲击使得系统的振动加剧。

## 4 结论

(1) 本文提出的啮合冲击模型,考虑了发生啮合冲击时,除冲击齿对外其它正常啮合齿对对啮合冲击起到的缓冲作用,通过与文献[8]计算结果对比,验证了本文模型的有效性。

(2) 外载荷一定的情况下,对于考虑啮合间隙的非线性人字齿轮系统,本文通过实例计算表明:重合度小于某一临界值时,外载使啮合齿对产生的弹性变形能够消除齿侧啮合间隙对系统的非线性影响,此时重合度增大,振动减小,系统呈周期线性特性;当轮齿啮合重合度值达到4.07时,啮合刚度的增大使得外载不足以消除啮合间隙,此时振动加剧,系统呈强非线性特性。

(3) 在实际运用中,我们需要根据人字齿轮实际工况载荷选择合适的重合度,从而达到减振降噪的预期效果。

### 参考文献

[1] Wang J J, Li R F, Peng X H. Survey of nonlinear vibration of gear transmission systems [J]. American Society of Mechanical Engineers, 2003, 56(3): 309-329.  
 [2] Vaishya M, Singh R. Strategies for modeling friction in gear dynamics [J]. Journal of Mechanical Design, 2003, 125: 383-393.

[3] Sato K, Kamada O, Takatsu N, Jump phenomena in geared system to random excitation [J]. Bull. JSME, 1979, 28: 1271-1278.  
 [4] Song H, Rook T, Singh R. Construction of semianalytical solutions to spur gear dynamics given periodic mesh stiffness and sliding friction functions [J]. Journal of Mechanical Design, 2008, 130: 122601.1-122601.9.  
 [5] 王峰,方宗德,李声晋. 多载荷工况下人字齿轮传动系统振动特性分析[J]. 振动与冲击, 2013, 32(1): 49-52. WANG Feng, FANG Zong-de, LI Sheng-jin. Dynamic characteristics of a double helical gear under multi-load [J]. Journal of Vibration and Shock, 2013, 32(1): 49-52.  
 [6] Winter H, Gerber H, Muller R. Investigation on the excitation of vibration and noise at spur and helical gears [C]. ASME International Power Transmission & Gearing Conference, Chicago, 1989: 765-772.  
 [7] Seireg A, Houser D R. Evaluation of Dynamic Factors for Spur and Helical Gear [J]. ASME Journal of Engineering For Industry, 1970, 92(5): 504-515.  
 [8] 周长江,唐进元,钟志华. 齿轮传动的线外啮合与冲击摩擦 [J]. 机械工程学报, 2008, 44(3): 75-81. ZHOU Chang-jiang, TANG Jin-yuan, ZHONG Zhi-hua. Corner contact and impact friction of gear drive [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2008, 44(3): 75-81.  
 [9] 王成,方宗德,张墨林,等. 人字齿轮传动的动态特性分析 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2011, 43(7): 122-126. WANG Cheng, FANG Zong-de, ZHANG Mo-lin, et al. Analysis of dynamics behavior for double helical gears transmissions [J]. Journal of Harbin Institute of Technology, 2011, 43(7): 122-126.  
 [10] Kahraman A, Singh R. Interactions between time-varying mesh stiffness and clearance non-linearities in a geared system [J]. Journal of Sound and Vibration, 1991, 146(1): 135-156.  
 [11] 陈安华,罗善明,王文明,等. 齿轮系统动态传递误差和振动稳定性的数值研究 [J]. 机械工程学报, 2004, 40(4): 21-25. CHEN An-hua, LUO Shan-ming, WANG Wen-min, et al. Numerical investigation on dynamic transmission error and atability of a geared rotor-bearing system [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2004, 40(4): 21-25.  
 [12] Faggioni M, Samani F, Bertacchi G, et al. Dynamic optimization of spur gears [J]. Mechanism and Machine Theory, 2011, 46: 544-557.  
 [13] Julyan H E, Piro O. The dynamics of Runge-Kutta methods [J]. Int. J. Bifurcation and Chaos, 1992, 2: 427-449.  
 [14] 李润方,王建军. 齿轮系统动力学-振动、冲击、噪声 [M]. 北京:科学出版社, 1997: 352-400.