自动化专业 03 级《现代控制理论》试卷（A）

答　卷

一、（10 分，每小题 2 分）试判断以下结论的正确性，若结论是正确的，则在其左边的括号里打√，反之打×。

（ √ ）1. 由一个状态空间模型可以确定惟一一个传递函数。

（ × ）2. 若一个对象的连续时间状态空间模型是能控的，则其离散化状态空间模型也一定是能控的。

（ × ）3. 对一个给定的状态空间模型，若它是状态能控的，则也一定是输出能控的。

（ √ ）4. 对系统 $\dot{x} = Ax$，其 Lyapunov 意义下的渐近稳定性和矩阵 A 的特征值都具有负实部是一致的。

（ √ ）5. 根据线性二次型最优控制问题设计的最优控制系统一定是渐近稳定的。

二、（15 分）考虑由下式确定的系统：

$$G(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

试求其状态空间实现的能控标准型、能观标准型和对角线标准型，并画出能控标准型的状态变量图。

解　能控标准形为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = [3 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

能观测标准形为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 1 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = [0 \quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

对角标准形为

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}u$$

$$y = [2 \quad -1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

三、（10 分）在线性控制系统的分析和设计中，系统的状态转移矩阵起着很重要的作用。对系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x$$

求其状态转移矩阵。

解：**解法 1**。

容易得到系统状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值是 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$，它们是不相同的，故系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=-2$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$$

取变换矩阵

$$\boldsymbol{T}=[\boldsymbol{v}_1\ \ \boldsymbol{v}_2]^{-1}=\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix},\quad 则\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}$$

因此，

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{TAT}^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}$$

从而，

$$\begin{aligned}e^{\boldsymbol{A}t}&=\boldsymbol{T}^{-1}\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}\boldsymbol{T}\\&=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t}&0\\0&e^{-2t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-1&-1\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&e^{-t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}+2e^{-2t}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

解法 2。拉普拉斯方法

由于

$$\begin{aligned}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}&=\begin{bmatrix}s&-1\\2&s+3\end{bmatrix}^{-1}\\&=\frac{1}{\det(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})}\operatorname{adj}(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\\&=\frac{1}{s(s+3)+2}\begin{bmatrix}s+3&1\\-2&s\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)}&\dfrac{1}{(s+1)(s+2)}\\[2ex]\dfrac{-2}{(s+1)(s+2)}&\dfrac{s}{(s+1)(s+2)}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}&\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2}\\[2ex]\dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}&\dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}&=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\\&=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t}&e^{-t}-e^{-2t}\\-2e^{-t}+2e^{-2t}&-e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

解法 3。凯莱-哈密尔顿方法

将状态转移矩阵写成

$$e^{At}=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A}$$

系统矩阵的特征值是 -1 和 -2，故

$$e^{-t}=\alpha_0(t)-\alpha_1(t)$$
$$e^{-2t}=\alpha_0(t)-2\alpha_1(t)$$

解以上线性方程组，可得

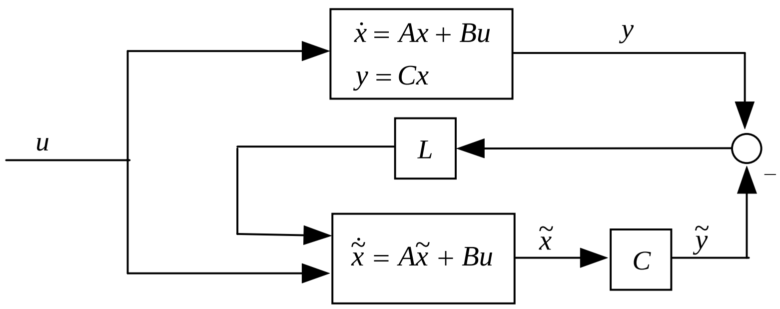
$$\alpha_0(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$
$$\alpha_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}$$

因此，

$$\begin{aligned}e^{At}&=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A}\\&=(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})e^{-t}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})e^{-2t}\\&=\begin{bmatrix}2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t}\\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

四、（15 分）已知对象的状态空间模型 $\dot{x}=Ax+Bu,\ y=Cx$ 是完全能观的，请画出观测器设计的框图，并据此给出观测器方程，观测器设计方法。

解　**观测器设计的框图：**



观测器方程：

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}&=\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Bu}+\boldsymbol{L}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{C}\tilde{\boldsymbol{x}})\\&=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})\tilde{\boldsymbol{x}}+\boldsymbol{Bu}+\boldsymbol{Ly}\end{aligned}$$

其中：$\tilde{\boldsymbol{x}}$ 是观测器的 n 维状态，$\boldsymbol{L}$ 是一个 $n\times p$ 维的待定观测器增益矩阵。

观测器设计方法：

由于

$$\begin{aligned}\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})]&=\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{LC})^{\mathrm{T}}]\\&=\det[\lambda\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}})]\end{aligned}$$

因此，可以利用极点配置的方法来确定矩阵 L，使得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}L^{\mathrm{T}}$ 具有给定的观测器极点。具体的方法有：直接法、变换法、爱克曼公式。

五、（15 分）对于一个连续时间线性定常系统，试叙述 Lyapunov 稳定性定理，并举一个二阶系统例子说明该定理的应用。

解　连续时间线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性定理：

线性时不变系统 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在平衡点 $\boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{0}$ 处渐近稳定的充分必要条件是：对任意给定的对称正定矩阵 Q，李雅普诺夫矩阵方程 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q}$ 有惟一的对称正定解 P。

在具体问题分析中，可以选取 $Q = I$。

考虑二阶线性时不变系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

原点是系统的惟一平衡状态。求解以下的李雅普诺夫矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{I}$$

其中的未知对称矩阵

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的表示式代入李雅普诺夫方程中，可得

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

进一步可得联立方程组

$$-2p_{12} = -1$$

$$p_{11} - p_{12} - p_{22} = 0$$

$$2p_{12} - 2p_{22} = -1$$

从上式解出 p_{11}、 p_{12} 和 p_{22}，从而可得矩阵 $\boldsymbol{P}$：

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

根据塞尔维斯特方法，可得

$$\Delta_1 = \frac{3}{2} > 0, \qquad \Delta_2 = \det\left(\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \right) > 0$$

故矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正定的。因此，系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

六、（10 分）已知被控系统的传递函数是

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$

试设计一个状态反馈控制律，使得闭环系统的极点为 $-1 \pm \mathrm{j}$。

解　系统的状态空间模型是

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [10 \quad 0]x$$

将控制器 $u = -[k_0 \quad k_1]\boldsymbol{x}$ 代入到所考虑系统的状态方程中，得到闭环系统状态方程

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2-k_0 & -3-k_1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}$$

该闭环系统的特征方程是

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c) = \lambda^2 + (3+k_1)\lambda + 2 + k_0$$

期望的闭环特征方程是

$$(\lambda+1-j)(\lambda+1+j)=\lambda^2+2\lambda+2$$

通过

$$\lambda^2+(3+k_1)\lambda+2+k_0=\lambda^2+2\lambda+2$$

可得

$$3+k_1=2$$
$$2+k_0=2$$

从上式可解出

$$k_1=-1$$
$$k_0=0$$

因此，要设计的极点配置状态反馈控制器是

$$u=[0\quad 1]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$$

七、（10 分）证明：等价的状态空间模型具有相同的能控性。

证明　对状态空间模型

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}$$
$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Cx}+\boldsymbol{Du}$$

它的等价状态空间模型具有形式

$$\dot{\overline{\boldsymbol{x}}}=\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y}=\overline{\boldsymbol{C}}\overline{\boldsymbol{x}}+\overline{\boldsymbol{D}}\boldsymbol{u}$$

其中：

$$\overline{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{TAT}^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{TB},\quad \overline{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{CT}^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}$$

$\boldsymbol{T}$ 是任意的非奇异变换矩阵。利用以上的关系式，等价状态空间模型的能控性矩阵是

$$\begin{aligned}\Gamma_c[\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}}]&=[\overline{\boldsymbol{B}}\quad \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}\quad \cdots\quad \overline{\boldsymbol{A}}^{n-1}\overline{\boldsymbol{B}}]\\&=[\boldsymbol{TB}\quad \boldsymbol{TAT}^{-1}\boldsymbol{TB}\quad \cdots\quad (\boldsymbol{TAT}^{-1})^{n-1}\boldsymbol{TB}]\\&=\boldsymbol{T}[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}\quad \cdots\quad \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}]\\&=\boldsymbol{T}\Gamma_c[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]\end{aligned}$$

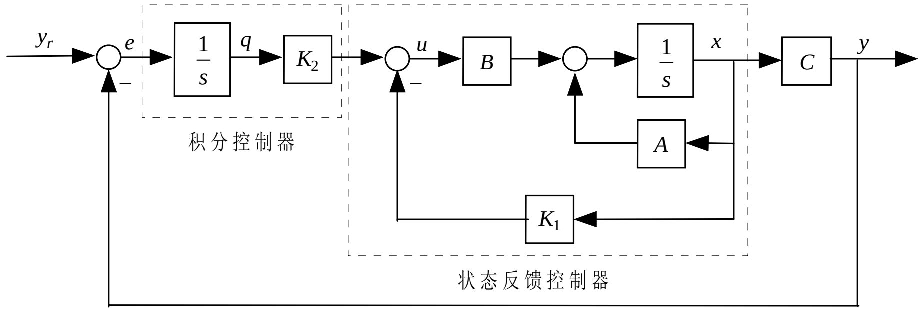
由于矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是非奇异的，故矩阵 $\Gamma_c[\overline{\boldsymbol{A}},\overline{\boldsymbol{B}}]$ 和 $\Gamma_c[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 具有相同的秩，从而等价的状态空间模型具有相同的能控性。

八、（15 分）在极点配置是控制系统设计中的一种有效方法，请问这种方法能改善控制系统的哪些性能？对系统性能是否也可能产生不利影响？如何解决？

解　极点配置可以改善系统的动态性能，如调节时间、峰值时间、振荡幅度。

极点配置也有一些负面的影响，特别的，可能使得一个开环无静差的系统通过极点配置后，其闭环系统产生稳态误差，从而使得系统的稳态性能变差。

改善的方法：针对阶跃输入的系统，通过引进一个积分器来消除跟踪误差，其结构图是



构建增广系统，通过极点配置方法来设计增广系统的状态反馈控制器，从而使得闭环系统不仅保持期望的动态性能，而且避免了稳态误差的出现。