自动化专业 04 级《现代控制理论》试卷（A）

班级______________ 姓名______________ 学号______________ 成绩_________

一、（10 分，每小题 2 分）试判断以下结论的正确性，若结论是正确的，则在其左边的括号里打√，反之打×。

（ × ）1. 对一个系统，只能选取一组状态变量；

（ √ ）2. 由状态转移矩阵可以决定系统状态方程的状态矩阵，进而决定系统的动态特性；

（ × ）3. 若传递函数 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 存在零极相消，则对应的状态空间模型描述的系统是不能控不能观的；

（ × ）4. 若一个系统是李雅普诺夫意义下稳定的，则该系统在任意平衡状态处都是稳定的；

（ √ ）5. 状态反馈不改变系统的能控性。

二、（20 分）已知系统的传递函数为

$$G(s)=\frac{2s+5}{(s+3)(s+5)}$$

（1） 采用串联分解方式，给出其状态空间模型，并画出对应的状态变量图；

（2） 采用并联分解方式，给出其状态空间模型，并画出对应的状态变量图。

答:（1）将 $G(s)$ 写成以下形式:

$$G(s)=\frac{1}{s+3}\cdot\frac{2s+5}{s+5}$$

这相当于两个环节 $\frac{1}{s+3}$ 和 $\frac{2s+5}{s+5}$ 的串连，它们的状态空间模型分别为:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+u\\ y_1=x_1\end{cases} \quad 和 \quad \begin{cases}\dot{x}_2=-5x_2+u_1\\ y=-5x_2+2u_1\end{cases}$$

由于 $y_1=u_1$，故可得给定传递函数的状态空间实现是:

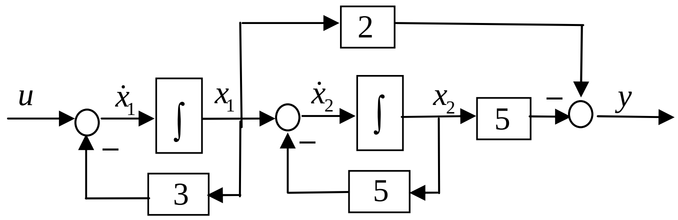
$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+u\\ \dot{x}_2=x_1-5x_2\end{cases}$$
$$y=2x_1-5x_2$$

将其写成矩阵向量的形式，可得:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

对应的状态变量图为:



串连分解所得状态空间实现的状态变量图

（2）将$G(s)$写成以下形式:

$$G(s)=\frac{-0.5}{s+3}+\frac{2.5}{s+5}$$

它可以看成是两个环节$-\dfrac{0.5}{s+3}$和$\dfrac{2.5}{s+5}$的并联，每一个环节的状态空间模型分别为:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1-0.5u\\ y_1=x_1\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\dot{x}_2=-5x_2+2.5u\\ y_2=x_2\end{cases}$$

由此可得原传递函数的状态空间实现:

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1-0.5u\\ \dot{x}_2=-5x_2+2.5u\end{cases}$$

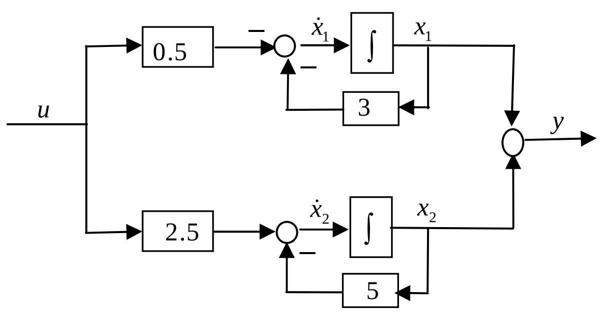
$$y=y_1+y_2=x_1+x_2$$

进一步写成状态向量的形式，可得:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.5\\ 2.5\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

对应的状态变量图为:



并连分解所得状态空间实现的状态变量图

三、（20 分）试介绍求解线性定常系统状态转移矩阵的方法，并以一种方法和一个数值例子为例，求解线性定常系统的状态转移矩阵；

答：求解状态转移矩阵的方法有：

方法一 直接计算法：

根据状态转移矩阵的定义

$$\Phi(t)=e^{At}=I+At+\frac{1}{2!}A^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^nt^n+\cdots$$

来直接计算，只适合一些特殊矩阵 A。

方法二 通过线性变换计算状态转移矩阵，设法通过线性变换，将矩阵 A 变换成对角矩阵或约当矩阵，进而利用方法得到要求的状态转移矩阵。

方法三 拉普拉斯变换法：$e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$。

方法四 凯莱-哈密尔顿方法

根据凯莱-哈密尔顿定理和，可导出 e^{At} 具有以下形式：

$$e^{At}=\alpha_0(t)I+\alpha_1(t)A+\alpha_2(t)A^2+\cdots+\alpha_{n-1}(t)A^{n-1}$$

其中的 $\alpha_0(t)$，$\alpha_1(t)$，$\cdots$，$\alpha_{n-1}(t)$ 均是时间 t 的标量函数。根据矩阵 A 有 n 个不同特征值和有重特征值的情况，可以分别确定这些系数。

举例：利用拉普拉斯变换法计算由状态矩阵

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

所确定的自治系统的状态转移矩阵。

由于

$$(sI-A)^{-1}=\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det(sI-A)}adj(sI-A)$$

$$=\frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+1}\end{bmatrix}$$

故

$$\Phi(t)=e^{At}=L^{-1}[(sI-A)^{-1}]$$

$$=\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{-t}\end{bmatrix}$$

四、（10 分）解释状态能观性的含义，给出能观性的判别条件，并举例说明之。

答：**状态能观性的含义**：状态能观性反映了通过系统的输出对系统状态的识别能力，对一个零输入的系统，若它是能观的，则可以通过一段时间内的测量输出来估计之前某个时刻的系统状态。

状态能观的判别方法:

对于n阶系统

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx$$

1．若其能观性矩阵$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$列满秩，则系统完全能观。

2．若系统的能观格拉姆矩阵

$$w_o(0,T) = \int_0^T e^{A^T t} C^T C e^{At} dt$$

非奇异，则系统完全能观。

举例:

对于系统

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$
$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x$$

其能观性矩阵

$$\Gamma_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

的秩为 2，即是列满秩的，故系统是能观的。

五、（20 分）对一个由状态空间模型描述的系统，试回答：

（1） 能够通过状态反馈实现任意极点配置的条件是什么？

（2） 简单叙述两种极点配置状态反馈控制器的设计方法;

（3） 试通过数值例子说明极点配置状态反馈控制器的设计。

答:（1）能够通过状态反馈实现任意极点配置的条件：系统是能控的。

（2）极点配置状态反馈控制器的设计方法有直接法、变换法、爱克曼公式法。

① 直接法

验证系统的能控性，若系统能控，则进行以下设计。

设状态反馈控制器$u = -Kx$，相应的闭环矩阵是$A - BK$，闭环系统的特征多项式为$\det[\lambda I - (A - BK)]$。

由期望极点$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$可得期望的闭环特征多项式

$$(\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + b_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + b_0$$

通过让以上两个特征多项式相等，可以列出一组以控制器参数为变量的线性方程组，由这组线性方程可以求出极点配置状态反馈的增益矩阵K。

② 变换法

验证系统的能控性，若系统能控，则进行以下设计。

将状态空间模型转化为能控标准型，相应的状态变换矩阵$T=\Gamma_C[\tilde{A},\tilde{B}](\Gamma_C[A,B])^{-1}$，设期望的特征多项式为

$$\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+b_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+b_0$$

而能控标准型的特征多项式为

$$\lambda^n+a_{n-1}\lambda^{n-1}+a_{n-2}\lambda^{n-2}+\cdots+a_0$$

所以，状态反馈控制器增益矩阵是

$$K=[b_0-a_0\ b_1-a_1\cdots b_{n-1}-a_{n-1}]T$$

（3） 采用直接法来说明极点配置状态反馈控制器的设计

考虑以下系统

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2 & -3\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$

设计一个状态反馈控制器，使闭环系统极点为-2和-3。

该状态空间模型的能控性矩阵为

$$\Gamma_C[A,B]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -3\end{bmatrix}$$

该能控性矩阵是行满秩的，所以系统能控。

设状态反馈控制器$u=-Kx=-\begin{bmatrix}k_0 & k_1\end{bmatrix}x$，将其代入系统状态方程中，得到闭环系统状态方程

$$\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 2-k_0 & -3-k_1\end{bmatrix}x$$

其特征多项式为

$$\det[\lambda I-(A-BK)]=\lambda^2+(3+k_1)\lambda-2+k_0$$

由期望的闭环极点-2和-3，可得闭环特征多项式

$$(\lambda+2)(\lambda+3)=\lambda^2+5\lambda+6$$

通过

$$\lambda^2+(3+k_1)\lambda-2+k_0=\lambda^2+5\lambda+6$$

可得

$$3+k_1=5$$
$$-2+k_0=6$$

由此方程组得到

$$k_0=8$$
$$k_1=2$$

因此，要设计的极点配置状态反馈控制器$u=-Kx=-\begin{bmatrix}8 & 2\end{bmatrix}x$。

六、（20 分）给定系统状态空间模型$\dot{x}=Ax$，

（1）　试问如何判断该系统在李雅普诺夫意义下的稳定性？

（2）　试通过一个例子说明您给出的方法；

（3）　给出李雅普诺夫稳定性定理的物理解释。

答:

（1）给定的系统状态空间模型 $\dot{x} = Ax$ 是一个线性时不变系统，根据线性时不变系统稳定性的李雅普诺夫定理，该系统渐近稳定的**充分必要**条件是：对任意给定的对称正定矩阵 Q，矩阵方程 $A^T P + PA = -Q$ 有一个对称正定解矩阵 P。因此，通过求解矩阵方程 $A^T P + PA = -Q$，若能得到一个对称正定解矩阵 P，则系统是稳定的；若得不到对称正定解矩阵 P，则系统是不稳定的。一般的，可以选取 $Q = I$。

（2）举例：考虑由以下状态方程描述的二阶线性时不变系统：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

原点是该系统的惟一平衡状态。求解李雅普诺夫方程：，$A^T P + PA = -Q$，其中的未知矩阵

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}$$

将矩阵 A 和 P 的表示式代入李雅普诺夫方程中，可得

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -Q$$

为了计算简单，选取 $Q = 2I$，则从以上矩阵方程可得：

$$-2p_{11} = -2$$
$$2p_{12} = 0$$
$$-2p_{22} = -2$$

求解该线性方程组，可得：$p_{11} = p_{22} = 1$，$p_{12} = 0$，即 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，判断可得矩阵 P 是正定的。

因此该系统是渐近稳定的。

（3）李雅普诺夫稳定性定理的物理意义：针对一个动态系统和确定的平衡状态，通过分析该系统运动过程中能量的变化来判断系统的稳定性。具体地说，就是构造一个反映系统运动过程中能量变化的虚拟能量函数，沿系统的运动轨迹，通过该能量函数关于时间导数的取值来判断系统能量在运动过程中是否减少，若该导数值都是小于零的，则表明系统能量随着时间的增长是减少的，直至消耗殆尽，表明在系统运动上，就是系统运动逐步趋向平缓，直至在平衡状态处稳定下来，这就是李雅普诺夫意义下的稳定性。