自动化专业 2005 级《现代控制理论》考试答案及评分标准

一、（10 分，每小题 2 分）试判断以下结论的正确性，若结论是正确的，则在其左边的括号里打√，反之打×。

（ × ）1. 具有对角型状态矩阵的状态空间模型描述的系统可以看成是由多个一阶环节串联组成的系统；

（ × ）2. 要使得观测器估计的状态尽可能快地逼近系统的实际状态，观测器的极点应该比系统极点快 10 倍以上；

（ × ）3. 若传递函数 $G(s)=C(sI-A)^{-1}B$ 存在零极相消，则对应状态空间模型描述的系统是不能控的；

（ √ ）4. 若线性系统是李雅普诺夫意义下稳定的，则它是大范围渐近稳定的；

（ √ ）5. 若线性二次型最优控制问题有解，则可以得到一个稳定化状态反馈控制器。

二、（20 分）（1）如何由一个传递函数来给出其对应的状态空间模型，试简述其解决思路？

（2）给出一个二阶传递函数 $G(s)=\dfrac{2s+5}{(s+3)(s+5)}$ 的两种状态空间实现。

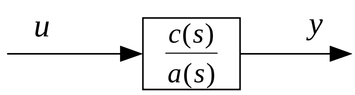
解：（1）单输入单输出线性时不变系统传递函数的一般形式是

$$G(s)=\frac{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}\cdots+b_1 s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}$$

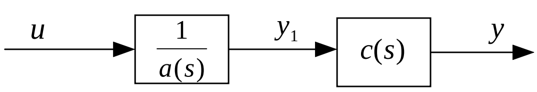
若 $b_n\neq 0$，则通过长除法，传递函数 $G(s)$ 总可以转化成

$$G(s)=\frac{c_{n-1}s^{n-1}+\cdots+c_1 s+c_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0}+d=\frac{c(s)}{a(s)}+d$$

将



分解成等效的两个特殊环节的串联：



可得一个状态空间实现

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_0&-a_1&-a_2&\cdots&-a_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}+\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}u\\ y=\begin{bmatrix}c_0&c_1&\cdots&c_{n-2}&c_{n-1}\end{bmatrix}\mathbf{x}+du\end{cases}$$

串联法　其思想是将一个 n 阶的传递函数分解成若干低阶传递函数的乘积，然后写出这些低阶传递函数的状态空间实现，最后利用串联关系，写出原来系统的状态空间模型。

并联法　其的思路是把一个复杂的传递函数分解成若干低阶传递函数的和，然后对每个低阶传递函数确定其状态空间实现，最后根据并联关系给出原来传递函数的状态空间实现。

（2）方法一：将$G(s)$重新写成下述形式：

$$G(s)=\frac{1}{s+3}\cdot\frac{2s+5}{s+5}$$

每一个环节的状态空间模型分别为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+u\\ y_1=x_1\end{cases}\quad 和\quad \begin{cases}\dot{x}_2=-5x_2+u_1\\ y=-5x_2+2u_1\end{cases}$$

又因为$y_1=u_1$，　所以

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1+u\\ \dot{x}_2=x_1-5x_2\end{cases}$$

$$y=2x_1-5x_2$$

因此，若采用串联分解方式，则系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 1 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}2 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

方法二：将$G(s)$重新写成下述形式：

$$G(s)=\frac{-0.5}{s+3}+\frac{2.5}{s+5}$$

每一个环节的状态空间模型分别为：

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1-0.5u\\ y_1=x_1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{x}_2=-5x_2+2.5u\\ y_2=x_2\end{cases}$$

又由于

$$\begin{cases}\dot{x}_1=-3x_1-0.5u\\ \dot{x}_2=-5x_2+2.5u\end{cases}$$

$$y=y_1+y_2=x_1+x_2$$

因此，若采用并联分解方式，则系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-0.5\\ 2.5\end{bmatrix}u$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

方法三：将$G(s)$重新写成下述形式：

$$G(s)=\frac{2s+5}{s^2+8s+15}$$

则系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -15 & -8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}5 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$
。

评分标准：问题（1）10 分，由一个传递函数转换为状态空间模型思路清晰，方法正确 10 分；问题（2）10 分，两种状态空间实现方法各 5 分。

三、（20 分）（1）试问状态转移矩阵的意义是什么？

（2）状态转移矩阵是否包含了对应自治系统的全部信息？

（3）介绍两种求解线性定常系统状态转移矩阵的方法；

（4）计算系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -2 & -3\end{bmatrix}x$ 的状态转移矩阵。

解：（1）状态转移矩阵的意义是决定状态沿着轨线从初始状态转移到下一个状态的规律，即初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 在状态转移矩阵 $\Phi(t,t_0)$ 的作用下，t_0 时刻的初始状态 $\boldsymbol{x}_0$ 经过时间 $t-t_0$ 后转移到了 t 时刻的状态 $\boldsymbol{x}(t)$。

（2）状态转移矩阵包含了对应自治系统的全部信息；对于自治系统 $\dot{x}=Ax$，$\dot{\Phi}(0)=A$。

（3）拉普拉斯变换法、凯莱-哈密尔顿法、线性变换法、直接计算法。

方法一　直接计算法

根据定义，

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}t+\frac{1}{2!}\boldsymbol{A}^2t^2+\cdots+\frac{1}{n!}\boldsymbol{A}^nt^n+\cdots$$

我们已经知道上式中的矩阵级数总是收敛的，故可以通过计算该矩阵级数的和来得到所要求的状态转移矩阵。

方法二 线性变换法 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是一个可对角化的矩阵，即存在一个非奇异矩阵 $\boldsymbol{T}$，使得

$$\boldsymbol{T}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}\lambda_1 & & & \boldsymbol{0}\\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & & \lambda_n\end{bmatrix}$$

则

$$e^{\mathbf{A}t}=T^{-1}\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t} & & & 0\\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & e^{\lambda_n t}\end{bmatrix}T\ 。$$

方法三 拉普拉斯变换法

$$e^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]\ 。$$

方法四 凯莱-哈密尔顿法

解一个线性方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \cdots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \cdots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0(t) \\ \alpha_1(t) \\ \vdots \\ \alpha_{n-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

其系数矩阵的行列式是著名的范德蒙行列式，当 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 互不相同时，行列式的值不为零，从而从方程组可得惟一解 $\alpha_0(t), \alpha_1(t), \cdots, \alpha_{n-1}(t)$ 。由

$$e^{At} = \alpha_0(t)\boldsymbol{I} + \alpha_1(t)\boldsymbol{A} + \alpha_2(t)\boldsymbol{A}^2 + \cdots + \alpha_{n-1}(t)\boldsymbol{A}^{n-1}$$

可得状态转移矩阵。

（4）方法一：线性变换法，

容易得到系统状态矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的两个特征值是 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ ，它们是不相同的，故系统的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化。矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$ 的特征向量是

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

取变换矩阵

$$\boldsymbol{T} = [\boldsymbol{v}_1 \ \ \boldsymbol{v}_2]^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \text{则}\boldsymbol{T}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

因此，

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{TAT}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

从而，

$$\begin{aligned} e^{At} &= \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

方法二：拉普拉斯变换法，由于

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \frac{1}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \operatorname{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \\ &= \frac{1}{s(s+3)+2} \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{s+3}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \dfrac{-2}{(s+1)(s+2)} & \dfrac{s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{2}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} & \dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{s+2} \\ \dfrac{-2}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} & \dfrac{-1}{s+1}+\dfrac{2}{s+2} \end{bmatrix}$$

故

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=e^{\boldsymbol{A}t}=L^{-1}[(s\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{-1}]$$
$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

方法二：凯莱-哈密尔顿法

将状态转移矩阵写成

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A}$$

系统矩阵的特征值是 -1 和 -2，故

$$e^{-t}=\alpha_0(t)-\alpha_1(t)$$
$$e^{-2t}=\alpha_0(t)-2\alpha_1(t)$$

解以上线性方程组，可得

$$\alpha_0(t)=2e^{-t}-e^{-2t}$$
$$\alpha_1(t)=e^{-t}-e^{-2t}$$

因此，

$$e^{\boldsymbol{A}t}=\alpha_0(t)\boldsymbol{I}+\alpha_1(t)\boldsymbol{A}$$
$$=(2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})e^{-t}-(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})e^{-2t}$$
$$=\begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2e^{-t}+2e^{-2t} & -e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

评分标准：每个问题 5 分。问题（1）状态转移矩阵的意义叙述完整 5 分；问题（2）判断正确 5 分；问题（3）给出两种求解线性定常系统状态转移矩阵的方法 5 分；问题（3）方法和结果正确 5 分。

四、(20 分)（1）解释系统状态能控性的含义；

（2）给出能控性的判别条件，并通过一个例子来说明该判别条件的应用；

（3）若一个系统是能控的，则可以在任意短时间内将初始状态转移到任意指定的状态，这一控制效果在实际中能实现吗？为什么？

解：（1）对一个能控的状态，总存在一个控制律，使得在该控制律作用下，系统从此状态出发，经有限时间后转移到零状态。

（2）通过检验能控性判别矩阵 $[B\ AB \cdots A^{n-1}B]$ 是否行满秩来判别线性时不变系统的能控性。若能控性判别矩阵是行满秩的，则系统是能控的。

试判别由以下状态方程描述的系统的能控性：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}u$$

系统的能控性判别矩阵

$$\Gamma_c[\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{B}]=[\boldsymbol{B}\quad \boldsymbol{AB}]=\left[\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

由于

$$\det(\Gamma_c[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}])=\det\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\right)=0$$

即矩阵 $\Gamma_c[\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}]$ 不是满秩的，该系统不是状态完全能控的。

（3）若一个系统是能控的，则可以在任意短时间内将初始状态转移到任意指定的状态，这一控制效果在实际中难以实现，T 越小，则控制律的参数越大，从而导致控制信号的幅值很大，这要求执行器的调节幅度要很大，从而使得在有限时间内完成这一控制作用所需要消耗的能量也很大。由于在实际过程中，执行器的调节幅度总是有限的（如阀门的开度等），能量供应也是有限制的。

评分标准：问题（1）系统状态能控性的含义叙述完整 6 分；问题(2) 能控性的判别条件 4 分，举例 3 分；问题（3）判断正确 3 分，原因分析正确 4 分。

五、（20 分）（1）能够通过状态反馈实现任意极点配置的条件是什么？

（2）已知被控对象的状态空间模型为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -3 & -4\end{bmatrix}\boldsymbol{x}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y=\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}\boldsymbol{x}$$

设计状态反馈控制器，使得闭环极点为 -4 和 -5 。

（3）极点配置是否会影响系统的稳态性能？若会的话，如何克服？试简单叙述之？

解：（1）能够通过状态反馈实现任意极点配置的条件是系统状态能控。

（2） 由于给出的状态空间模型是能控标准形，因此，系统是能控的。根据所期望的闭环极点是 -4 和 -5 ，可得期望的闭环特征多项式是

$$\Delta^*(\lambda)=\lambda^2+9\lambda+20$$

因此，所要设计的状态反馈增益矩阵是

$$\boldsymbol{K}=[20-3\quad 9-4]=[17\quad 5]$$

相应的闭环系统状态矩阵是

$$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BK}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -20 & -9\end{bmatrix}$$

闭环传递函数是

$$G(s)=\frac{2s+3}{s^2+9s+20}$$

评分标准：问题（1）给出通过状态反馈实现任意极点配置的条件 6 分；问题（2）状态反馈控制器

设计方法正确 7 分；问题（3）判断正确 3 分，叙述克服方法 4 分。

六、（10 分）（1） 叙述线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性定理；

（2） 利用李雅普诺夫稳定性定理判断系统 $\dot{x}=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}x$ 的稳定性。

解：（1）连续时间线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性定理；线性时不变系统 $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 处渐近稳定的充分必要条件是：对任意给定的对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，存在一个对称正定矩阵 $\boldsymbol{P}$，使得矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{Q}$$

成立。

离散时间线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性定理；线性时不变系统 $\boldsymbol{x}(k+1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k)$ 在平衡点 $\boldsymbol{x}_e=\boldsymbol{0}$ 处渐近稳定的充分必要条件是：对任意给定的对称正定矩阵 $\boldsymbol{Q}$，矩阵方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{P}=-\boldsymbol{Q}$$

存在对称正定解矩阵 $\boldsymbol{P}$。

（2）原点是系统的惟一平衡状态。求解以下的李雅普诺夫方程

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}+\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{I}$$

其中的未知对称矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}$$

将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 的表示式代入李雅普诺夫方程中，可得

$$\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

进一步将以上矩阵方程展开，可得联立方程组

$$\begin{aligned}-2p_{11}&=-1\\ p_{11}-2p_{12}&=0\\ 2p_{12}-2p_{22}&=-1\end{aligned}$$

应用线性方程组的求解方法，可从上式解出 p_{11}、p_{12} 和 p_{22}，从而可得矩阵 $\boldsymbol{P}$：

$$\begin{bmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{12} & p_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}$$

根据矩阵正定性判别的塞尔维斯特方法，可得

$$\Delta_1=\frac{1}{2}>0,\qquad \Delta_2=\det\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{bmatrix}\right)>0$$

故矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是正定的。因此，系统在原点处的平衡状态是大范围渐近稳定的。

评分标准：问题（1）完整叙述线性时不变系统的李雅普诺夫稳定性定理 5 分；问题（2）稳定性判断方法和结果正确 5 分。