

# 自动化专业 06 级《现代控制理论》试卷答案

一、(10 分, 每小题 1 分) 试判断以下结论的正确性, 若结论是正确的, 则在其左边的括号里打√, 反之打×。

- (√) 1. 相比于经典控制理论, 现代控制理论的一个显著优点是可以用时域法直接进行系统的分析和设计。
- (√) 2. 传递函数的状态空间实现不唯一的一个主要原因是状态变量选取不唯一。
- (×) 3. 状态变量是用于完全描述系统动态行为的一组变量, 因此都是具有物理意义。
- (×) 4. 输出变量是状态变量的部分信息, 因此一个系统状态能控意味着系统输出能控。
- (√) 5. 等价的状态空间模型具有相同的传递函数。
- (×) 6. 互为对偶的状态空间模型具有相同的能控性。
- (×) 7. 一个系统的平衡状态可能有多个, 因此系统的李雅普诺夫稳定性与系统受扰前所处的平衡位置无关。
- (√) 8. 若一线性定常系统的平衡状态是渐近稳定的, 则从系统的任意一个状态出发的状态轨迹随着时间的推移都将收敛到该平衡状态。
- (×) 9. 反馈控制可改变系统的稳定性、动态性能, 但不改变系统的能控性和能观性。
- (×) 10. 如果一个系统的李雅普诺夫函数确实不存在, 那么我们就可以断定该系统是不稳定的。

二、(15 分) 建立一个合理的系统模型是进行系统分析和设计的基础。已知一单输入单输出线性定常系统的微分方程为:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = \ddot{u}(t) + 6\dot{u}(t) + 8u(t)$$

- (1) 采用串联分解方式, 给出其状态空间模型, 并画出对应的状态变量图; (7 分+3 分)
- (2) 归纳总结上述的实现过程, 试简述由一个系统的  $n$  阶微分方程建立系统状态空间模型的思路。(5 分)

解: (1) 方法一:

由微分方程可得

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = 1 + \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 3}$$

令

$$G_1(s) = \frac{2s + 5}{s^2 + 4s + 3} = \frac{1}{s + 1} \cdot \frac{2s + 5}{s + 3}$$

每一个环节的状态空间模型分别为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ y_1 = x_1 \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -3x_2 + u_1 \\ y = -x_2 + 2u_1 \end{cases}$$

又因为  $y_1 = u_1$ , 所以

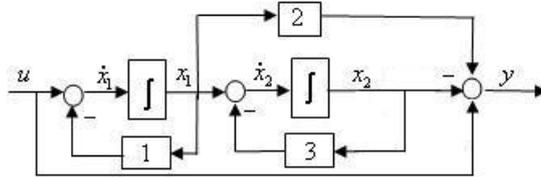
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 \end{cases}, \quad y = 2x_1 - x_2$$

因此, 采用串联分解方式可得系统的状态空间模型为:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u$$

对应的状态变量图为：



### 方法二：

由微分方程可得

$$G(s) = \frac{s^2 + 6s + 8}{s^2 + 4s + 3} = \frac{s + 4}{s + 1} \cdot \frac{s + 2}{s + 3}$$

每一个环节的状态空间模型分别为：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ y_1 = 3x_1 + u \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{x}_2 = -3x_2 + u_1 \\ y = -x_2 + u_1 \end{cases}$$

又因为  $y_1 = u_1$ ，所以

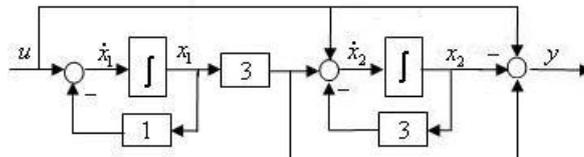
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + u \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 3x_2 + u \end{cases}, \quad y = 3x_1 - x_2 + u$$

因此，采用串联分解方式可得系统的状态空间模型为：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + u$$

对应的状态变量图为



(2) 单输入单输出线性时不变系统传递函数的一般形式是

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

若  $b_n \neq 0$ ，则通过长除法，传递函数  $G(s)$  总可以转化成

$$G(s) = \frac{c_{n-1} s^{n-1} + \dots + c_1 s + c_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} + d = \frac{c(s)}{a(s)} + d$$

将传递函数  $c(s)/a(s)$  分解成若干低阶 (1 阶) 传递函数的乘积，然后根据能控标准型或能观标准型写出这些低阶传递函数的状态空间实现，最后利用串联关系，写出原来系统的状态空间模型。

三、(10分)系统的状态转移矩阵不仅包含了对应自治系统的全部信息,而且在线性控制系统的分析、设计中具有重要的作用。已知系统的状态转移矩阵如下:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(1) 试给出对应自治系统的全部信息; (5分)

(2) 试列举状态转移矩阵的基本性质,并简述其意义。(5分)

解: (1) 一个自治系统的全部信息由其状态矩阵  $A$  描述,可由状态转移矩阵  $\Phi(t)$  确定一线性定常系统的状态矩阵  $A$ 。

对任意的  $t$ , 满足  $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ , 而

$$\dot{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 2e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 2e^{-t} - 4e^{-2t} & e^{-t} - 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

对等式  $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$  取  $t=0$ , 并利用  $\Phi(0) = I$ , 则可得状态矩阵  $A$

$$A = A\Phi(0) = \dot{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

(2) 状态转移矩阵的基本性质:

◇  $\Phi(0) = I$ ,  $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$ , 包含对应系统自由运动的全部信息;

◇ 对任意的  $t$  和  $s$ , 满足  $\Phi(t+s) = \Phi(t) \cdot \Phi(s)$ , 即利用状态转移矩阵可以从任意指定的初始时刻  $t_0$  的状态  $x(t_0)$  出发, 以确定任意时刻  $t$  处的状态  $x(t)$ ;

◇ 对任意的  $t$ , 满足  $\Phi(t)^{-1} = \Phi(-t)$ , 即可以由当前的状态信息确定以前的状态信息。

四、(20分)实际被控系统通常是连续时间系统,但计算机控制却是一种基于离散模型的控制,因此一种方法是对连续时间系统做离散化。那么请问

(1) 一个能控能观的连续时间系统,其离散化后的状态空间模型是否仍然保持能控能观性? (2分)

(2) 以如下线性定常系统为例:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \quad y = [0 \quad 1]x$$

说明你的理由以支持你的观点。(10分)

(3) 令采样周期  $T = \pi/2$ , 初始状态为  $\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 求  $u(k)$ , 使得(2)中离散化状态空间模型在第2个采样时刻转移到原点。(8分)

解: (1) 不一定。

(2) 连续系统的状态空间模型是能控标准形,故系统是能控的。将状态方程离散化,设采样周期为  $T$ , 系统的状态转移矩阵为

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= L^{-1} \left[ (sI - A)^{-1} \right] = L^{-1} \left( \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \right) \\ &= L^{-1} \left( \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & \frac{1}{s^2+1} \\ \frac{-1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix} \end{aligned}$$

根据  $G(T) = e^{AT} = \Phi(T)$ ,  $H(T) = \int_0^T e^{A\sigma} B d\sigma$  可得到离散化状态方程, 此时

$$H(T) = A^{-1} [G(T) - I] B = \begin{bmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{bmatrix}$$

因此, 离散化状态空间模型为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) \\ &= \begin{bmatrix} \cos T & \sin T \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} \sin T \\ \cos T - 1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \quad 1] x(k) \end{aligned}$$

则离散化系统的能控性矩阵为

$$\begin{aligned} \Gamma_c [G, H] &= \begin{bmatrix} \sin T & 2 \sin T \cos T - \sin T \\ \cos T - 1 & -\sin^2 T + \cos^2 T - \cos T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sin T & \sin 2T - \sin T \\ \cos T - 1 & \cos 2T - \cos T \end{bmatrix} \\ \det(\Gamma_c [G, H]) &= \sin 2T - 2 \sin T \end{aligned}$$

所以, 当  $\sin 2T = 2 \sin T$ , 即  $T = k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 离散化系统是不能控的; 当  $T \neq k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 离散化系统是能控的。同理, 离散化系统的能观性矩阵为

$$\begin{aligned} \Gamma_o [G, C] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\sin T & \cos T \end{bmatrix} \\ \det(\Gamma_o [G, C]) &= \sin T \end{aligned}$$

所以,  $\sin T = 0$ , 即  $T = k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 离散化系统是不能观的; 当  $T \neq k\pi$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) 时, 离散化系统是能观的。因此, 一个能控能观的连续时间系统, 其离散化后的状态空间模型不一定仍然是能控能观的, 主要取决于采样周期  $T$  的选择。

(3) 当采样周期  $T = \pi/2$  时, 离散化状态空间模型为

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Gx(k) + Hu(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(k) \\ y(k) &= [0 \quad 1] x(k) \end{aligned}$$

可得

$$x(1) = Gx(0) + Hu(0) \tag{a}$$

$$x(2) = Gx(1) + Hu(1) \tag{b}$$

将式(a)代入式(b)得

$$G^2 x(0) + GHu(0) + Hu(1) = x(2)$$

即

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(0) + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} u(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

整理可得

$$u(0) = -1, \quad u(1) = 0$$

五、(10分) 证明: 状态反馈不改变被控系统的能控性。

**证明一:** 采用能控性定义证明, 具体见教材 P125。

**证明二:** 考虑被控系统  $(A, B, C, D)$ , 则状态反馈后得到闭环系统  $S_K$ , 其状态空间模型为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x + Bv \\ y &= Cx\end{aligned}$$

开环系统  $S_0$  的能控性矩阵为

$$\Gamma_c[A, B] = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B]$$

闭环系统  $S_K$  的能控性矩阵为

$$\Gamma_{cK}[(A - BK), B] = [B \quad (A - BK)B \quad \cdots \quad (A - BK)^{n-1}B]$$

由于

$$\begin{aligned}(A - BK)B &= AB - BKB \\ (A - BK)^2 B &= (A^2 - ABK - BKA + BKBK)B \\ &= A^2 B - AB(KB) - B(KAB - KBKB) \\ &\vdots\end{aligned}$$

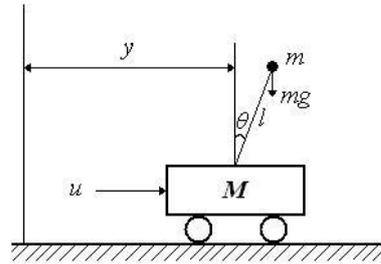
以此类推,  $(A - BK)^m B$  总可以写成  $A^m B, A^{m-1} B, AB, B$  的线性组合。因此, 存在一个适当非奇异的矩阵  $U$ , 使得

$$\Gamma_{cK}[(A - BK), B] = \Gamma_c[A, B]U$$

由此可得: 若  $\text{rank}(\Gamma_c[A, B]) = n$ , 即有  $n$  个线性无关的列向量, 则  $\Gamma_{cK}[(A - BK), B]$  也有  $n$  个线性无关的列向量, 故  $\text{rank}(\Gamma_{cK}[(A - BK), B]) = n$ 。命题得证。

六、(20分) 双足直立机器人可以近似为一个倒立摆装置, 如图所示。假设倒立摆系统的一个平衡点线性化状态空间模型如下:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u \\ y &= [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]x\end{aligned}$$



其中, 状态变量  $x = [y \quad \dot{y} \quad \theta \quad \dot{\theta}]^T$ ,  $y$  是小车的位移,  $\theta$  是摆杆的偏移角,  $u$  是作用在小车上的动力。试回答

(1) 双足直立机器人在行走过程中被人推了一把而偏离垂直面, 那么根据倒立摆原理, 请问双足直立机器人在该扰动推力消失后还能回到垂直面位置吗? (2分)

(2) 如果不能, 那么请你从控制学的角度, 给出两种能够使双足直立机器人在扰动推力消失后回到垂直面位置的方法。(4分)

(3) 请结合倒立摆模型, 简单叙述双足直立机器人能控性的含义。(4分)

(4) 在状态反馈控制器设计中, 需要用到系统的所有状态信息, 但根据倒立摆原理, 可测量的状态信息只有水平移动的位移  $y$ , 那么你有什么方法可以实现这个状态反馈控制器的设计? 你所用方法的条件是什么? 依据是什么? 请结合倒立摆模型, 给出你使用方法的实现过程。(10分)

答: (1) 不能, 因为倒立摆是一个开环不稳定系统;

(2) 对于给定的倒立摆模型, 是一线性时不变系统, 因此可以用如下方法使双足直立机器人在扰动推力消失后回到垂直面位置 (即稳定化控制器设计): 极点配置方法; 基于李雅普诺夫稳定性理论的直接设计法; 线性二次型最优控制器设计方法。

(3) 当双足直立机器人由于受初始扰动而稍稍偏离垂直面位置时, 总可以通过对其施加一个

适当的外力，使得将它推回到垂直面位置（将非零的初始状态转移到零状态）。

(4) 如果被控系统是状态能观的，那么通过设计（降维）状态观测器将不可测量状态变量观测输出，再应用线性定常系统的分离性原理，实现状态反馈控制器设计。结合倒立摆模型，则检验上述状态空间模型的能观性；系统完全能观，则对系统设计状态观测器（或对不可测量子系统  $\dot{y}$ 、 $\theta$  和  $\dot{\theta}$  设计降维状态观测器） $\hat{x}$ ；应用线性定常系统的分离性原理，将状态反馈控制器  $u = -Kx$  中的状态  $x$  替换为观测状态  $\hat{x}$ ，从而实现基于状态观测器的状态反馈控制器设计。

使用方法的条件是：系统完全能观或不可观子系统是渐进稳定的；

使用方法的依据是：线性定常系统的分离性原理。

七、(15分) 考虑线性定常系统和性能指标如下：

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [1 \quad 0]x, \quad J = \int_0^{\infty} y^2 + ru^2 dt$$

其中实数  $r > 0$  为性能指标可调参数。试回答

(1) 当参数  $r$  固定时，求使得性能指标  $J$  最小化的最优状态反馈控制器。(10分)

(2) 当参数  $r$  增大时，分析闭环系统性能的变化。(5分)

解：(1) 系统性能指标  $J$  等价于

$$J = \int_0^{\infty} x^T [1 \quad 0]^T [1 \quad 0] x + ru^2 dt = \int_0^{\infty} x^T Q x + u^T R u dt$$

令正定对称矩阵  $P = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix}$ ，代入黎卡提矩阵方程

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

可得：

$$\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{r} \cdot [0 \quad 1] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

通过矩阵计算，得到：

$$\begin{bmatrix} -P_{12} & P_{11} \\ -P_{22} & P_{12} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -P_{12} & -P_{22} \\ P_{11} & P_{12} \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} P_{12}^2 & P_{12}P_{22} \\ P_{12}P_{22} & P_{22}^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

进一步，可得下面三个代数方程：

$$-2P_{12} - \frac{1}{r}P_{12}^2 + 1 = 0$$

$$-P_{22} + P_{11} - \frac{1}{r}P_{12}P_{22} = 0$$

$$2P_{12} - \frac{1}{r}P_{22}^2 = 0$$

据此，可解得： $P_{12} = -r + \sqrt{r^2 + r}$ （这里取正值，若取负值，则相应的矩阵  $P$  不是正定的），

$$P_{22} = \sqrt{-2r^2 + 2r\sqrt{r^2 + r}}, \quad P_{11} = \sqrt{-2r^2 + 2r\sqrt{r^2 + r}} \cdot \frac{\sqrt{r^2 + r}}{r}.$$

使得性能指标  $J$  最小化的最优状态反馈控制器为：

$$u = -R^{-1}B^T P x = \left( 1 - \frac{\sqrt{r^2 + r}}{r} \right) x_1 - \frac{\sqrt{-2r^2 + 2r\sqrt{r^2 + r}}}{r} x_2$$

(2) 将上述最优控制律代入系统，得最优闭环系统状态矩阵

$$\begin{aligned}\bar{A} &= A - BR^{-1}B^T P \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{r} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - \frac{P_{12}}{r} & -\frac{P_{22}}{r} \end{bmatrix}\end{aligned}$$

则闭环系统特征多项式为

$$|\lambda I - \bar{A}| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 + \frac{P_{12}}{r} & \lambda + \frac{P_{22}}{r} \end{vmatrix} = \lambda^2 + \frac{P_{22}}{r} \lambda + 1 + \frac{P_{12}}{r}$$

可得最优闭环极点为

$$\lambda_{1,2} = \frac{-P_{22}/r \pm j\sqrt{(P_{22}/r)^2 - 4(1 + P_{12}/r)}}{2} = \frac{-\sqrt{2z-2}}{2} \pm j\frac{\sqrt{2z+2}}{2}$$

其中  $z = \sqrt{r^2 + r}$ 。随着参数  $r$  的增大，闭环极点越来越靠近虚轴，从而系统的响应速度变慢。事实上，从性能指标也可以看出，参数  $r$  的增大表明控制能量约束的加权越来越大，希望用较小的能量来实现系统的控制，显然由此导致的结果就是系统速度变慢。