从数学推导过程讨论能量法的适用条件

刘胜来　李全旺 1)

(清华大学土木工程系, 北京 100084)

摘要 在结构力学的计算中，通常的方法有能量法、解析法等. 能量法在结构计算中有广泛的应用，它适用于线弹性或非线性条件. 该文从数学的角度讨论能量法结构计算的原理，通过对虚功原理、卡氏第二定理、极小势能原理的证明推导，明确了虚功原理是平衡微分方程和变形协调方程的结合体，与材料应力应变关系无关，适用于线性和非线性问题；卡氏第二定理只在线弹性条件下成立；极小势能原理应用的前提条件之一是材料应力应变关系是严格增函数，可以是线弹性也可以是非线性.

关键词 能量法，虚功原理，卡氏第二定理，极小势能原理，数学推导

中图分类号：O342　**文献标识码**：A

doi：10.6052/1000-0879-13-150

结构力学中的能量法有很强的数学背景，在线弹性条件下，它可以理解为变分法解力学问题时得到的一个二次函数. 能量法的两种最常用的具体形式为虚功原理和极小势能原理，虚功原理又分为虚力原理和虚位移原理. 而卡氏第二定理是虚力原理的一种推广应用.

虚功原理是宏观表现，不像平衡微分方程和变形协调方程般繁琐 (解析法). 后者在小尺度下成立，着眼于微观，在复杂情况下很难直接积分出一个简单的形式. 虚功原理不仅解决了这些困难，而且把边界条件包含在内，着眼于宏观，比通过控制方程积分、代入边界条件求解的解析法简洁.

能量法虽然比解析法稍难理解，但在力学分析中却更加有效. 在一个方程中统合所有条件和未知量，能衍生出非常巧妙的办法与性质 (如 4 个互等定理 [1]). 因此能量法应用范围很广. 在使用能量法时，有必要明确它们的适用条件，这便是本文的主要目的.

1　虚功原理成立的前提

虚功原理 [2-3] 可以从平衡微分方程和变形协调方程推导出来，以一根梁为例, 这两组方程分别为：

平衡微分方程

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}+p\mathrm{d}x=0\,,\ \mathrm{d}F_{\mathrm{Q}}+q\mathrm{d}x=0\,,\ \mathrm{d}M+F_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}x=0 \tag{1}$$

变形协调方程

$$\mathrm{d}u=\varepsilon\mathrm{d}x\,,\quad \mathrm{d}\omega-\theta\mathrm{d}x=\gamma_0 \tag{2}$$

其中, F_{N}, F_{Q}, M 分别为截面轴力、剪力和弯矩; p 为轴向载荷集度; q 为法向载荷集度; u 为轴向位移; ω 为横向位移; ε 为轴向线应变; θ 为转角; γ_0 为截面平均切应变; $\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}x$ 表示杆轴切线的角位移.

证明如下:

若杆件的两个端点分别为 A,B，则根据式 (1)，首先有

$$\int_A^B[(\mathrm{d}F_{\mathrm{N}}+p\mathrm{d}x)u+(\mathrm{d}F_{\mathrm{Q}}+q\mathrm{d}x)\omega+(\mathrm{d}M+F_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}x)\theta]=0 \tag{3}$$

由式 (3) 可推出

$$\begin{aligned}&(uF_{\mathrm{N}}+\omega F_{\mathrm{Q}}+M\theta)\big|_A^B-\\&\quad\int_A^B(F_{\mathrm{N}}\mathrm{d}u+F_{\mathrm{Q}}\mathrm{d}\omega+M\mathrm{d}\theta)+\\&\quad\int_A^B(pu+q\omega)\mathrm{d}x+\int_A^B F_{\mathrm{Q}}\theta\mathrm{d}x=0\end{aligned} \tag{4}$$

再将变形协调方程 $\mathrm{d}u=\varepsilon\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\omega-\theta\mathrm{d}x=\gamma_0$，代入式 (4)，便可得到变形体虚功方程 [2-3]

$$\begin{aligned}&(M_B\theta_B+F_{\mathrm{N}_B}u_B+F_{\mathrm{Q}_B}\omega_B)-\\&\quad(M_A\theta_A+F_{\mathrm{N}_A}u_A+F_{\mathrm{Q}_A}\omega_A)+\\&\quad\int_A^B(pu+q\omega)\mathrm{d}x=\\&\quad\int_A^B(M\mathrm{d}\theta+F_{\mathrm{N}}\varepsilon\mathrm{d}x+F_{\mathrm{Q}}\gamma_0\mathrm{d}x)\end{aligned} \tag{5}$$

式 (5) 左边为外力在位移上所做的外力虚功，前两项是杆端力作的虚功，第 3 项是分布载荷作的

2013–04–17 收到第 1 稿，2013–06–13 收到修改稿.

1) 李全旺，男，副教授，主要研究方向为在役结构承载力评估、可靠性分析及维护管理策略. E-mail: li_quanwang@tsinghua.edu.cn

虚功；右边为整个变形体的内力虚功. 二者相等即是对虚功原理的证明.

从上面的证明过程可以看到，虚功原理实质上是平衡微分方程和变形协调方程的结合体，未引入其他多余条件. 其优势也在于把边界条件融合到了等式中，使得其在结构计算中的应用变得方便简洁. 由于不引入本构关系，因此不必关心材料线性或非线性. 由虚功原理衍生出的虚力原理与虚位移原理的妙处也正体现在这里，虚力原理只需力系是平衡的，虚位移原理只需位移变化都是满足几何相容条件的.

2 卡氏第二定理的适用条件

卡氏第二定理 [4-5]，基本表达式为

$$\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{P_i}} = \varDelta_i \tag{6}$$

其中，V_ε 是结构的总应变能，F_{P_i} 是作用在结构 i 处的力，$\varDelta_i$ 是力 F_{P_i} 处的位移. 卡氏第二定理可以直接从数学变分法导出.

证明如下:

弹性体的总势能 $\varOmega$，可写作

$$\begin{aligned}\varOmega = V_\varepsilon(F_{P_1}, F_{P_2}, \cdots, F_{P_n}) - \\ F_{P_1}\varDelta_1 - F_{P_2}\varDelta_2 - \cdots - F_{P_n}\varDelta_n\end{aligned} \tag{7}$$

对 $F_{P_1}, F_{P_2}, \cdots, F_{P_n}$ 取变分，$\varOmega$ 的变分为

$$\begin{aligned}\delta\varOmega = \Big(\frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{P_1}}\delta F_{P_1} + \cdots + \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{P_n}}\delta F_{P_n}\Big) - \\ \delta F_{P_1}\varDelta_1 - \cdots - \delta F_{P_n}\varDelta_n\end{aligned} \tag{8}$$

由总势能在真实情况下取极值，满足 $\delta\varOmega = 0$，从而得到卡式第二定理的表达式 (式 6).

由上面的数学推导可以发现，在卡氏第二定理的推导过程中使用了叠加原理，因而在非线性条件下不能成立 [6].

3 极小势能原理的证明和前提条件

极小势能原理是数学变分原理的自然结论，可以根据平衡方程和变形协调方程推导出极小势能原理，过程如下：

设 u_i, u_j, u_k 为结构的真实位移，弹性体总势能可表示为

$$\varOmega = \int W \mathrm{d}V - \sum\int_S \bar{p}_i u_i \mathrm{d}S - \sum\int f_i u_i \mathrm{d}V - \sum F_i u_i \tag{9}$$

其中，W 为应变能密度，$\bar{p}_i$ 为边界上面力，f_i 为体力，F_i 为集中力.

(1) 线弹性条件下的极小势能原理的证明

在线弹性条件下，有 [7]

$$\begin{aligned}\varOmega(u_i + \delta u_i, u_j + \delta u_j, u_k + \delta u_k) - \varOmega(u_i, u_j, u_k) = \\ \delta\varOmega(u_i, u_j, u_k) + \frac{1}{2}\delta^2\varOmega(u_i, u_j, u_k)\end{aligned} \tag{10}$$

其中，$\delta^2\varOmega(u_i, u_j, u_k)$ 是一个二阶变分，$\delta^2\varOmega(u_i,\ u_j,\ u_k) > 0$ [7]. 根据取极值条件，有

$$\delta\varOmega(u_i, u_j, u_k) = 0 \tag{11}$$

因此

$$\begin{aligned}\varOmega(u_i + \delta u_i, u_j + \delta u_j, u_k + \delta u_k) - \\ \varOmega(u_i, u_j, u_k) > 0\end{aligned} \tag{12}$$

由此可见，在线弹性条件下，满足平衡微分方程时势能取得极小值 [7].

更一般的，在非线性条件下仍然有极小势能原理.

(2) 非线性条件下的极小势能原理的证明

记体力为 f_i，在力边界 S_σ 上给定面力 $\overline{p_i}$，在位移边界 S_u 上给定位移 $\overline{u_i}$. 这里假设弹性应变能只考虑正截面应变势能，不考虑剪应变的作用，同时记在真实状态下和任意变形状态总势能为 $\varOmega$ 和 $\varOmega^{(k)}$.

根据静力平衡关系

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (\text{在整个弹性体 } V \text{ 内}) \\ &\sigma_{ij}v_j = \bar{p}_i \qquad\ (\text{在力边界 } S_\sigma \text{ 上})\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

考虑变形协调关系

$$\left.\begin{aligned}&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (\text{在整个弹性体 } V \text{ 内}) \\ &u_i = \bar{u}_i \qquad\qquad\qquad (\text{在力边界 } S_u \text{ 上})\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

另外，根据应变能密度

$$W(\varepsilon_{ij}) = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon = \int_0^{\varepsilon_{ij}} f(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}\varepsilon \tag{15}$$

得到如下弹性关系

$$\frac{\partial W(\varepsilon_{ij})}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (\text{在 } V \text{ 内}) \tag{16}$$

记与真实状态相邻的一个可能状态几何量分别为 $u_i^{(k)}$ 和 $\varepsilon_{ij}^{(k)}$，同时注意到式 (9)，有

$$\begin{aligned}\Omega(u_i^{(k)})-\Omega(u)=&\int_V[W^{(k)}(\varepsilon_{ij}^{(k)})-W(\varepsilon_{ij})]\mathrm{d}V-\\&\int_S\bar{p}_i(u_i^{(k)}-u_i)\mathrm{d}S-\int_V f_i(u_i^{(k)}-u_i)\mathrm{d}V-\\&\sum F_i(u_i^{(k)}-u_i)=\\&\int_V[W^{(k)}(\varepsilon_{ij}^{(k)})-W(\varepsilon_{ij})]\mathrm{d}V-\\&\int_V\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})\mathrm{d}V\end{aligned}\tag{17}$$

考虑到 $W(\varepsilon_{ij})=\int_0^{\varepsilon_{ij}}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon$，并且假设 $\sigma_{ij}=f(\varepsilon_{ij})$ 是严格递增函数，不妨设 $\varepsilon_{ij}^{(k)}>\varepsilon_{ij}$，于是

$$\begin{aligned}&W^{(k)}(\varepsilon_{ij}^{(k)})-W(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})=\\&\quad\int_0^{\varepsilon_{ij}^{(k)}}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-\int_0^{\varepsilon_{ij}}f(\varepsilon)\mathrm{d}\varepsilon-\\&\quad f(\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})>\\&\quad\int_{\varepsilon_{ij}}^{\varepsilon_{ij}^{(k)}}f(\varepsilon_{ij})\mathrm{d}\varepsilon-f(\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})=\\&\quad f(\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})-f(\varepsilon_{ij})(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})=0\end{aligned}\tag{18}$$

由式 (18) 可以看出，要使得上述不等式成立，必须保证 $f(\varepsilon)$ 是严格增函数，否则式 (18) 中的不等关系不成立，也就无法得到极小势能原理．同时注意到上式成立时不要求 $\varepsilon_{ij}^{(k)}$ 与 ε_{ij} 相差很小，因此它是一个大范围极值原理．

若 $\varepsilon_{ij}^{(k)}<\varepsilon_{ij}$ 也可以类似地得到同样的结论，于是

$$W^{(k)}(\varepsilon_{ij}^{(k)})-W(\varepsilon_{ij})-\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}^{(k)}-\varepsilon_{ij})>0\tag{19}$$

于是 $\Omega(u_i^{(k)})-\Omega(u)>0$，极小势能原理在非线性条件下成立．

从上面的证明可以看出，应力必须是应变的严格增函数才符合极小势能原理．如果材料应力应变关系有屈服平台或者下降区段，极小势能原理的解不是一个稳定点，不存在唯一解，极小势能原理则不再适用．若要应用极小势能原理，必须保证应力是应变的严格增函数．

从数学角度看，只有应变能密度函数 $W(\varepsilon_{ij})$ 是一个凸函数，极小势能原理才有意义．应变能密度函数是应力对应变求积分，只有应力是应变的严格增函数，才能保证 $W(\varepsilon_{ij})$ 是一个凸函数，因此式 (18) 的性质便不难理解．

还需要说明的是，非线性条件下极小势能原理成立遵循的应力应变关系需满足严格递增条件，本质上其实为 Drucker 公设，即硬化材料条件，该假设是塑性力学中下限定理 [8-9] 的前提．如果材料不符合材料硬化条件，如应力应变关系存在下降段，将会出现不稳定，在有限元计算中一旦进入这个下降段则需要区别处理．

4 结　论

上述 3 种方法都是非常常用的能量法的基本形式，使用时需特别注意它们的适用条件．

虚功原理 (式 (5)) 可以看作是一个融合平衡微分和变形协调两个条件的方程．利用数学手段把二者综合考虑又不失独立性，同时正是这种独立性给虚功原理带来明显优势，即, 不用考虑材料物理本构关系而使求解更简洁．

卡氏第二定理在推导过程中用到叠加原理，因此只在线弹性条件下成立．

极小势能原理不具有与虚功原理同等的适用条件．只有材料应力应变关系满足严格增函数下才能应用．它是一个大范围极值原理，在线性与非线性条件下都能应用．

参 考 文 献

1 龙驭球、包世华. 结构力学 I 基本教程 (第 3 版). 北京：高等教育出版社，2008
2 王焕定. 再论变形体虚功原理. 力学与实践, 2011, 33(2): 93-95
3 张东岭.　有关虚功原理若干问题的研究. 山西建筑, 2008, 34(25): 100-101
4 范钦珊，王波，殷雅俊. 材料力学. 北京：高等教育出版社，2000
5 管悦, 李全旺. 从卡氏第二定理探讨结构位移计算方法的关系. 力学与实践, 2012, 34(2): 66-67
6 铁木辛柯 SP，杨 DH. 结构理论 (第 2 版). 叶红玲, 杨庆生译. 北京：机械工业出版社，2005
7 徐秉业，黄炎，刘信声等. 弹性力学与塑性力学解题指导及习题集. 北京：高等教育出版社，1985
8 周献祥. 塑性理论下限定理在钢筋混凝土结构设计中若干应用. 工程力学, 2000, 2(A02): 362-366
9 钟万勰. 极限分析中新的上、下限定理. 力学学报, 1983, 19(4): 341-351

(责任编辑：胡　漫)