

基于自适应交叉近似边界元法的 快速声学灵敏度分析

郑昌军*, 陈磊磊, 陈海波

(中国科学技术大学 近代力学系, 合肥 230027)

摘要:基于自适应交叉近似边界元法构造一组快速声学灵敏度分析方法,其中,声学灵敏度分析分别采用直接微分法和伴随变量法;而自适应交叉近似算法被用以克服常规边界元法的高计算量和高存储量的固有缺点。自适应交叉近似算法在迭代求解之前对边界元系数矩阵进行压缩存储,可以在降低存储量的同时提高求解效率。在声学灵敏度分析中,通过直接使用求解未知边界状态值时保存的压缩系数矩阵,可以进一步提高求解效率。数值算例验证了所构造的方法的计算精度和求解效率,以及在大规模声场问题的最优化分析中的应用潜力。

关键词:边界元法;自适应交叉近似;声学灵敏度;直接微分法;伴随变量法

中图分类号:O242.2 **文献标志码:**A **doi:**10.7511/jslx201404001

1 引言

边界元法 BEM(Boundary Element Method)较之有限元法具有一些独特优点,如可对模型进行降维处理,求解精度更高,可以方便地处理无限域或半无限域问题等。但由于边界元法所形成的系统方程的系数矩阵是非对称稠密矩阵,故而导致了常规边界元法的高计算量和高存储量的缺点。对于一个 N 自由度的问题,存储量级为 $O(N^2)$,若采用直接方法求解需 $O(N^3)$ 量级的计算量;而若采用迭代求解算法,则仍需要 $O(N^2)$ 量级的计算量。因此,常规边界元法不适于处理大规模工程问题。

为了提高求解效率,自 20 世纪 80 年代末至今,将快速多极算法 FMA(Fast Multipole Algorithm)^[1]与边界元法相结合形成的快速多极边界元法有了很大的进展,并取得了广泛应用^[2-8]。快速多极边界元法的计算量与边界未知量呈线性关系,但是该算法与特定物理问题相关,需要针对不同物理场的基本解寻找特定展开格式。2003 年,Beberdorf 等^[9]提出了自适应交叉近似 ACA(Adaptive Cross Approximation)算法,用于对低秩矩阵进行快速向

量内积分解。将 ACA 算法用于边界元子矩阵的快速近似与存储,可以大幅提高求解速度并降低存储量,并且该算法是一种纯数值技术的矩阵压缩方法,与物理背景无关,因此与 FMA 相比更易于应用。另外,由于可以将压缩分解形成的矩阵存储于内存中,便于再次迭代求解,因而更适于需要多次迭代步骤的求解过程。

在基于梯度的最优化过程中,灵敏度的计算最复杂且最耗时,也是决定最优化成败的关键部分。因此,设计高效且精确的灵敏度分析算法成为结构优化研究中的核心内容之一。由于边界元法在求解开域问题中的优势,因此已广泛应用于声学灵敏度分析中。灵敏度分析方法包括直接微分法 DDM(Direct Differentiation Method)和伴随变量法 AVM(Adjoint Variable Method)^[10]。其中,直接微分法利用直接微分得到的灵敏度边界积分方程求解出未知的边界灵敏度值和域内关注点处的灵敏度值,然后代入目标函数的灵敏度表达式中求出目标函数的灵敏度值。直接微分法具有思路简单、算法设计及实现容易等优点,但其求解时间正比于设计变量的数目。伴随变量法通过引入伴随方程来消除目标函数的灵敏度表达式中与未知边界灵敏度值和域内灵敏度值有关的项,从而避免求解与设计变量相关的未知边界灵敏度值和域内灵敏度值,因此该方法适合于多设计变量的灵敏度分析。由于直接微分法和伴随变量法的每次求解过程均需求解两次系统方程,因而基于常规边界元法的灵敏

收稿日期:2013-01-25;修改稿收到日期:2013-06-11.

基金项目:国家自然科学基金(11172291);国家博士后科学基金(2012M510162);中央高校基本科研业务费专项基金(WK2090050024)资助项目.

作者简介:郑昌军*(1983-),男,博士后
(E-mail: cjzheng@ustc.edu.cn).

度分析将更加面临着计算量和存储量的瓶颈问题。

本文利用自适应交叉近似算法结合迭代求解方法来克服常规边界元法的高计算量和高存储量的缺点,从而构造一组快速声学灵敏度分析方法。利用数值算例验证了该方法的计算精度和求解效率,以及在大规模声场分析中的应用潜力,从而为大规模声场问题的最优化提供了基础。

2 边界积分方程及离散

理想媒介中由微小扰动所形成的时谐声场在去除时间的相关性后,声场中任一点 x 处的声压 $p(x)$ 应满足的控制微分方程为

$$\nabla^2 p(x) + k^2 p(x) = 0, \quad x \in \Omega \quad (1)$$

式中 $k = \omega/c$ 为波数, ω 为角频率, c 为声速。上述控制微分方程可以转化为如下常规边界积分方程 CBIE (Conventional Boundary Integral Equation):

$$C(x) p(x) + \int_{\Gamma} q^*(x, y) p(y) d\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(x, y) q(y) d\Gamma \quad (2)$$

式中 $C(x)$ 根据点 x 在域内、光滑边界上和域外分别取 $1, 1/2$ 和 0 , $q(y) = \partial p(y)/\partial n(y)$, 基本解 $\tilde{p}^*(x, y)$ 为

$$\tilde{p}^*(x, y) = \begin{cases} iH_0^{(1)}(kr)/4, & (2D) \\ e^{ikr}/4\pi r, & (3D) \end{cases} \quad (3)$$

式中 $r = |x - y|$, $H_0^{(1)}$ 表示第一类 0 阶 Hankel 函数;另外, $q^*(x, y)$ 为 $\tilde{p}^*(x, y)$ 关于点 y 处外法线 $n(y)$ 的方向导数,即 $q^*(x, y) = \partial \tilde{p}^*(x, y)/\partial n(y)$ 。

对于内声场问题,直接利用式(2)可以求得声场的分布情况。但是对于外声场问题,式(2)在某些频率附近会出现非唯一解。这是由通过积分方法求解偏微分方程所带来的一个数学问题,而并不是一个物理问题。因此,这些出现非唯一解的频率常称为虚拟特征频率。为了克服此问题,本文采用较严密的 Burton-Miller 法^[11],其表达式可以写为

$$C(x) p(x) + \alpha C(x) q(x) + \int_{\Gamma} q^*(x, y) p(y) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{q}^*(x, y) p(y) d\Gamma = \int_{\Gamma} \tilde{p}^*(x, y) p(y) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} \tilde{\tilde{p}}^*(x, y) q(y) d\Gamma \quad (4)$$

式中,系数 α 可以取为 i/k ^[12],而 $\tilde{f} = \partial f/\partial n(x)$ 。由于法向导数的缘故,式(4)中存在超奇异积分项,然而基于常量单元离散可以得到一种无奇异的边界积分方程^[13]。在数值分析中,首先使用边界单元对式(2)或式(4)进行离散从而可以组装成,

$$\mathbf{H}p = \mathbf{G}q \quad (5)$$

然后再根据边界条件进行重组(即将已知项移到等式右边,未知项移到等式左边),可以得到线性方程组:

$$\mathbf{A}\Psi = \mathbf{B}\Phi \quad (6)$$

式中 Ψ 和 Φ 分别为未知和已知向量。求解式(6)就可以得到所有未知边界条件,再利用式(2)的离散形式并取其中的系数 $C(x)$ 为 1 ,就可以计算出域内任意关注点处的声压值。

3 声学灵敏度分析

为了使本文讨论的声学灵敏度分析方法更具一般性,将目标函数定义为不定形式:

$$I = \int_{\Gamma} g(p, q) d\Gamma + \int_{\Omega} h(p) d\Omega \quad (7)$$

式中 $g(p, q)$ 和 $h(p)$ 分别为定义在边界上和域内的函数。则目标函数对设计变量的灵敏度表达式为

$$\dot{I} = \int_{\Gamma} \left[\frac{\partial g}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial g}{\partial q} \dot{q} \right] d\Gamma + \int_{\Gamma} g(p, q) d\dot{\Gamma} + \int_{\Omega} \frac{\partial h}{\partial p} \dot{p} d\Omega + \int_{\Omega} h(p) d\dot{\Omega} \quad (8)$$

式中 \dot{f} 表示 f 对设计变量的导数。根据文献[14], $d\dot{\Gamma}$ 和 $d\dot{\Omega}$ 分别表示为

$$d\dot{\Gamma}(y) = [\dot{y}_{i,i} - \dot{y}_{i,j} n_i(y) n_j(y)] d\Gamma(y) \quad (9)$$

$$d\dot{\Omega} = \dot{y}_{i,i} d\Omega \quad (10)$$

式(9,10)中,逗号后的指标表示对坐标分量的偏导,即 $\dot{y}_{i,j} = \partial \dot{y}_i / \partial y_j$ 。

3.1 直接微分法

在直接微分法中,分别通过求式(2,4)对设计变量的导数,可以得到如下灵敏度边界积分方程:

$$C(x) \dot{p}(x) + \int_{\Gamma} \dot{q}^*(x, y) \dot{p}(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{q}}^*(x, y) p(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{q}^*(x, y) p(y) d\dot{\Gamma} = \int_{\Gamma} \dot{\tilde{p}}^*(x, y) \dot{p}(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{\tilde{p}}}^*(x, y) q(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{p}}^*(x, y) q(y) d\dot{\Gamma} \quad (11)$$

$$C(x) \dot{p}(x) + \alpha C(x) \dot{q}(x) + \int_{\Gamma} \dot{q}^*(x, y) \dot{p}(y) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{q}}^*(x, y) \dot{p}(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{q}}^*(x, y) p(y) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{\tilde{q}}}^*(x, y) p(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{q}^*(x, y) p(y) d\dot{\Gamma} + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{q}}^*(x, y) p(y) d\dot{\Gamma} = \int_{\Gamma} \dot{\tilde{p}}^*(x, y) \dot{q}(y) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{\tilde{p}}}^*(x, y) \dot{q}(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{p}}^*(x, y) q(y) d\Gamma + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{\tilde{p}}}^*(x, y) q(y) d\Gamma + \int_{\Gamma} \dot{\tilde{p}}^*(x, y) q(y) d\dot{\Gamma} + \alpha \int_{\Gamma} \dot{\tilde{\tilde{p}}}^*(x, y) q(y) d\dot{\Gamma} \quad (12)$$

式(12)中也存在超奇异积分项,利用常量单元离散同样可以得到一种无奇异的灵敏度边界积分方程,具体的推导过程可以参考文献[15,16]。在数值计算中,首先通过求解式(6)得到所有未知边界状态值,然后针对内声场或外声场问题分别利用式(11)或式(12)的离散形式求出所有未知边界灵敏度值,再利用式(11)的离散形式并取其中的系数 $C(x)$ 为1求出域内关注点的声压灵敏度值,最后代入式(8)就可以求出目标函数的灵敏度值。其中,式(11)或式(12)的离散形式可以组装成

$$\mathbf{H}\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{G}\dot{\mathbf{q}} - \dot{\mathbf{H}}\mathbf{p} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{q} \quad (13)$$

式中 \mathbf{H} 和 \mathbf{G} 等同于式(5)中的 \mathbf{H} 和 \mathbf{G} ,而 $\dot{\mathbf{H}}$ 和 $\dot{\mathbf{G}}$ 是在此处需要重新计算的系数矩阵。根据灵敏度的边界条件,式(13)可以重组成

$$\mathbf{A}\dot{\boldsymbol{\psi}} = \mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\phi}} - \dot{\mathbf{H}}\mathbf{p} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{q} \quad (14)$$

式中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 等同于式(6)中的 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , $\dot{\boldsymbol{\psi}}$ 和 $\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 分别为边界灵敏度值的未知和已知向量。

3.2 伴随变量法

在伴随变量法中,首先通过附加项将原始的目标函数(7)修改为

$$J = I + R \quad (15)$$

式中,附加项 R 定义为

$$R = \int_{\Omega} \lambda(x) [\nabla^2 p(x) + k^2 p(x)] d\Omega \quad (16)$$

式中 $\lambda(x)$ 为伴随变量。由于控制微分方程(1)的缘故, $R \equiv 0$,故 J 等价于 I 。通过引入如下的伴随方程:

$$\begin{cases} \nabla^2 \lambda(x) + k^2 \lambda(x) + \partial h / \partial p = 0, & x \in \Omega \\ \lambda(x) = -\partial g / \partial q, & x \in \Gamma_p \\ \partial \lambda(x) / \partial n = \partial g / \partial p, & x \in \Gamma_q \end{cases} \quad (17)$$

可以得到 J 对设计变量的灵敏度表达式为

$$\begin{aligned} \dot{j} = & \int_{\Gamma_q} \left[\lambda + \frac{\partial g}{\partial q} \right] \dot{q} d\Gamma - \int_{\Gamma_p} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial n} - \frac{\partial g}{\partial p} \right] \dot{p} d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} \left[\lambda_{,j} q + \frac{\partial \lambda}{\partial n} p_{,j} - \lambda_{,i} p_{,i} n_j + k^2 \lambda p n_j \right] \dot{x}_j d\Gamma + \\ & \int_{\Gamma} (g + \lambda q) d\Gamma \end{aligned} \quad (18)$$

上述结果的具体推导过程可以参考文献[7]。在数值计算中,首先通过求解式(6)得到所有未知边界状态值,然后,通过式(17)的求解得到未知的边界伴随变量值。由于式(17)与式(1)在方程形式和边界条件上的特殊关系,在边界元分析中,亦可得到如下关于伴随变量的线性方程组:

$$\mathbf{A}\mathbf{s} = \mathbf{B}\mathbf{t} + \mathbf{b} \quad (19)$$

式中 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 等同于式(6)中的 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} , \mathbf{s} 和 \mathbf{t} 分别为

伴随变量的未知和已知向量, \mathbf{b} 为伴随场中的域内源向量。之后,通过梯度边界积分方程可以求得声压和伴随变量的边界梯度值,然后代入式(18)就可以计算出目标函数的灵敏度值。

4 快速声学灵敏度分析方法

由于在声学灵敏度分析中,需要求解两个线性系统方程(直接微分法为式(6,14),伴随变量法为式(6,19))。因此,由于计算量和存储量的瓶颈问题,常规边界元法更加难以进行大规模声学灵敏度分析,因此本节利用ACA算法^[9]构造基于边界元法的快速声学灵敏度分析方法。

自适应交叉近似边界元法(ACA-BEM)的基本思想是通过树结构将边界元系数矩阵分解成一系列子矩阵的集合,每个子矩阵均对应一组源点集合和一组场点集合。当源点集合和场点集合的距离较近时,仍按常规方法进行计算;而当源点集合(共 m 个)与场点集合(共 n 个)的距离足够远时,对应的子矩阵 $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 可以用两个矩阵的乘积近似表示为

$$\mathbf{Z}^{m \times n} \approx \tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n} = \mathbf{U}^{m \times r} \mathbf{V}^{r \times n} \quad (20)$$

式中 r 为 $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 的近似矩阵 $\tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n}$ 的秩,而且 $r < \min(m, n)$ 。 $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 和 $\tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n}$ 应满足,

$$\|\mathbf{Z}^{m \times n} - \tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n}\| \leq \varepsilon \|\mathbf{Z}^{m \times n}\| \quad (21)$$

经过式(20)的近似处理后, $\mathbf{Z}^{m \times n}$ 与向量 \mathbf{X}^n 的乘积可以通过如下的方式计算得

$$\mathbf{Z}^{m \times n} \mathbf{X}^n \approx \tilde{\mathbf{Z}}^{m \times n} \mathbf{X}^n = \mathbf{U}^{m \times r} (\mathbf{V}^{r \times n} \mathbf{X}^n) \quad (20)$$

可以看出,通过低秩近似后,原本需存储 $\mathbf{Z}^{m \times n}$,现只需分别存储 $\mathbf{U}^{m \times r}$ 和 $\mathbf{V}^{r \times n}$,因此存储量由 $m \times n$ 降至 $r \times (m + n)$,而且,由于只需要计算系数矩阵中较少的行与列,因此系数矩阵与向量的乘积过程中涉及的运算量也得到了非常大的降低。最后,在得到系数矩阵与向量的乘积后,便可以代入迭代求解算法中进行迭代求解。

4.1 直接微分法

将ACA算法引入基于直接微分法的边界元声学灵敏度分析中,具体算法流程如下。

(1) 采用ACA-BEM算法,同时计算出式(6,14)中的右手矩阵向量的乘积 $\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 和 $\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 。

(2) 对于系数矩阵 \mathbf{A} 中的近场子矩阵采用常规方法计算出对应的边界积分项,对于远场子矩阵计算出 \mathbf{U} 和 \mathbf{V} ,并将这些结果存储于内存中。

(3) 使用迭代求解算法,并利用步骤(2)中保存的数据,求解式(6)得到所有的未知边界状态值。

(4) 采用ACA-BEM算法计算出式(14)中的

右手矩阵向量的乘积和 $-\dot{\mathbf{H}}\mathbf{p} + \dot{\mathbf{G}}\mathbf{q}$, 然后结合步骤(1)中 $\mathbf{B}\dot{\boldsymbol{\phi}}$ 的结果得到式(14)的右手向量。

(5) 使用迭代求解算法, 并利用步骤(2)中保存的数据, 求解式(14)得到所有的未知边界灵敏度值。

(6) 分别采用式(2, 11)的离散形式, 并取其中的系数 $C(x)$ 为 1, 计算出所有域内关注点处的声压值及其灵敏度值。

(7) 代入目标函数的灵敏度表达式(8)求得目标函数对设计变量的灵敏度值。

4.2 伴随变量法

将 ACA 算法引入基于伴随变量法的边界元声学灵敏度分析中, 具体算法流程如下。

(1)~(3) 等同于 4.1 中的步骤(1)~(3)。

(4) 采用 ACA-BEM 算法计算出式(19)中的右手矩阵向量的乘积 $\mathbf{B}\mathbf{t}$, 然后得到式(19)的右手向量。

(5) 使用迭代求解算法, 并利用步骤(2)中保存的数据, 求解式(19)得到所有未知边界伴随变量值。

(6) 分别计算出声压和伴随变量的边界梯度值。

(7) 代入目标函数的灵敏度表达式(18), 求得目标函数对设计变量的灵敏度值。

5 数值算例分析

将使用数值算例来验证本文构造的快速声学灵敏度分析方法的准确性、高效性以及在大规模声场问题的最优化分析中的应用潜力。计算程序采用 Fortran 95 编写, 并且所有计算均在配置为 Intel® Core™ i5-3210 CPU 2.5GHz 和 RAM 4.0GB 的个人计算机上进行。利用常量单元离散模型边界, 树结构中叶子节点最多包含的边界单元数目为 20,

迭代求解器 GMRES 的收敛残差设为 10^{-3} , ACA 算法的误差门限设为 $\epsilon=10^{-5}$ 。算例中的声学介质为空气, 其密度为 1.2 kg/m^3 , 声波的传播速度为 340 m/s 。为了易于比较直接微分法和伴随变量法的分析结果, 将目标函数式(7)确定为

$$I = \int_{\Omega} p(x) \delta(x-z) d\Omega = p(z), \quad z \in \Omega \quad (23)$$

因此, 目标函数的灵敏度为

$$\dot{J} = \dot{p}(z) \quad (24)$$

在此情况下, 伴随方程应定义为

$$\begin{cases} \nabla^2 \lambda(x) + k^2 \lambda(x) + \delta(x-z) = 0, & x, z \in \Omega \\ \lambda(x) = 0, & x \in \Gamma_p \\ \partial \lambda(x) / \partial n = 0, & x \in \Gamma_q \end{cases} \quad (25)$$

5.1 刚性球面的散射声场的灵敏度分析

在声学灵敏度分析中, 将刚性球的半径 a 设定为设计变量, 并取 $a=1.0 \text{ m}$; 沿 $+z$ 方向的平面入射波的振幅取为 $p_0=1.0 \text{ Pa}$ 。球面离散成 3200 个常量三角形单元。图 1 和图 2 显示的是入射波的波数分别为 0.5 和 $\pi \text{ m}^{-1}$ 时, 距离球心 $r=6.0 \text{ m}$, 且位于面 yz 上的一系列域内点处的声压灵敏度的数值解与理论解的对比。考虑到需同时计算多个域内点处的声压灵敏度值, 本算例采用直接微分法(DDM)。图中 BM 表示 Burton-Miller 边界积分方程。从图 1 可以看出, 当入射波的波数与常规边界积分方程所对应的虚假特征波数不一样时, 利用常规边界积分方程得到的数值结果与理论解吻合得非常好。从图 2 可以看出, 当入射波的波数为常规边界积分方程所对应的虚假特征波数时, 得到的数值结果与理论解有很大的偏差; 但是, 使用 Burton-Miller 边界积分方程却总能够得到很好的数值结果。

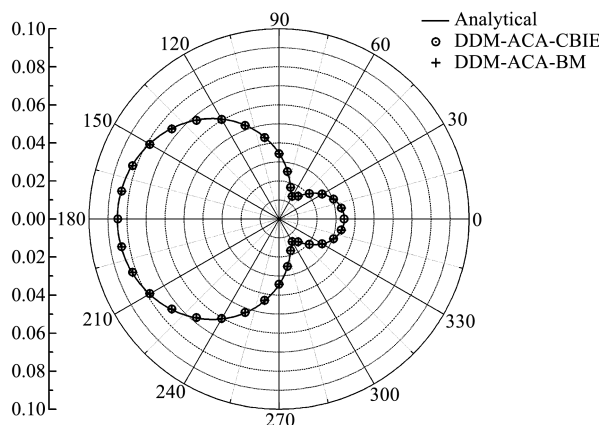


图 1 $|\partial p_s(r, \theta) / \partial a|$ 的分布图 ($r=6.0 \text{ m}, k=0.5 \text{ m}^{-1}$)

Fig. 1 Angular distribution of $|\partial p_s(r, \theta) / \partial a|$

at $r=6.0 \text{ m}, k=0.5 \text{ m}^{-1}$

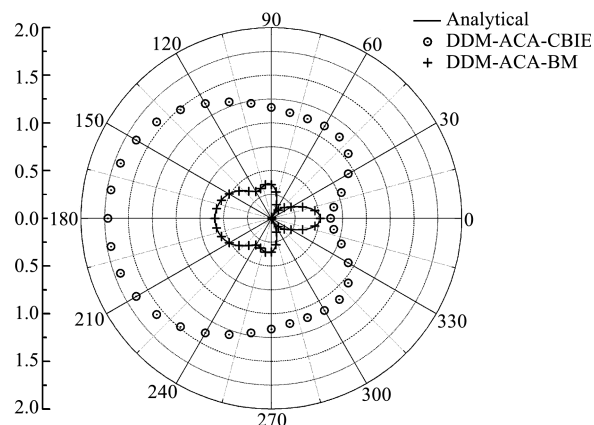


图 2 $|\partial p_s(r, \theta) / \partial a|$ 的分布图 ($r=6.0 \text{ m}, k=\pi \text{ m}^{-1}$)

Fig. 2 Angular distribution of $|\partial p_s(r, \theta) / \partial a|$

at $r=6.0 \text{ m}, k=\pi \text{ m}^{-1}$

5.2 脉动球辐射声场的灵敏度分析

在声学灵敏度分析中,将脉动球的半径 a 设定为设计变量,并取 $a=1.0\text{ m}$;球面上各质点的径向速度取为 $v_n=1.0\text{ m/s}$;径向速度的灵敏度值取为 $\partial v_n/\partial a=1.0\text{ s}^{-1}$ 。球面离散成 3200 个常量三角形单元。图 3 和图 4 显示的是距离球心 $r=6.0\text{ m}$ 的一个域内点处的声压灵敏度随波数变化情况的对比,其中,图 3 显示的是实部情况,图 4 显示的是虚部情况。从图 3 和图 4 可以看出,基于常规边界积分方程的直接微分法 (DDM) 和伴随变量法 (AVM) 的声学灵敏度分析结果,在整个关注的波数范围内的大部分区域均与理论解吻合得非常好;但是,在虚假特征波数附近,数值结果会发生跳跃从而与理论解有非常大的偏差。然而,利用 Burton-Miller 边界积分方程进行数值计算,则在整个波数范围内都能够得到唯一的正解。

5.3 收敛性与计算效率分析

进一步利用脉动球算例来比较基于常规与 ACA 边界元法的声学灵敏度分析方法的求解精度和效率。分析中的声波波数为 $k=0.5\text{ m}^{-1}$,相对

误差是通过比较距离球心 $r=6.0\text{ m}$ 处的域内点的声压灵敏度值得到,其计算方式为

$$\delta = |(p_{\text{num}} - p_{\text{anal}}) / p_{\text{anal}}| \quad (26)$$

式中 p_{num} 和 p_{anal} 分别为数值解和解析解。

图 5 和图 6 中,CBEM-LU 和 CBEM-GMRES 分别表示基于 LU 分解法和 GMRES 迭代法的常规边界元法的分析结果。从图 5 可以看出,基于 ACA 边界元法的声学灵敏度分析精度与基于常规边界元法的分析精度非常接近,且随着单元数的增加,相对误差下降很快。从图 6 可以看出,ACA 边界元法的求解效率较之常规边界元法要高很多。例如,当边界单元数为 11676 时,在直接微分法中,基于 LU 分解法和 GMRES 迭代法的常规边界元法的计算时间分别约为 817.0 s 和 385.2 s,而 ACA 边界元法的计算时间仅约为 133.9 s;在伴随变量法中,基于 LU 分解法和 GMRES 迭代法的常规边界元法的计算时间分别约为 877.5 s 和 417.6 s,而 ACA 边界元法的计算时间仅约为 142.4 s。另外还可以看出,基于伴随变量法的声学灵敏度分析效率要略低于基于直接微分法的分析效率。这是

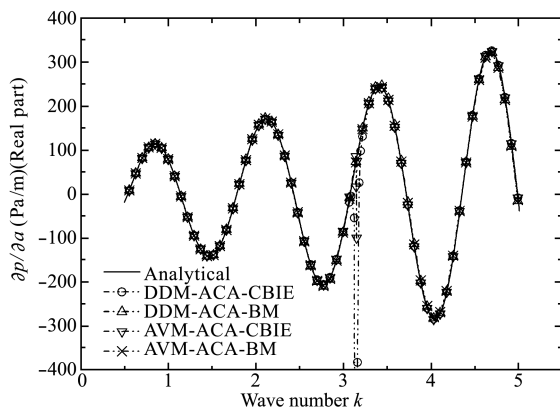


图 3 脉动球声压灵敏度的实部对比
Fig. 3 Real part of the solutions for the pulsating sphere example

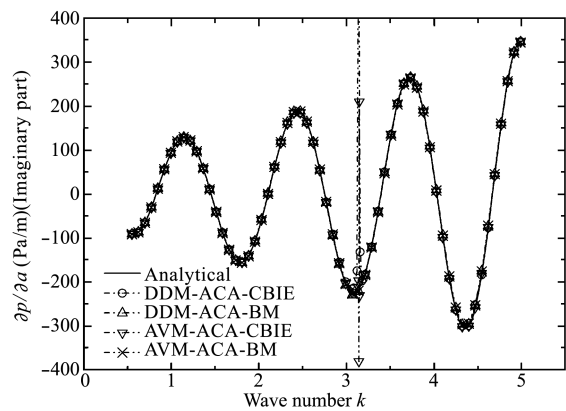


图 4 脉动球声压灵敏度的虚部对比
Fig. 4 Imaginary part of the solutions for the pulsating sphere example

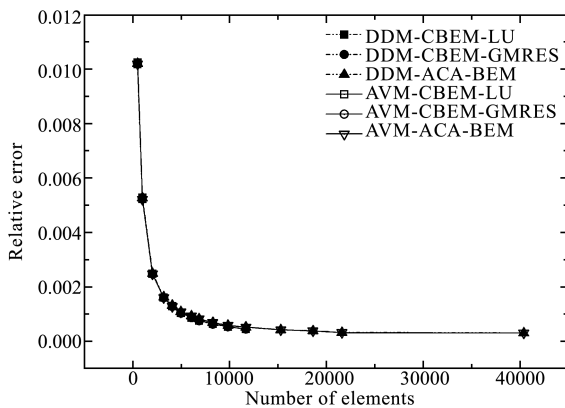


图 5 相对误差的比较
Fig. 5 Comparison of the relative errors

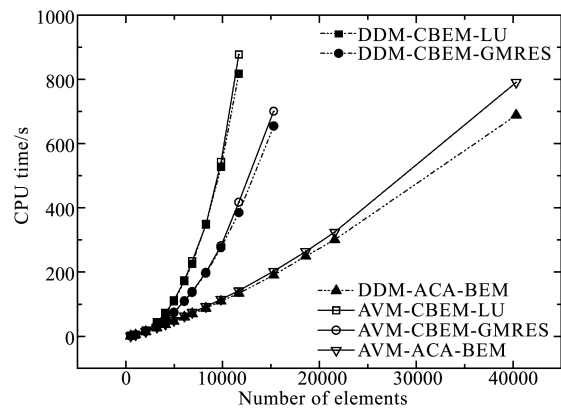


图 6 计算时间的比较
Fig. 6 Comparison of CPU times

由于较之直接微分法,伴随变量法需额外求解声压和伴随变量的边界梯度值的缘故。然而,当设计变量较多时,直接微分法的求解效率会随着设计变量的增加而迅速变差,这是由于针对每个设计变量,直接微分法都需要求解出相应的未知边界和域内灵敏度值的缘故。但是,伴随变量法由于与设计变量的数目是非相关的,因而计算量并不会随着设计变量的增加而迅速增加,故更适用于多设计变量的灵敏度分析。

6 结 论

本文基于自适应交叉近似边界元法,分别对声学灵敏度分析中常用的直接微分法和伴随变量法进行加速处理,从而构造出了一组快速声学灵敏度分析方法,克服了基于常规边界元法的声学灵敏度分析所遇到的高计算量和高存储量问题。利用数值算例验证了所提出方法的计算精度和求解效率,以及在大规模声学灵敏度分析中的应用潜力,从而为大规模声场问题的最优化提供了基础。

参考文献(References):

- [1] Greengard L, Rokhlin V. A fast algorithm for particle simulations[J]. *Journal of Computational Physics*, 1987, **73**(2):325-348.
- [2] Nishimura N. Fast multipole accelerated boundary integral equation methods[J]. *ASME Applied Mechanics Reviews*, 2002, **55**(4):299-324.
- [3] 姚振汉, 王海涛, 王朋波, 等. 固体力学中快速多极边界元法研究进展[J]. *中国科学技术大学学报*, 2008, **38**(1):1-17. (YAO Zhen-han, WANG Hai-tao, WANG Peng-bo, et al. Investigations on fast multipole BEM in solid mechanics[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2008, **38**(1):1-17. (in Chinese))
- [4] 王雪仁, 季振林. 快速多极边界元法应用于预测消声器的声学性能[J]. *中国科学技术大学学报*, 2008, **38**(2):201-214. (WANG Xue-ren, JI Zhen-lin. Application of FMBEM to predict silencer acoustic performance[J]. *Journal of University of Science and Technology of China*, 2008, **38**(2):201-214. (in Chinese))
- [5] Liu Y J. *Fast Multipole Boundary Element Method* [M]. Cambridge University Press, 2009.
- [6] 姚振汉, 王海涛. 边界元法[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010. (YAO Zhen-han, WANG Hai-tao. *Boundary Element Method* [M]. Beijing: Higher Education Press, 2010. (in Chinese))
- [7] Zheng C J, Chen H B, Matsumoto T, et al. Three dimensional acoustic shape sensitivity analysis by means of adjoint variable method and fast multipole boundary element approach[J]. *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, 2011, **79**(1):1-29.
- [8] Zheng C J, Matsumoto T, Takahashi T, et al. A wide-band fast multipole boundary element method for three dimensional acoustic shape sensitivity analysis based on direct differentiation method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2012, **36**(3):361-371.
- [9] Bebendorf M, Rjasanow S. Adaptive low-rank approximation of collocation matrices[J]. *Computing*, 2003, **70**(1):1-24.
- [10] Kim NH, Dong J. Shape sensitivity analysis of sequential structural-acoustic problems using FEM and BEM[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2006, **290**(1-2):192-208.
- [11] Burton A J, Miller G F. The application of integral equation methods to the numerical solution of some exterior boundary-value problems[J]. *Proceedings of the Royal Society of London-A*, 1971, **323**(1553):201-210.
- [12] Amini S, Harris P J. A comparison between various boundary integral formulations of the exterior acoustic problems[J]. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 1990, **84**(1):59-75.
- [13] Matsumoto T, Zheng C J, Harada S, et al. Explicit evaluation of hypersingular boundary integral equation for 3-D Helmholtz equation discretized with constant triangular element [J]. *Journal of Computational Science and Technology*, 2010, **4**(3):194-206.
- [14] Haug E J, Choi K K, Komkov V. *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems* [M]. Academic Press, 1986.
- [15] Zheng C J, Matsumoto T, Takahashi T, et al. Boundary element shape design sensitivity formulation of 3D acoustic problems based on direct differentiation of strongly-singular and hypersingular boundary integral equations[J]. *Transactions of JSME, Series C*, 2010, **76**(771):2899-2908.
- [16] Zheng C J, Matsumoto T, Takahashi T, et al. Explicit evaluation of hypersingular boundary integral equations for acoustic sensitivity analysis based on direct differentiation method[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2011, **35**(11):1225-1235.

Perturbation stochastic Cell-Based smoothed finite element method for laminated composite plates

ZHOU Li-ming, MENG Guang-wei, LI Peng, LI Feng*, LI Xiao-lin
(School of Mechanical Science and Engineering, Jilin University, Changchun 130025, China)

Abstract: The randomness is the inherent characteristics of the practical engineering structures, and it has great practical significance for the reliability design of the engineering structures to describe the random response and statistics of response of the structures with random parameters truly. The smoothed finite element formulations of laminated composite plates based on the first-order shear deformation theory were derived adopting quadrilateral element the based on Cell-Based smoothed finite element, and the demand of the mesh generation was decreased so that the elements are allowed to be of arbitrary shapes, the shear locking was eliminated by using discrete shear gap. The equilibrium equation of the perturbation random smoothed finite element and the numerical characteristics of structural random responses were derived by combining the perturbation method and random field theory. The random responses of the laminated composite plates with the random material properties were solved, and the numerical results indicate that the approach proposed is correct and feasible.

Key words: Perturbation stochastic Cell-Based smoothed finite element method; shear locking; gaussian random field; laminated composited plates

~~~~~  
(上接第 418 页)

## Fast acoustic design sensitivity analysis based on ACA-BEM

ZHENG Chang-jun\*, CHEN Lei-lei, CHEN Hai-bo  
(Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei 230027, China)

**Abstract:** A set of fast acoustic design sensitivity analysis approaches are developed in this paper based on the boundary element method accelerated by the adaptive cross approximation (ACA). Both the direct differentiation method and the adjoint variable method are implemented in the design sensitivity analysis. Since the compressed coefficient matrices can be obtained in the ACA before the iterative solution procedure, the ACA can be adopted to conquer not only the high storage requirement but also the high computational cost of the conventional boundary element method. Moreover, the compressed matrices are re-used in the acoustic design sensitivity analysis in order to make the developed approaches more efficient. Numerical examples are used to demonstrate the accuracy and efficiency of the developed approaches, and also the potential in large-scale acoustic optimization problems.

**Key words:** boundary element method; adaptive cross approximation; acoustic design sensitivity analysis; direct differentiation method; adjoint variable method