文章编号: 1001-0920(2009)07-1065-05

基于期望值-混合熵的区间概率模糊随机多准则决策方法

王坚强, 龚　岚
(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘　要: 定义了区间概率模糊随机变量及其期望值和混合熵. 针对准则权重确知并且准则值为区间概率模糊随机变量的多准则决策问题, 提出一种基于期望值-混合熵的决策方法. 该方法首先给出了区间概率模糊随机变量的期望值-混合熵度量; 然后基于此度量建立优化模型, 通过计算得到各方案的期望值-混合熵区间; 再采用可能度的方法得到方案集的排序. 最后通过实例说明了该方法的有效性和可行性.

关键词: 区间概率模糊随机变量; 期望值; 混合熵; 多准则决策
中图分类号: C934　　**文献标识码**: A

Interval probability fuzzy random multi-criteria decision-making approach based on expectation-hybrid entropy

WANG Jian-qiang, GONG Lan
(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: WANG Jian-qiang, E-mail: jqwang@csu.edu.cn)

Abstract: Random variable with interval probability, its expectation and hybrid entropy are defined. For a kind of multi-criteria decision-making problem, in which the criteria weights are precisely known and the criteria values are interval probability fuzzy random variable, an approach based on expectation-hybrid entropy is proposed. In this approach, a metric for interval probability fuzzy random variable called expectation-hybrid entropy is defined. By constructing the optimization model, the interval of expectation-hybrid entropy of each alternative is obtained. Then the possibility degree is utilized to rank all the alternatives. Finally, an example shows the feasibility and effectiveness of the method.

Key words: Interval probability fuzzy random variable; Expectation; Hybrid entropy; Multi-criteria decision-making

1　引　　言

多准则决策广泛存在于社会、经济、管理等多个领域中. 由于客观事物的复杂性以及决策者认识的模糊性, 不确定型多准则决策问题已成为现代决策科学中的一个研究热点. 不确定性主要表现为模糊性和随机性. 关于模糊或随机多准则决策的问题已取得了不少的研究成果[1-4]. 但是仅仅模糊性或随机性还不能完全模拟现实不确定的决策环境, 在决策过程中, 常常还会面临一种混合的不确定环境, 即模糊性和随机性同时存在. 模糊随机问题主要分为 3 类, 即模糊事件-精确概率、清晰事件-模糊概率和模糊事件-模糊概率. 目前对于模糊随机问题的研究主要集中在第 1 类[5-10]. 对于第 2 和第 3 类的模糊随机问题研究, 还只见于对其变量的数学特征的探讨[11,12], 而针对其在多准则决策领域方面的研究较少. 后两类模糊随机问题研究的关键在于对概率不确定性的探讨. 随机多准则决策中的概率是在理想条件下, 可足够多次重复实验的某随机事件发生的频度, 刻画了事件发生的可能性的大小. 但是在现实生活中, 由于环境的复杂性和不确定性, 事件的发生都会受许多不可知因素的影响, 任何事件都不可能在完全一致的条件下多次重复, 因此理想实验条件下概率的精确性在现实生活中失去了意义.

事实上, 对复杂和不确定环境的适应使得人们更习惯于在判断和决策过程中采用模糊的思维方式, 因此用不确定的变量代替精确数来表示事件的概率更符合现实需求. 本文则针对准则权重确知、准则值为区间概率模糊随机变量, 即模糊事件-模糊概

收稿日期: 2008-07-07; **修回日期**: 2008-11-16.
基金项目: 国家自然科学基金重点项目(70771115); 湖南省科学计划项目(2008FJ3128).
作者简介: 王坚强(1963 —), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究; 龚岚(1984 —), 女, 湖南邵阳人, 硕士, 从事决策理论与应用、信息管理等研究.

率的多准则决策问题,提出了一种基于期望值-混合熵的决策方法.

2 区间概率模糊随机变量及期望值-混合熵

本文仅考虑离散概率空间的情况,若无特别说明,则文中所提到的概率空间均为离散概率空间.

定义 1 设 Ω 为样本空间, A 为事件域,对于任意随机事件 $\omega \in A$,定义函数 $\Pr: \omega \to I$,其中 I 是 $[0,1]$ 上的所有闭区间构成的集合,记 $\Pr(\omega) = [\Pr(\omega)^-, \Pr(\omega)^+]$. 若 $\Pr(\omega)$ 满足 $0 \le \Pr(\omega)^- < \Pr(\omega)^+ \le 1$, $\Pr(\Omega)^- \le 1$, $\Pr(\Omega)^+ \ge 1$,则称 $\Pr(\omega)$ 为随机事件 ω 的区间概率, $\Pr$ 为 (Ω, A) 上的概率, $(\Omega, A, \Pr)$ 为区间概率空间.

定义 2 设 ξ 是一个从区间概率空间 $(\Omega, A, \Pr)$ 到模糊数集合的函数,并且对 R 上的任何 Borel 集 B, $\mathrm{Pos}\{\xi(\omega) \in B\}$ 和 $\mathrm{Pos}\{\Pr(\omega) \in B\}$ 是 ω 的可测函数,则称 ξ 为一个区间概率模糊随机变量. 当 $(\Omega, A, \Pr)$ 退化为概率空间时,称 ξ 为一个确定概率模糊随机变量.

例如,式(1)为一个区间概率模糊随机变量,其中,三角模糊数 (a_i, b_i, c_i) 表示其第 i 个状态的值,区间数 $[\Pr^-(\omega_i), \Pr^+(\omega_i)]$ 表示第 i 个状态的概率.

$$\xi = \begin{cases} (a_1, b_1, c_1), [\Pr^-(\omega_1), \Pr^+(\omega_1)]; \\ (a_2, b_2, c_2), [\Pr^-(\omega_2), \Pr^+(\omega_2)]; \\ \cdots \\ (a_n, b_n, c_n), [\Pr^-(\omega_n), \Pr^+(\omega_n)]. \end{cases} \tag{1}$$

定义 3 设 ξ 是确定概率模糊随机变量,如果下式右端两个积分中至少有一个为有限,则称 $E(\xi) = \int \Pr(\omega) E(\xi(\omega)) \mathrm{d}\omega$ 为确定模糊概率随机变量 ξ 的期望值. 其中

$$E(\xi(\omega)) = \int_0^{+\infty} \mathrm{Cr}\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \ge t\} \mathrm{d}t - \int_{-\infty}^{0} \mathrm{Cr}\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \le t\} \mathrm{d}t, \tag{2}$$

$\mathrm{Cr}\{\cdot\}$ 表示可信度.

模糊性和随机性这两种不确定性同时存在于区间概率模糊随机变量中,在对其不确定性进行测量时,需要采用一个统一的测度将随机性和模糊性综合起来. Deluca 和 Termini 给出了一个合理的综合考虑随机性和模糊性引起的不确定性的公式,称为混合熵[14]. 本文则在此基础上,给出确定概率模糊随机变量的熵的定义.

定义 4 设 ξ 为确定概率模糊随机变量,则 ξ 的熵 $H(\xi)$ 定义为

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{r} \{ p_i E(\mu_i) \ln[p_i E(\mu_i)] + p_i[1 - E(\mu_i)] \ln p_i [1 - E(\mu_i)] \}. \tag{3}$$

其中: p_i 为 ξ 第 i 个状态的概率, $E(\mu_i)$ 为第 i 个模糊状态值隶属度的期望值, r 表示 ξ 状态的个数.

定义 5 设 ξ 是确定概率模糊随机变量, $E(\xi)$ 和 $H(\xi)$ 分别表示 ξ 的期望值和混合熵,则 ξ 的期望值-混合熵定义为

$$R(\xi) = \lambda E(\xi) - (1 - \lambda) H(\xi). \tag{4}$$

式中 $\lambda \in [0,1]$ 表示决策者对于确定概率模糊随机变量的期望值和不确定程度的平衡系数. 当 $\lambda > 0.5$ 时,表示在比较确定概率模糊随机变量过程中,决策者希望期望值的确定性程度能对结果影响比较大,其中 $\lambda = 1$ 表示完全取决于期望值;当 $\lambda < 0.5$ 时,表示决策者更多地考虑变量的不确定性,其中 $\lambda = 0$ 表示完全取决于熵;当 $\lambda = 0.5$ 时,表示决策者认为期望值和熵在确定概率模糊随机变量的比较过程中重要性相同.

3 区间概率模糊随机多准则决策方法

设某多准则决策问题,方案集为 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_s\}$,准则集为 $U = \{C_1, C_2, \cdots, C_m\}$,且各准则相互独立,准则权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_m)^{\mathrm{T}}$,方案 a_i 在准则 C_j 下的值为 x_{ij}, x_{ij} 是概率为区间数的随机变量. x_{ij} 的状态集为 $\Theta_{ij} = \{\theta_{ij1}, \theta_{ij2}, \cdots, \theta_{ijr}\}$,其中 r 为变量,表示 x_{ij} 的状态数, θ_{ijk} 可表示为 $\{x_{ijk}, p_{ijk}\}$. x_{ijk} $(1 \le i \le s, 1 \le j \le m, 1 \le k \le r)$ 为 x_{ij} 在状态 θ_{ijk} 下的值, x_{ijk} 为模糊数,记作 $(x_{ijk}^L, x_{ijk}^M, x_{ijk}^R)$; p_{ijk} 表示状态 θ_{ijk} 发生的概率, p_{ijk} 为区间数,记作 $[p_{ijk}^-, p_{ijk}^+]$. 试确定方案集的一个排序.

求解上述多准则决策问题的步骤如下:

Step1 对状态值进行规范化处理.

为了消除各准则的不同物理量纲对决策结果的影响,需要对决策信息中的状态值进行规范化处理. 设 $I_j (j = 1,2)$ 分别表示效益型与成本型准则的下标集,用下式规范状态值[13]:

$$i \in I_1, \begin{cases} r_{ijk}^L = x_{ijk}^L \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\| x_{ijk} \|)^2}, \\ r_{ijk}^M = x_{ijk}^M \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\| x_{ijk} \|)^2}, \\ r_{ijk}^R = x_{ijk}^R \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\| x_{ijk} \|)^2}; \end{cases} \tag{5}$$

$$i \in I_2, \begin{cases} r_{ijk}^L = 1/x_{ijk}^R \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left\| \frac{1}{x_{ijk}} \right\|\right)^2}, \\ r_{ijk}^M = 1/x_{ijk}^M \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left\| \frac{1}{x_{ijk}} \right\|\right)^2}, \\ r_{ijk}^R = 1/x_{ijk}^L \Big/ \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\left\| \frac{1}{x_{ijk}} \right\|\right)^2}. \end{cases} \tag{6}$$

其中

$$\| x_{ijk} \| = \sqrt{\frac{(x_{ijk}^L)^2 + (x_{ijk}^M)^2 + (x_{ijk}^R)^2}{3}}.$$

Step2　确定各准则的期望值-混合熵区间.

为方便起见,规范化处理后的状态值仍记作 x_{ij}. 根据期望值-混合熵的计算公式(4),建立优化模型如下:

$$\max R(x_{ij}) = \lambda E(x_{ij}) - (1-\lambda) H(x_{ij}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} E(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{r} p'_{ijk} \cdot E(x_{ijk}), \\ H(x_{ij}) = \\ -\sum_{k=1}^{r}\{p'_{ijk}E(x_{ijk})\ln[p'_{ijk}E(x_{ijk})] + \\ p'_{ijk}[1-E(x_{ijk})]\ln[p'_{ijk}(1-E(x_{ijk}))]\}, \\ E(x_{ijk}) = (x_{ijk}^L + 2x_{ijk}^M + x_{ijk}^R)/4, \\ p_{ijk}^- \le p'_{ijk} \le p_{ijk}^+, \\ \sum_{k=1}^{r} p'_{ijk} = 1. \end{cases} \tag{7}$$

求解式(7)得到各方案在各准则的期望值-混合熵最大值 $R^{\max}(x_{ij})$.

$$\min R(x_{ij}) = \lambda E(x_{ij}) - (1-\lambda) H(x_{ij}),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} E(x_{ij}) = \sum_{k=1}^{r} p'_{ijk} \cdot E(x_{ijk}), \\ H(x_{ij}) = \\ -\sum_{k=1}^{r}\{p'_{ijk}E(x_{ijk})\ln[p'_{ijk}E(x_{ijk})] + \\ p'_{ijk}[1-E(x_{ijk})]\ln[p'_{ijk}(1-E(x_{ijk}))]\}, \\ E(x_{ijk}) = (x_{ijk}^L + 2x_{ijk}^M + x_{ijk}^R)/4, \\ p_{ijk}^- \le p'_{ijk} \le p_{ijk}^+, \\ \sum_{k=1}^{r} p'_{ijk} = 1. \end{cases} \tag{8}$$

求解式(8)得到各方案在各准则的期望值-混合熵最小值 $R^{\min}(x_{ij})$.

这样便得到各准则的期望值-混合熵区间 $[R^{\min}(x_{ij}), R^{\max}(x_{ij})]$.

Step3　方案的排序.

$$R(x_i) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j \cdot R(x_{ij}). \tag{9}$$

根据式(9)对方案各准则值的期望值-混合熵进行加权集成,得到方案的综合期望值-混合熵区间,然后采用可能度法[15],对各方案的综合期望值-混合熵进行排序.

4　实例分析

某房地产开发商决定进行一个房地产开发项目. 现有 4 个城市可以考虑 $a_i(1 \le i \le 4)$,请有关专家从以下 4 个方面给出评价信息: C_1 为城市消费水平, C_2 为利润水平, C_3 为建筑成本, C_4 为工资水平. 由于是对未来不确定的环境作出判断,受到宏观环境经济和政治等因素的影响,因此以上准则均为随机变量. 准则权重分别为 $\omega_1 = 0.2$, $\omega_2 = 0.4$, $\omega_3 = 0.2$, $\omega_4 = 0.2$. 专家给出的具体评价信息如表 1 所示,试确定方案集的排序.

1) 对表 1 中的评价信息进行规范化处理,规范化信息如表 2 所示.

2) 计算方案中各准则的期望值-混合熵,其结果如表 3 所示.

3) 根据式(7)和(8),建立模型,求解得到各方案的综合期望值-混合熵.

$$R(a_1) = [-0.4812, -0.447],$$
$$R(a_2) = [-0.4598, -0.4113],$$
$$R(a_3) = [-0.4969, -0.4669],$$
$$R(a_4) = [-0.4852, -0.4517].$$

4) 利用可能度法,对方案进行排序.

各方案的综合期望值-混合熵区间的可能度矩阵为

表 1　项目评价信息表

方案	准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
a_1	{(7.9,8.1,8.5),[0.2,0.3]}	{(7,8,9),[0.5,0.7]}	{(182,190,195),[0.2,0.4]}	{(1,2,3),[0.5,0.7]}
	{(8.6,8.8,9.0),[0.7,0.8]}	{(6,7,8),[0.3,0.5]}	{(170,175,180),[0.5,0.7]}	{(3,4,5),[0.2,0.4]}
a_2	{(7.6,7.9,8.1),[0.4,0.6]}	{(3,4,5),[0.1,0.2]}	{(117,130,140),[0.1,0.3]}	{(5,6,7),[0.1,0.2]}
	{(8.1,8.3,8.6),[0.3,0.5]}	{(5,6,7),[0.7,0.9]}	{(142,150,155),[0.6,0.8]}	{(4,5,6),[0.7,0.9]}
a_3	{(7.2,7.5,7.7),[0.7,0.8]}	{(2,3,4),[0.2,0.4]}	{(138,150,158),[0.4,0.6]}	{(3,4,5),[0.1,0.3]}
	{(7.7,7.8,8.2),[0.1,0.3]}	{(1,2,3),[0.5,0.7]}	{(160,168,170),[0.3,0.5]}	{(4,5,6),[0.7,0.8]}
a_4	{(9.0,9.2,9.4),[0.3,0.4]}	{(5,6,7),[0.1,0.3]}	{(152,160,170),[0.2,0.3]}	{(2,3,4),[0.2,0.4]}
	{(8.4,8.7,9.0),[0.5,0.7]}	{(4,5,6),[0.6,0.8]}	{(170,175,188),[0.7,0.8]}	{(4,5,6),[0.5,0.7]}

表 2　规范化后的评价信息

方案	准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
a_1	{(11.88,12.18,12.79),[0.2,0.3]}, {(12.94,13.24,13.54),[0.7,0.8]}	{(16.81,19.22,21.62),[0.2,0.3]}, {(14.41,16.81,19.22),[0.7,0.8]}	{(10.67,10.22,9.96),[0.2,0.3]}, {(11.43,14.94,13.88),[0.7,0.8]}	{(14.01,21,01,42.02),[0.2,0.3]}, {(8.4,10.51,14.01),[0.7,0.8]}
a_2	{(11.43,11.88,12.18),[0.4,0.6]}, {(12.18,12.48,12.94),[0.3,0.5]}	{(7.20,9.61,12.01),[0.4,0.6]}, {(12.01,14.41,16.81),[0.3,0.5]}	{(16.6,14.94,13.88),[0.4,0.6]}, {(13.68,12.95,12.53),[0.3,0.5]}	{(6,7,8.4),[0.4,0.6]}, {(7,8.4,10.5),[0.3,0.5]}
a_3	{(10.83,11.28,11.58),[0.7,0.8]}, {(11.58,11.73,12.33),[0.1,0.3]}	{(4.80,7.20,9.61),[0.7,0.8]}, {(2.40,4.80,7.20),[0.1,0.3]}	{(14.08,12.95,12.29),[0.7,0.8]}, {(12.14,11.56,11.43),[0.1,0.3]}	{(8.4,10.5,14),[0.7,0.8]}, {(7,8.4,10.5),[0.1,0.3]}
a_4	{(13.54,13.84,14.14),[0.3,0.4]}, {(12.64,13.09,13.54),[0.5,0.7]}	{(12.01,14.41,16.81),[0.3,0.4]}, {(9.61,12.01,14.41),[0.5,0.7]}	{(12.78,12.14,11.43),[0.3,0.4]}, {(11.43,11.1,10.33),[0.5,0.7]}	{(10.5,14,21.01),[0.3,0.4]}, {(7,8.4,10.5),[0.5,0.7]}

表 3　方案准则的期望值-混合熵

方案	准则			
	C_1	C_2	C_3	C_4
a_1	[-0.5949, -0.5399]	[-0.6542, -0.6243]	[-0.6298, -0.6189]	[-0.6057, -0.5516]
a_2	[-0.6322, -0.6225]	[-0.5295, -0.4394]	[-0.5821, -0.5279]	[-0.5554, -0.4669]
a_3	[-0.5873, -0.5315]	[-0.603, -0.5595]	[-0.6279, -0.5964]	[-0.5878, -0.5499]
a_4	[-0.6161, -0.5854]	[-0.5883, -0.5343]	[-0.5939, -0.5393]	[-0.6276, -0.5997]

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0.2227 & 0.2882 \\ 1 & 1 & 0.8542 & 0.9012 \\ 0.7773 & 0.1548 & 1 & 0.5643 \\ 0.7118 & 0.0988 & 0.4357 & 1 \end{bmatrix}.$$

可能度矩阵 P 的排序向量为 $(0.2092, 0.3955, 0.2913, 0.2705)$. 从而可得方案期望值-混合熵的排序为 $R(a_2) \underset{0.8542}{\geq} R(a_3) \underset{0.5643}{\geq} R(a_4) \underset{0.7118}{\geq} R(a_1)$. 4 个城市的排序为 $a_1 \prec a_4 \prec a_3 \prec a_2$, 第 2 座城市进行该房地产项目开发为最佳方案.

5　结　论

本文定义了区间概率空间、区间概率模糊随机变量及其期望值和混合熵, 在此基础上针对准则权重确定且准则值为信息量完全的区间概率模糊随机变量的多准则决策问题, 提出了一种基于期望值-混合熵的决策方法, 并详细讨论了其实现步骤. 实例计算表明了该方法可行且有效. 在区域投资环境选择与评价、产品选型、投资组合、人员评估等相关决策领域, 具有广泛的应用价值.

参考文献(References)

[1] 徐泽水. 部分权重信息下对方案有偏好的多属性决策法[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 85-88.
(Xu Z S. Method for multi-attribute decision making with preference information on alternatives under partial weight information[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 85-88.)

[2] 曾玲, 曾三云. 给出方案优先序的模糊多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(5): 113-119.
(Zeng L, Zeng S Y. Fuzzy multiple attribute decision making method with alternative priority[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2007, 27(5): 113-119.)

[3] 罗党, 刘思峰. 灰色多指标风险型决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(8): 1057-1060.
(Luo D, Liu S F. Research on grey multi-criteria risk decision-making method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(8): 1057-1060.)

[4] 姚升保. 基于随机优势与概率优势的风险型多属性决策方法[J]. 预测, 2007, 26(3): 33-38.
(Yao S B. A method based on stochastic dominance and probability dominance for multi-attribute decision making under risk[J]. Forecasting, 2007, 26(3): 33-38.)

[5] Liu B D. Fuzzy random chance-constrained programming[J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(3): 713-720.

[6] Liu Y K, Liu B D. On minimum-risk problems in fuzzy random decision systems[J]. Computers & Operation Research, 2005, 32(2): 257-283.

[7] Luhandjula M K. Optimization under hybrid uncertainty[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2004, 146(2): 187-203.

[8] Katagiri H. A fuzzy random multiobjective 0-1 programming based on the expectation optimization model using possibility and necessity measures[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40(2): 411-421.

[9] Katagiri H, Sakawa M, Kato K, et al. Interactive multiobjective fuzzy random linear programming:

Maximization of possibility and probability [J]. European J of Operational Research , 2008 , 188(2) : 530-539.

[10] Ammar E E. On solutions of fuzzy random multiobjective quadratic programming with application in portfolio problem[J]. Information Sciences, 2008, 178(2) : 468-484.

[11] **吕恩琳, 钟佑明. 模糊概率随机变量**[J]. **应用数学和力学**, 2003, 24(4) : 434-440.
(Lv E L, Zhong Y M. Random variable with fuzzy probability[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(4) : 434-440.)

[12] **柳美, 孙玉琴, 李安贵. 模糊概率随机变量的数学期望和方差**[J]. **包头钢铁学院学报**, 2006, 25(3) : 296-298.
(Liu M, Sun Y Q, Li A G. Mathematical expectation and variance of random variable with fuzzy probability [J]. J of Baotou University of Iron and Steel Technology, 2006, 25(3) : 296-298.)

[13] **徐泽水. 基于期望值的模糊多属性决策法及其应用**[J]. **系统工程理论与实践**, 2004, 24(1) : 109-119.
(Xu Z S. Method based on expected values for fuzzy multiple attribute decision making problems with preference information on alternative [J]. Systems Engineering Theory & Practice, 2004, 24(1) : 109-119.)

[14] De Luca A, Termini S. A definition of nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory [J]. Information and Control, 1972, 20(2) : 301-312.

[15] **徐泽水, 达庆利. 区间数排序的可能度法及其应用**[J]. **系统工程学报**, 2003, 18(1) : 67-70.
(Xu Z S, Da Q L. Possibility degree method for ranking interval numbers and its application[J]. J of Systems Engineering, 2003, 18(1) : 67-70.)

(**上接第** 1064 **页**)

[2] DeVries J P. Elliptic elements in terms of small increments of position and velocity components [J]. AIAA Journal, 1963, 1(9) : 2626-2629.

[3] Tschauner J, Hempel P. Rendezvous with an elliptical orbital target [J]. Acta Astronautica, 1965, 11(2) : 104-109.

[4] Tschauner J. Elliptic orbit rendezvous [J]. AIAA Journal, 1967, 5(6) : 1110-1113.

[5] Melton G R. Time-explicit representation of relative motion between elliptical orbits [J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2000, 23(4) : 604-610.

[6] Broucke A R. Solution of elliptic rendezvous problem with the time as independent variable[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2003, 26(4) : 615-621.

[7] Shulman Y, Scott J J. Terminal rendezvous for elliptical orbits[C]. Proc of the 4th AIAA Aerospace Sciences Meeting. Los Angles, 1966: 533-544.

[8] Euler E A, Shulman Y. Second-order solution to the elliptical rendezvous problem[J]. AIAA Journal, 1967, 5(5) : 1033-1035.

[9] Gurfil P. Generalized solutions for relative spacecraft orbits under arbitrary perturbations [J]. Acta Astronautica, 2007, 60(2) : 61-78.

[10] Ross I M. Linearized dynamic equations for spacecraft subject to J2 perturbations[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2003, 26 (4) : 657-659.

[11] Schaub H. Relative orbit geometry through classical orbit element differences[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2004, 27(5) : 839-848.

[12] Gurfil P, Idan M, Kasdin N J. Neural adaptive control for deep-space formation flying [J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2003, 26(3) : 491-501.

[13] Humi M, Carter T. Rendezvous equations in a central-force field with linear drag[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2002, 25(1) : 47-79.

[14] Psiaki M L. Autonomous orbit determination for two spacecraft from relative position measurements[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 1999, 22(2) : 305-312.

[15] Alfriend K T, Yan H. Evaluation and comparison of relative motion theories[J]. J of Guidance, Control and Dynamics, 2005, 28(2) : 254-261.