文章编号：1001-0920(2009)08-1121-05

鲁棒线性优化问题研究综述

邓鹏华，刘 颖，毕义明，杨 萍
（第二炮兵工程学院 基础部，西安 710025）

摘 要：鲁棒优化(RO)是从计算复杂性的角度研究不确定优化模型鲁棒最优解的数学方法.从单阶段鲁棒优化和多阶段鲁棒优化两个方面对鲁棒线性优化(RLO)理论的研究进展进行综述,前者的研究主要基于不同形式的不确定集合,后者的研究则基于前者的方法.研究多阶段不确定决策中决策变量受不确定参数实现值影响的情况,其核心是影响函数连续时的仿射可调鲁棒对应模型和函数离散时的有限适应性模型.最后对 RLO 的研究前景作了展望.

关键词：不确定决策；单阶段鲁棒线性优化；多阶段鲁棒线性优化
中图分类号：O224 **文献标识码**：A

Survey on robust linear optimization

DENG Peng-hua, LIU Ying, BI Yi-ming, YANG Ping
(Department of Basic Science, The Second Artillery Engineering College, Xi'an 710025, China. Correspondent: DENG Peng-hua, E-mail: dengpenghua@yahoo.com.cn)

Abstract: Robust optimization is a mathematical method to address optimal solutions for the uncertain optimization models in terms of computational complexity. Main developments of robust linear optimization (RLO) are surveyed from two aspects, single-stage and multi-stage robust optimization. The former is based on various modeling forms of uncertainty set, while the latter investigates that the decision variablesent are depend on the realization of uncertainty parameters on the basis of the former theories, mainly involving affinely adjustable robust counterpart in the case of continuous dependent function and finite adaptability model in the case of discrete dependent function. Finally, the future researches of RLO are prospected.

Key words: Decision-making under uncertainty; Single-stage RLO; Multi-stage RLO

1 引 言

优化理论研究最为成熟的是凸优化[1].传统的凸优化模型是确定的,而现实世界本质上是不确定的.不确定性使得传统优化模型的最优解在不确定环境中可能为可行解但不再最优,或使原最优解变为非可行解.研究不确定性的基本途径是概率方法,Dantzig[2]和 Charnes 等[3]分别提出了随机规划和机会约束规划模型.Liu[4]突破了可行集的概念,代之以不确定环境,提出了相关机会规划.这几类随机模型均假定随机参数的概率分布已知.

在实际工程应用中,要得到随机参数的概率分布非常困难.首先是往往缺乏必要的历史数据;其次是实际问题中有多种形式的不确定性,仅用概率理论难以完全刻画.在经济和军事等领域,决策的鲁棒性至关重要.鲁棒优化(RO)理论是从计算复杂性的角度,研究参数在某个不确定集合内具有最坏情况值的不确定问题.RO 理论不仅考虑大规模问题的易处理性,而且强调通过概率保证控制解的鲁棒性与最优性之间的折衷程度[5-7].

本文对目前研究较为成熟的鲁棒线性优化(RLO)理论进行综述.首先阐述了单阶段不确定决策中的 RLO 理论,包括 Soyster 模型、基于椭球的不确定集合、基于基约束的 RLO 模型、基于一般范数的 RLO 模型和基于风险偏好的 RLO 模型;然后阐述了多阶段不确定决策中 RLO 的仿射可调鲁棒对应(AARC)模型和有限适应性(FA)模型;最后对 RLO 理论的发展作了总结和展望.

2 单阶段不确定决策的鲁棒线性优化

单阶段不确定决策的特征是只有一次决策,所有决策都同时进行,决策前不知有关不确定参数的任何信息,因此不存在修正问题.

2.1 Soyster 鲁棒线性优化模型

收稿日期：2008-10-12；**修回日期**：2009-02-23.
作者简介：邓鹏华(1983—),男,陕西洋县人,博士生,从事不确定决策、军事需求论证的研究；毕义明(1963—),男,山东阳信人,教授,博士生导师,从事不确定决策、作战建模与仿真等研究.

对于如下一般的不确定 LP 问题：

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j\in J}\tilde{a}_{ij}x_j \leqslant b_i,\ \forall\, i\in I,\tilde{a}_j\in K_j,$$
$$x_j \geqslant 0,\ \forall\, j\in J. \tag{1}$$

其中系数 A 具有列方向上的区间不确定性，A 的每一列都属于一个凸集 K_j. 该问题等价于如下问题：

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$
$$\text{s.t.}\ \max_{\tilde{a}_j\in K_j}\Big\{\sum_{j\in J}\tilde{a}_{ij}x_j\Big\} \leqslant b_i,\ \forall\, i\in I,$$
$$x_j \geqslant 0,\ \forall\, j\in J. \tag{2}$$

这便增加了问题的计算复杂性. 为此，Soyster 提出将 A 中所有值都用其最坏情况值代替并重新求解[8]，从而将不确定问题变为确定的 LP 问题. 假定 a_{ij}^{*} 为 a_{ij} 最坏情况值，则式(1) 可转化为

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j\in J}a_{ij}^{*}x_j \leqslant b_i,\ \forall\, i\in I,a_j\in K_j,$$
$$x_j \geqslant 0,\ \forall\, j\in J. \tag{3}$$

Soyster 模型同样适用于价值向量 C 不确定的线性 RO 问题. 它能处理参数的不确定性并保持线性性质，但因过多强调解的适用性和模型易处理性而牺牲了解的最优性，因此被认为过于保守[8].

2.2 Ben-Tal 和 Ghaoui 的改进模型

Ben-Tal 等[9-11] 和 Ghaoui 等[12,13] 针对 Soyster 模型的过分保守问题，分别提出将不确定系数看作未知概率分布的对称有界变量 $\tilde{a}_{ij}\in[\bar{a}_{ij}-\hat{a}_{ij},\bar{a}_{ij}+\hat{a}_{ij}]$，其中 $\bar{a}_{ij}$ 为不确定参数 $\tilde{a}_{ij}$ 的估计值. 基于椭球不确定集合，式(1) 可重新建模为

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j}\bar{a}_{ij}x_j+\sum_{j\in J_i}\hat{a}_{ij}y_{ij}+\Omega_i\sqrt{\sum_{j\in J_i}a_{ij}^2z_{ij}^2} \leqslant b_i,$$
$$-y_{ij}\leqslant x_j-z_{ij}\leqslant y_{ij},$$
$$\forall\, i,j\in J_i,\boldsymbol{x}\geqslant 0,\boldsymbol{y}\geqslant 0. \tag{4}$$

其中 Ω_i 为违反约束条件的概率参数. 对于模型的所有可行解而言，约束条件被违反的最大概率为 $\exp(-\Omega_i^2/2)$.

显然，式(4) 的可行解是式(1) 可行解的子集，因此前者在一定程度上减小了后者的保守性. 然而，在椭球不确定集合表示下，LP 的鲁棒对应(RC)(即式(4)) 为 SOCP，SOCP 的鲁棒等价为 SDP，而 SDP 的鲁棒等价问题是 NP-hard 问题. 因此，基于椭球不确定集的 RO 方法增加了计算复杂性. 另外，该模型无法控制解的鲁棒性与可行性之间的折衷程度，也无法处理离散优化问题.

2.3 解的鲁棒性控制模型

为解决 RO 模型中解的鲁棒性与可行性折衷问题，Bertsimas 提出一种新的模型[14]. 对于椭球不确定集合，令相对不确定性为

$$\mu_{ij}=(\tilde{a}_{ij}-\bar{a}_{ij})/\hat{a}_{ij}\in[-1,1].$$

一般只有部分参数是不确定的，故引入参数 Γ_i，称为约束 i 的不确定代价，使基约束 $\sum_{j\in J}|\mu_{ij}|\leqslant\Gamma_i$. 显然，当 $\Gamma_i=0$ 时，退化为确定性模型；当 $\Gamma_i=|J_i|$ 时，为 Soyster 模型，它产生最保守的解；当 $\Gamma_i\in(0,|J_i|)$ 时，由 Γ_i 控制解的鲁棒性与最优性的折衷.

若 Γ_i 为整数，则表示存在不确定的参数个数；否则，表示有 $\lfloor\Gamma_i\rfloor$ 个不确定参数，另有一个参数 $\tilde{a}_{it}$，其变化幅度为 $(\Gamma_i-\lfloor\Gamma_i\rfloor)\hat{a}_{it}$.

建立不确定集合

$$A=\{\tilde{a}_{ij}\mid\tilde{a}_{ij}=\bar{a}_{ij}+\hat{a}_{ij}\mu_{ij},\forall\, i,j,\boldsymbol{\mu}\in H\}, \tag{5}$$

其中

$$H=\Big\{\boldsymbol{\mu}\ \Big|\ |\mu_{ij}|\leqslant 1,\forall\, i,j,\sum_{j=1}^{|J_i|}|\mu_{ij}|\leqslant\Gamma_i,\forall\, i\Big\}. \tag{6}$$

由此式(2) 可变为

$$\max\Big\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\ \Big|\ \bar{\boldsymbol{a}}'_i\boldsymbol{x}+\max_{\mu_i\in H_i}\sum_{j=1}^{|J_i|}\hat{a}_{ij}x_j\mu_{ij}\leqslant b_i,\forall\, i,$$
$$\boldsymbol{x}\in X\Big\}. \tag{7}$$

其中 H_i 满足条件(6). 对于某一给定的 i，式(7) 约束不等式左边第 2 项可转化为

$$\max_{\mu_i\in H_i}\Big\{\sum_{j=1}^{|J_i|}\hat{a}_{ij}x_j\mu_{ij}\ \Big|\ \sum_{j=1}^{|J_i|}\mu_{ij}\leqslant\Gamma_i,0\leqslant\mu_{ij}\leqslant 1,\forall\, j\Big\}. \tag{8}$$

于是，式(2) 可转化为如下线性形式：

$$\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};$$
$$\text{s.t.}\ \sum_{j}\bar{a}_{ij}x_j+\mu_i\Gamma_i+\sum_{j\in J_i}p_{ij}\leqslant b_i,\forall\, i,$$
$$\mu_i+p_{ij}\geqslant\hat{a}_{ij}y_j,\forall\, i,j\in J_i,$$
$$-y_j\leqslant x_j\leqslant y_j,\forall\, j,l_j\leqslant x_j\leqslant u_j,\forall\, j,$$
$$p_{ij}\geqslant 0,\forall\, i,j\in J_i,y_j\geqslant 0,\forall\, j,$$
$$\mu_i\geqslant 0,\forall\, i. \tag{9}$$

设 μ_{ij} 为$[-1,1]$上对称分布的随机变量，要使违反不确定约束 $\sum_{j\in J}\tilde{\boldsymbol{a}}_i\boldsymbol{x}\leqslant b_i$ 的最大概率为 ε_i，则 Γ_i 的最小值为

$$1+\Phi^{-1}(1-\varepsilon_i)/\sqrt{|J_i|}.$$

基于基约束不确定集合的 RLO 模型的 RC 为线性模型，因此具有明显的计算优势，适合于解决离散不确定 RLO 问题[15,16]. 然而，这些模型中不确定数据之间是完全独立的. 文献[14] 将上述模型推广到不确定数据相关的情况，证明同样可保持原有优化

问题的线性特性.

2.4　基于一般范数的 RLO 模型

文献[17]将不确定集合定义为

$$\mathscr{U}=\{\widetilde{A}\mid \|M(\mathrm{vec}(\widetilde{A})-\mathrm{vec}(\bar{A}))\|\leqslant\Delta\}.$$

其中：M 为可逆矩阵，$\bar{A}$ 为确定集合，$\|\cdot\|$ 为某种形式的范数. 则式(1)可转化为如下形式：

$$\begin{aligned}&\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x};\\&\mathrm{s.t.}\ \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}x+\Delta\|(M^{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{x}_i\|^{*}\leqslant b_i,\\&\quad \boldsymbol{x}\in X,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned}\tag{10}$$

其中：$\|\cdot\|^{*}$ 为对偶范数；$\boldsymbol{x}_i\in\boldsymbol{R}^{(m\times n)\times1}$ 为向量，其第$(i-1)n$ 至第 $i\times n$ 个元素属于 $\boldsymbol{R}^{n\times1}$，其他元素为 0.

基于范数的不确定集合将产生一个对应范数约束的 RC 问题. 文献[17]指出：当范数类型为 1 范数或 ∞ 范数(二者对偶)时，其对应的鲁棒问题可表示为线性规划模型；当范数类型为欧氏范数时，则其 RC 为二次锥问题.

对于鲁棒解可行性的概率保证问题，文献[17]给出了下述结论：假定 $\widetilde{A}$ 为任意分布，期望 $\bar{A}\in\boldsymbol{R}^{m\times n}$ 和协方差阵 $\boldsymbol{C}\in\boldsymbol{R}^{(m\times n)(m\times n)}$ 已知，允许 $\widetilde{A}$ 中各元素具有相关性. 令 $\boldsymbol{x}^{*}\in\boldsymbol{R}^{n\times1}$ 为模型(10)的最优解，$\boldsymbol{x}_i^{*}\in\boldsymbol{R}^{(m\times n)\times1}$ 为一个向量，其第$(i-1)n$ 至第 $i\times n$ 个元素为 $\boldsymbol{x}^{*}$，其他元素为 0. 则有：

1) $\boldsymbol{x}^{*}$ 对第 i 个约束中不确定参数的鲁棒概率满足

$$P(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{*}\leqslant b_i)\geqslant 1-\frac{1}{1+\Delta^2(\|\boldsymbol{C}^{1/2}\boldsymbol{x}_i^{*}\|^{*}/\|\boldsymbol{C}^{1/2}\boldsymbol{x}_i^{*}\|_2)^2};\tag{11}$$

2) 如果基于欧氏范数定义不确定集合，则有

$$P(\boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}^{*}\leqslant b_i)\geqslant 1-1/(1+\Delta^2).\tag{12}$$

基于范数不确定集合的鲁棒优化模型是从更广义的层次提出的，它不同于前面基于椭球不确定集合和基于基约束鲁棒线性优化模型.

2.5　基于风险偏好的 RLO 模型

上述鲁棒优化模型都与参数不确定集合有关，尽管集合表示形式不同，但集合中的元素在问题求解中保持不变，无法反映不同方案的风险. 为此，文献[18]提出将线性优化中的不确定集合与风险偏好——表示为一致风险测度(CRM)联系起来. [19]进一步利用不确定集合构建了 CRM，并证明对于 RLO，不确定集合与 CRM 构成双射关系[14]. [20]将 CRM 扩展到更一般的风险测度——凸风险测度(满足凸性、单调性和平移不变性的风险测度)，提出 4 种形式的鲁棒定义，并将它们与不同的凸风险测度相对应，给出了相应的概率保证.

基于风险偏好的 RLO 模型将不确定约束 $\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b},\forall\boldsymbol{a}\in\mathscr{U}$ 变为

$$\boldsymbol{a}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}+\beta(\boldsymbol{a}),\ \forall\boldsymbol{a}\in\boldsymbol{R}^{n}.$$

其中 $\beta(\boldsymbol{a})$ 为惩罚函数. 则上述鲁棒优化问题相当于：若 $\boldsymbol{a}\in\mathscr{U}$，则 $\beta(\boldsymbol{a})=0$；否则，$\beta(\boldsymbol{a})=+\infty$. 上述模型是该模型的特例，从而该模型更少保守性.

3　多阶段决策的鲁棒线性优化

实际决策往往是序列决策，决策者下一阶段的决策基于上一阶段的先验信息，除首次决策外，后面各决策变量的确定可能受历史数据的影响.

不确定序列决策通常采用动态规划(DP)或马尔可夫决策过程(MDP)及部分可观测 MDP(POMDP)[21]等方法来处理. DP 在迭代中不出现维数灾时才能处理，且对不确定集合的结构非常敏感[22]；MDP 和 POMDP 用于决策时，需要已知不确定参数分布. 为此，许多学者将鲁棒优化方法扩展到多阶段决策问题.

3.1　仿射可调鲁棒对应及改进方法

Ben-Tal 等[23]学者称求得不确定参数信息前必须确定的变量为不可调变量(NAV)；在一些不确定参数确定后再求取，或不直接影响决策且可进行调整的变量为可调变量(AV). 假定不可调变量完全无法调整，可调变量依赖于所有不确定数据的实现，则变量向量可表示为 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}},\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}]$，$\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}$ 为 NAV，$\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}$ 为 AV. 以 $\mathscr{Z}$ 表示参数不确定集合，由于变量 $\boldsymbol{v}$ 为 AV，不直接影响决策，则一般线性不确定优化模型为

$$\max\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mid U\boldsymbol{u}+V\boldsymbol{v}\leqslant\boldsymbol{b},[U,\boldsymbol{b}]\in\mathscr{Z}\}.\tag{13}$$

定义其可调鲁棒对应(ARC)为

$$\max_{u}\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mid\forall[U,V,\boldsymbol{b}]\in\mathscr{Z},\exists\,\boldsymbol{v}:U\boldsymbol{u}+V\boldsymbol{v}\leqslant\boldsymbol{b}\},\tag{14}$$

鲁棒对应(RC)为

$$\max_{\boldsymbol{u}}\{\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}\mid\exists\,\boldsymbol{v},\forall[U,V,\boldsymbol{b}]\in\mathscr{Z}:U\boldsymbol{u}+V\boldsymbol{v}\leqslant\boldsymbol{b}\}.\tag{15}$$

显然，ARC 比 RC 具有更大的可行域，在满足约束时有更好的最优解，因此更加柔性. 然而，ARC 模型在大多数情况下都是 NP-hard 问题. 为此，文献[23]提出了 ARC 模型的可计算近似——仿射可调鲁棒对应(AARC).

假定 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 可表示为仿射函数 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{w}+W\boldsymbol{\zeta}$，则一般线性模型的 AARC 定义为

$$\begin{aligned}\max_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},W}\{&\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}:U\boldsymbol{u}+V(\boldsymbol{w}+W\boldsymbol{\zeta})\leqslant\boldsymbol{b},\\&\forall\boldsymbol{\zeta}=[U,V,\boldsymbol{b}]\in\mathscr{Z}\}.\end{aligned}\tag{16}$$

当 V 为固定求助矩阵时，将不确定集合 $\mathscr{Z}$ 通过扰动向量 $\boldsymbol{\xi}$ 仿射参数化. 它在一个非空凸紧的扰动集 $\mathscr{X}$

$\subset \boldsymbol{R}^L$ 上变化,即有

$$\mathscr{X}=\{[U,V,\boldsymbol{b}]=[U^0,V^0,b^0]+\sum_{l=1}^{L}\boldsymbol{\xi}_l[U^l,V^l,b^l],\boldsymbol{\xi}\in\mathscr{X}\}. \tag{17}$$

假定参数映射

$$\xi\mapsto[U^0,V^0,b^0]+\sum_{l=1}^{L}\xi_l[U^l,V^l,b^l] \tag{18}$$

为一个仿射嵌入,则 AV 可表示为

$$\boldsymbol{v}=v(\xi)=v^0+\sum_l\xi_l v^l.$$

考虑扰动集 $\mathscr{X}$ 具有锥形式

$$\mathscr{X}=\{\xi\mid\exists\,\omega:A\xi+B\omega\geqslant_P d\}\subset\boldsymbol{R}^L. \tag{19}$$

其中:P 是一个闭的尖凸锥,$a\geqslant_P b$ 表示 $a-b\in P$. 记

$$x=(u,v^0,v^1,\cdots,v^i),$$
$$a_l^i\equiv a_l^i(x)\equiv(-U^l u-Vv^l+b^l)_i,$$
$$l=0,1,\cdots,L,\ i=1,2,\cdots,m.$$

则存在 $\bar{\xi}$ 和 $\bar{\omega}$,使得 $A\bar{\xi}+B\bar{\omega}-d\in\mathrm{int}P$. 固定求助矩阵时,LP 模型的 AARC 等价于如下形式:

$$\begin{aligned}&\max_{u,v^0,\cdots,v^L,\lambda_1,\cdots,\lambda_m}\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u};\\&\text{s.t. } A'\lambda^i-a^i(u,v^0,v^1,\cdots,v^L)=0,\\&\quad B'\lambda^i=0,i=1,2,\cdots,m;\\&\quad d'\lambda^i+a_0^i(u,v^0,v^1,\cdots,v^L)\geqslant 0,\\&\quad \lambda^i\geqslant P_*\,0,\ i=1,2,\cdots,m.\end{aligned} \tag{20}$$

其中 P_* 为 P 的锥对偶. 特别地,如果 P 为 Lorentz 锥或半定锥,则固定补偿 LP 的 AARC 分别为显式锥二次规划或半定规划. 它们在满足式(17)和(18)时具有多项式计算复杂性.

如果 $\mathscr{X}$ 为多面体集合,且有

$$X=\{\xi\mid\exists\,\omega:A\xi+B\omega\geqslant d\}\subset\boldsymbol{R}^L, \tag{21}$$

则固定求助 LP 的 AARC 等价于显式 LP 问题. 当仿射函数为非线性时,这种 AARC 模型将不再有效. 为此,文献[24]提出通过引入辅助变量,将 AV 表示为辅助变量和不确定参数的仿射函数,从而得到扩展 AARC(EAARC) 模型.

当矩阵 V 为非固定求助矩阵时,AARC 被证明是非计算可行的,但可近似求解[22]. 若不确定集合以如下椭球交的形式给出:

$$\mathscr{X}=\{\xi\mid\xi'(\rho^{-2}S_k)\xi\leqslant 1,k=1,2,\cdots,K\},$$

其中 ρ 为不确定程度的控制参数. 则可通过如下 SDP 问题近似得到 AARC 问题:

$$\max_{\lambda_1,\cdots,\lambda_m,x=[u,v_0,\cdots,v_K]}\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u};$$

$$\text{s.t.}\begin{bmatrix}\Gamma_i(x)+\rho^{-2}\sum_{k=1}^{K}\lambda_k^i S_k & \beta_i(x)\\ \beta'_i(x) & \alpha_i(x)-\sum_{k=1}^{K}\lambda_k^i\end{bmatrix}\succeq 0,$$

$$i=1,2,\cdots,m. \tag{22}$$

当 $K=1$ 时,式(22)完全等价于 AARC. 当 $K>1$ 时,有如下结论[24]:

设 $\mathscr{X}_\rho$ 表示扰动程度为 ρ 的 AARC 可行集,$\mathscr{X}_\rho^{\mathrm{approx}}$ 为具有不确定程度 ρ 的 AARC 的 SDP 近似可行集. 若定义

$$\gamma\triangleq\sqrt{2\ln\Big(6\sum_{k=1}^{K}\mathrm{rank}(S_k)\Big)}, \tag{23}$$

则有 $\mathscr{X}_{\gamma\rho}\subseteq\mathscr{X}_\rho^{\mathrm{approx}}\subseteq\mathscr{X}_\rho$. 但上述模型不适用于决策变量受不确定参数实现值影响的函数离散的情况.

3.2 有限适应性模型

文献[25]针对线性离散鲁棒多阶段决策问题,提出一种有限适应性(FA)模型. FA 模型将不确定集合划分为 k 部分. 以两阶段决策为例,第 2 阶段决策变量是不确定集合上的 k 段定值函数,其适应性由 k 值决定. 这种内在的离散性使其特别适合于处理函数离散的模型. 对于如下两阶段不确定 LP 问题:

$$\begin{aligned}&\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2(u);\\&\text{s.t. } A_1(u)\boldsymbol{x}_1+A_2(u)\boldsymbol{x}_2(u)\leqslant\boldsymbol{b},\forall\,u\in\mathscr{U},\\&\quad \boldsymbol{x}_1\in\mathscr{X}_1,\boldsymbol{x}_2\in\mathscr{X}_2.\end{aligned} \tag{24}$$

若适应性参数为 k,则在 FA 框架下,对应的模型为

$$\begin{aligned}&\mathrm{Adapt}_k(\mathscr{U})=\\&\max_{\mathscr{U}=\mathscr{U}_1\cup\cdots\cup\mathscr{U}_k}[\max\ \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_1+\min\{\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2^{(1)},\cdots,\boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}_2^{(k)}\}];\\&\text{s.t. } A_1(u)\boldsymbol{x}_1+A_2(u)\boldsymbol{x}_2^{(1)}\leqslant\boldsymbol{b},\forall\,u\in\mathscr{U}_1,\\&\qquad\vdots\\&\quad A_1(u)\boldsymbol{x}_1+A_2(u)\boldsymbol{x}_2^{(k)}\leqslant\boldsymbol{b},\forall\,u\in\mathscr{U}_k,\\&\quad \boldsymbol{x}_1\in\mathscr{X}_1,\boldsymbol{x}_2^{(j)}\in\mathscr{X}_2.\end{aligned} \tag{25}$$

其中 $\mathscr{U}$ 为具有固定结构的不确定值集合.

FA 模型可用于解决多阶段不确定线性优化问题,其关键在于确定适应性参数 k 的值. k- 适应性问题的实质是不确定集合的 k- 划分问题. 文献[25]已证明,寻找最优 2- 划分也是 NP-hard 问题.

对于式(23),若不确定集以

$$\mathscr{U}=\mathrm{conv}\{(A_1^{(1)}A_2^{(1)}),\cdots,(A_1^{(N)}A_2^{(N)})\} \tag{26}$$

的形式给出,记 $d=\min\{N,\dim(\mathscr{U})\}$ 为集合 $\mathscr{U}$ 的维数,n 为优化变量个数,m 为不确定约束个数,$k=\min\{d,n,m\}$. 则可在时间 $O(\mathrm{poly}(d,n,m,1/\xi)e^k)$ 内得到 $\mathscr{U}$ 的 ξ 最优超平面划分. 特别地,如果 k 为常量,则可有效求得 2- 划分的超平面划分. 即当 k 较小时,2- 适应问题是计算机可解的.

4　RLO 研究展望

RLO 是 RO 理论中研究最多也最为成熟的一个分支. 本文对 RLO 进行综述,包括静态单阶段不确定优化和多阶段不确定优化两个方面. RLO 由于强调计算可行性和对不确定性的处理和控制,使其在工程上具有广阔的应用前景. 关于 RLO 的研究,以下几方面问题值得关注和思考:

1) 虽然 RLO 研究比较成熟[6,15,26,27],但现实中存在大量非线性不确定优化问题,包括 SOCP、SDP、二次规划、整数规划、混合整数规划,以及一些可转化为凸优化的规划问题. 一种方法是将 RLO 理论和求解算法向其他不确定凸优化或可转化为凸优化的问题扩展,对于 SDP 和二次规划等,随机模型比 RO 模型更加有效[28];另一种方法是在特定的条件下用 RLO 模型近似其他非线性优化问题. 文献[27]甚至将 RO 理论的研究范围由凸问题扩展到更一般的非凸问题.

2) 对于单阶段 RLO,就解的保守性而言,更加柔性且可计算的 RLO 求解方法仍在研究. 文献[29]对目前的 RO 理论框架进行扩展;文献[30]针对通信网提出了考虑分布性的 RO 模型.

3) 多阶段 RLO 问题的研究方兴未艾,但许多问题的可解条件非常苛刻,而现实中的决策更多的是序列决策. 探索更加柔性和可计算的多阶段 RLO 框架乃至 RO 框架,在工程应用上具有重要意义.

4) 基于概率的不确定决策框架比基于一般未确知的 RLO 框架具有更大的适用性,它在决策、控制、最优化等诸多领域具有广阔的应用前景. 特别是以信息为重要要素的作战体系,呈现出显著的不确定性和复杂性. 因此,RLO 和 RO 理论在军事决策中的应用值得深入研究.

参考文献(References)

[1] Boyd S, Vandenberghe L. Convex optimization (revised) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

[2] Dantzig G. Linear programming under uncertainty[J]. Management Science, 1955, 1(3/4): 197-206.

[3] Charnes A, Cooper W. Chance-constrained programming[J]. Management Science, 1959, 6(1): 73-79.

[4] Liu B. Dependent-chance programming: A class of stochastic programming[J]. Computers & Mathematics with Applications, 1996, 199(1): 293-311.

[5] Bertsimas D, Aurelie Thiele. Robust and data-driven optimization: Modern decision-making under uncertainty [R]. Hanover: Institute for Operations Research and Management Science, 2006.

[6] Ben-Tal A, Ghaoui L E, Nemirovski A. Robust optimization [M]. Atlanta: Georgia Institute of Technology, 2006.

[7] Sim M. Robust optimization [D]. Cambridge: Sloan School of Management, 2004.

[8] Soyster A. Convex programming with set-inclusive constraints and applications to inexact linear programming[J]. Operations Research, 1973, 21(6): 1154-1157.

[9] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of linear programming problems contaminated with uncertain data [J]. Mathematical Programming — A, 2000, 88(3): 411-424.

[10] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust solutions of uncertain linear programs [J]. Operations Research Letters, 1999, 25(1): 1-13.

[11] Ben-Tal A, Nemirovski A. Robust convex optimization [J]. Mathematics of Operations Research, 1998, 23 (4): 769-805.

[12] El-Ghaoui L, Lebret H. Robust solutions to least-square problems to uncertain data matrices[J]. SIAM J on Matrix Analysis and Applications, 1997, 18(10): 1035-1064.

[13] El-Ghaoui L, Oustry F, Lebret H. Robust solutions to uncertain semi-definite programs [J]. SIAM J on Optimization, 1998, 9(1): 33-52.

[14] Bertsimas D, Sim M. The price of robustness [J]. Operations Research, 2004, 52(1): 35-53.

[15] Bertsimas D, Brown D B, Caramanis C. Theory and applications of robust optimization [R]. Cambridge: Sloan School of Management, 2007.

[16] Bertsimas D, Sim M. Robust discrete optimization under ellipsoidal uncertainty sets [R]. Cambridge: Sloan School of Management, 2004.

[17] Bertsimas D, Pachamanova D, Sim M. Robust linear optimization under general norms [J]. Operations Research Letters, 2004, 32(6): 510-516.

[18] Bertsimas D, Brown D B. Constructing uncertainty sets for robust linear optimization [R]. Cambridge: Sloan School of Management, 2008.

[19] Natarajan K, Pachamanova D, Sim M. Constructing risk measures from uncertainty sets [R]. Singapore: National University of Singapore, 2007.

[20] Ben-Tal A, Bertsimas D, Brown D B. A flexible approach to robust optimization via convex risk measures[R]. Haifa: Israel Institute of Technology, 2006.

(下转第 1131 页)