文章编号：1001-0920(2009)08-1209-05

# 一种离散时间系统变结构控制的新方法

朱齐丹，汪　瞳
(哈尔滨工程大学 自动化学院，哈尔滨 150001)

**摘　要**：研究离散时间系统变结构控制问题,提出一种新的离散变结构趋近律. 利用该趋近律设计的离散变结构控制器,不仅能大幅度削弱抖振,使系统运动最终趋于原点不存在稳态振荡,而且可使系统的准滑动模态保持步步穿越切换面的基本属性,有效地改善了控制品质,提高了系统的鲁棒性. 仿真结果验证了该方法的有效性与合理性.

**关键词**：离散时间系统；变结构控制；离散趋近律；抖振
**中图分类号**：TP273　　　**文献标识码**：A

# New variable structure control scheme for discrete-time systems

*ZHU Qi-dan*, *WANG Tong*
(College of Automation, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China. Correspondent: WANG Tong, E-mail: wtws_2005@yahoo.com.cn)

**Abstract**: The problem of variable structure control for discrete-time systems is considered. A new discrete reaching law is presented. The discrete-time variable structure control system, which is designed by this reaching law, not only can weaken the chattering and approach to zero diminishingly, but also can keep the basic property of quasi-sliding mode which can cross the switching surface step by step and enhance the control quality and robust performance of the control system. The simulation results validate the effectiveness and reasonability of this method.

**Key words**: Discrete-time system; Variable structure control; Discrete reaching law; Chattering

## 1 引　　言

变结构控制是用来处理线性和非线性控制问题的一种控制方法. 变结构控制中的滑动模态具有不变性,即它与系统的摄动以及外部干扰无关,这种理想的鲁棒性引起了控制界的关注[1,2]. 随着计算机技术的迅速发展和工业自动化等领域的实际需要,离散时间系统的变结构控制具有重要的理论价值和实际意义[3,4].

与连续系统不同,离散系统的状态 $x(k)(k=0,1,\cdots)$ 是一个离散时间序列. 离散变结构系统从任意初始状态出发的系统状态经有限步后,能恰好到达切换面 $\{x \mid |s(x)|=0\}$ 的可能性很小[5],因此离散变结构控制系统产生理想滑动模态的可能性很小,一般只能产生准滑动模态. 即系统状态经有限步到达一个宽度为 $2\Delta$ 的切换带 $\{x\in R^n \mid |s(x)|<\Delta, \Delta>0\}$,并在切换带内作步步穿越切换面的运动[6].

在离散系统的变结构控制中,除了设计合适的切换函数以保证准滑动模态的稳定性和动态性能外,还需保证从任意初始状态出发的系统状态都能在有限时间内到达切换带,即离散变结构控制系统需满足准滑动模态的到达条件[7]. Dot 等[8]、Sapturk 等[9] 和 Furuta 等[10] 先后给出了 3 种不等式形式的到达条件;高为炳[11,12] 分析了 3 种不等式到达条件,并给出一种等式形式的到达条件,即离散指数趋近律

$$s(k+1)=(1-qT)s(k)-\varepsilon T\,\mathrm{sgn}(s(k)). \quad (1)$$

其中:$\varepsilon>0, q>0, 1-qT>0$, $T$ 为采样周期.

文献[13] 对趋近律(1) 进行分析,指出利用趋近律(1) 设计的变结构控制器并不能使系统状态最终趋向平衡点,而是在两点之间振荡,$|s(k)|$ 的值将随 $k$ 的增大而无限接近 $\dfrac{\varepsilon T}{2-qT}$. 为此,众多学者基于趋近律(1) 展开研究,提出了多种新的离散变结构控制方法.

文献[14] 将变速趋近律与离散指数趋近律相结合,提出了比例 - 等速 - 变速控制. 该方法虽能克服稳态振荡的缺点,但却带来一些新的问题,如趋近

**收稿日期**：2008-09-24；**修回日期**：2009-03-04.
**基金项目**：国家自然科学基金项目(60704004).

**作者简介**：朱齐丹(1963—),男,黑龙江齐齐哈尔人,教授,博士生导师,从事机器人、先进控制理论等研究；汪瞳(1984—),男,安徽岳西人,博士生,从事飞行器控制、变结构控制的研究.

律交界处控制突变对系统的影响等.[15] 提出的离散变结构控制设计方法能有效地抑制抖振,但系统状态的整个运动过程不发生对切换面的穿越,这样会在一定程度上失去滑动模态的优良特性[16]. 滑动模态是发生在切换面上的运动,要使准滑动模态保留理想滑动模态的良好动态特性,就必须尽可能地接触切换面. 为此,[11,12] 在准滑动模态的定义中要求步步穿越切换面.

根据以上分析,合理的离散变结构趋近律应使准滑动模态的到达条件得以满足,并具有良好的趋近过程. 良好的趋近过程包括三方面内容:1) 系统状态渐近趋向切换面,并在有限时间内到达切换带 $\{x \in R^n \mid |s(x)| < \Delta, \Delta > 0\}$;2) 当系统状态进入切换带后,系统状态应步步穿越切换面,这样形成的准滑动模态可较好地保留理想滑动模态的良好动态特性;3) 系统状态最终趋于原点,不存在稳态振荡,抖振逐渐衰减到零.

本文提出一种新的离散变结构趋近律. 利用该趋近律设计的变结构控制器,能保证系统状态渐近趋向切换面,使系统的准滑动模态保持步步穿越切换面的基本属性,并使系统抖振逐渐衰减到零,不存在稳态振荡现象. 仿真结果表明了所提出方法的有效性与合理性.

## 2 新的离散变结构控制策略

考虑如下单输入离散时间系统:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(k) + \boldsymbol{b}u(k), \\ s(k) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k). \end{cases} \tag{2}$$

其中:$\boldsymbol{x}(k) \in R^n$,$u(k) \in R$,$\boldsymbol{A} \in R^{n\times n}$,$\boldsymbol{b} \in R^{n\times 1}$,$\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, \cdots, c_{n-1}, 1]$,$s(k)$ 为切换函数,$\{x \mid \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k) = 0\}$ 为切换面. 假设$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{b})$ 完全可控,$\boldsymbol{c}$ 的选取可保证系统的准滑动模态稳定,并使 $\boldsymbol{cb} \neq 0$ 成立.

根据文献[13] 的分析,利用趋近律(1) 设计的变结构系统,其 $|s(k)|$ 的值将无限接近 $\dfrac{\varepsilon T}{2 - qT}$,因此 $\varepsilon$ 的大小对系统的稳态振荡具有重要影响. 减小 $\varepsilon$ 的值可降低系统的振荡,但若 $\varepsilon$ 值取得太小,则会影响系统状态到达切换面的趋近速度. 在实际应用中,采样周期 $T$ 也不可能取得很小. 因此理想的 $\varepsilon$ 值应是时变的,即在系统运动开始时取较大的值,随着 $|s(k)|$ 的减小而不断减小.

为了改善趋近律(1) 的趋近过程,本文利用 $\dfrac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1}$ 来代替趋近律(1) 中的 $\varepsilon$,$\dfrac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1}$ 将随 $|s(k)|$ 的减小而单调递减. 当 $|s(k)|$ 较大时,$\dfrac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1} \approx \alpha$,这样可在 $|s(k)|$ 较大时保持趋近律(1) 的特性;当 $|s(k)| \to 0$ 时,$\dfrac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1} \to 0$,这样可消除稳态振荡.

本文提出的离散变结构趋近律为

$$s(k+1) = (1 - qT)s(k) - \frac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1}T\mathrm{sgn}(s(k)). \tag{3}$$

其中:$q > 0$,$1 - qT > 0$,$T$ 为采样周期,$\alpha$ 满足条件

$$\frac{1-qT}{T} < \alpha < \frac{2-qT}{T}. \tag{4}$$

利用趋近律(3) 设计控制,则有

$$s(k+1) = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}(k+1) = \boldsymbol{cAx}(k) + \boldsymbol{cb}u(k) = (1-qT)s(k) - \frac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1}T\mathrm{sgn}(s(k)). \tag{5}$$

于是可得离散变结构控制

$$u(k) = -(\boldsymbol{cb})^{-1}[\boldsymbol{cAx}(k) + (qT-1)s(k)] - (\boldsymbol{cb})^{-1}\frac{\alpha|s(k)|}{|s(k)|+1}T\mathrm{sgn}(s(k)). \tag{6}$$

式(4) 对式(3) 中 $\alpha$ 的取值作了限制,目的是为确保利用式(3) 设计的离散变结构系统满足准滑动模态的到达条件,并且具有良好的趋近过程.

## 3 到达条件分析

**定理 1** 当式(4) 成立时,利用趋近律(3) 设计的控制系统满足离散变结构控制系统准滑动模态的到达条件.

**证明** 对于任意的 $s(k) \neq 0$,由式(3) 可得

$$s(k+1) = \left[1 - qT - \frac{\alpha T}{|s(k)|+1}\right]s(k), \tag{7}$$

因此

$$|s(k+1)| = \left|1 - qT - \frac{\alpha T}{|s(k)|+1}\right||s(k)|. \tag{8}$$

如果式(4) 成立,则有

$$0 < \frac{\alpha T}{|s(k)|+1} < \alpha T < 2 - qT. \tag{9}$$

因此

$$1 - qT - \frac{\alpha T}{|s(k)|+1} < 1 - qT < 1, \tag{10}$$

$$1 - qT - \frac{\alpha T}{|s(k)|+1} > 1 - qT - \alpha T > -1. \tag{11}$$

故有 $\left|1 - qT - \dfrac{\alpha T}{|s(k)|+1}\right| < 1$,所以 $|s(k+1)| < |s(k)|$.

根据文献[17] 中的定理 8.2,利用趋近律(3) 设计的控制系统满足离散变结构控制系统准滑动模态的到达条件. □

## 4　趋近过程分析

**定理 2**　对于利用满足式(4)要求的趋近律(3)设计的离散变结构控制系统，当 $k \to +\infty$ 时，$|s(k)| \to 0$.

**证明**　由定理 1 的证明过程可知，当式(4)成立时，有式(10)和(11)成立. 因此存在

$$\eta_0 \in \{\eta \mid \max(|1-qT-\alpha T|,\ 1-qT) < \eta < 1\}, \tag{12}$$

使得

$$\left| 1-qT-\frac{\alpha T}{|s(k)|+1} \right| < \eta_0. \tag{13}$$

由式(8)可得 $|s(k+1)| < \eta_0 |s(k)|$，因此 $0 \leqslant |s(k)| < \eta_0^k |s(0)|$.

由于 $\lim\limits_{k\to+\infty}[\eta_0^k |s(k)|] = 0$，根据夹逼准则，$\lim\limits_{k\to+\infty} |s(k)| = 0$. □

**定理 3**　对于利用满足式(4)要求的趋近律(3)设计的离散变结构控制系统，当 $|s(k)| > \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$ 时，系统状态将渐近趋向切换面. 若存在某一时刻 $|s(k)| = \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$，则系统状态以后将沿切换面作无抖动运动，即形成理想滑动模态；否则，当某一时刻出现 $0 < |s(k)| < \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$ 时，系统状态将步步穿越切换面形成准滑动模态.

**证明**　根据定理 1，当式(4)成立时，准滑动模态的到达条件能得到满足，即有 $|s(k+1| < |s(k)|$ 成立，因此 $|s(k)|$ 将随 $k$ 的增大而单调递减.

若式(4)成立，则 $\frac{\alpha T}{1-qT} - 1 > 0$. 由式(7)可知，当 $|s(k)| > \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$ 时，有 $0 < 1-qT-\frac{\alpha T}{|s(k)|+1} < 1$，因此 $\mathrm{sgn}(s(k+1)) = \mathrm{sgn}(s(k))$，所以系统状态将渐近趋向切换面.

若存在某一时刻 $|s(k)| = \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$，则有 $1-qT-\frac{\alpha T}{|s(k)|+1} = 0$，因此 $0 = s(k+1) = s(k+2) = \cdots$. 所以以后系统状态将沿切换面作无抖动运动，即形成理想滑动模态.

若不存在 $|s(k)| = \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$，则当某一时刻出现 $0 < |s(k)| < \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$ 时，有 $-1 < 1-qT-\frac{\alpha T}{|s(k)|+1} < 0$. 所以 $\mathrm{sgn}(s(k+1)) = -\mathrm{sgn}(s(k))$，系统状态将步步穿越切换面形成准滑动模态. □

由定理 2 和定理 3 可知，利用趋近律(3)设计的变结构控制器，不但可保证系统状态渐近趋向切换面，使系统状态的运动最终趋于原点不存在稳态振荡，而且能使系统的准滑动模态保持步步穿越切换面的基本属性，改善了趋近过程.

在实际中，离散变结构系统恰好在某一时刻出现 $|s(k)| = \frac{\alpha T}{1-qT} - 1$ 的可能性很小，因此系统能产生理想滑动模态的可能性也很小. 大多数情况下系统只能产生准滑动模态.

## 5　仿真分析

考虑如下离散系统：

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.0088 \\ 0 & 0.7788 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0061 \\ 1.1768 \end{bmatrix} u(k).$$

初始状态为：$\boldsymbol{x}(0) = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{c} = [10 \quad 1]$，采样周期 $T = 0.01\,\mathrm{s}$.

### 5.1　离散指数趋近律的仿真

对于趋近律(1)，取 $q = 10$，$\varepsilon = 50$. 由图 1 和图 2 可见，系统状态并没有最终趋近于原点，而是在原点附近振荡.

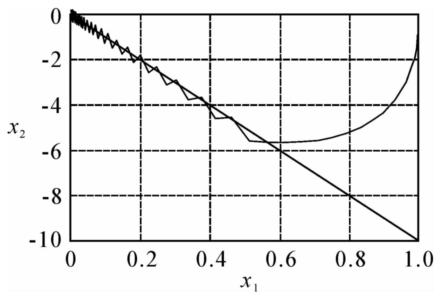



图 1　离散指数趋近律的相轨迹

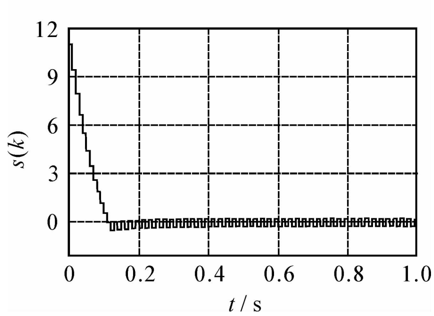



图 2　离散指数趋近律的 $s(k)$ 变化

### 5.2　本文趋近律的仿真

对于离散变结构趋近律(3)，取 $q = 10$，$\alpha = 180$. 由图 3～图 5 可见，系统状态渐近趋向切换面，并最终趋向原点，且不存在稳态振荡.

由图 4 可见，由于 $\frac{\alpha T}{1-qT} - 1 = 1$，当 $|s(k)| >$

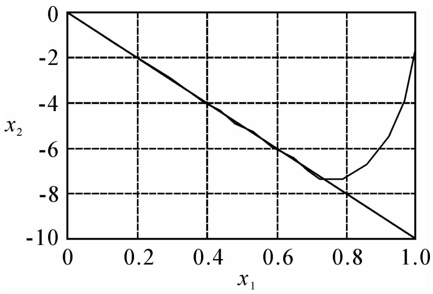
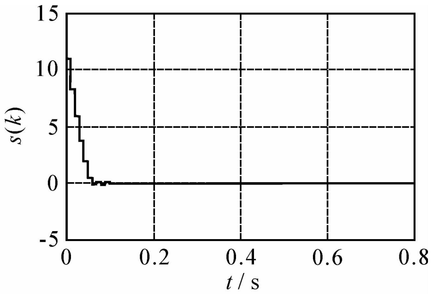
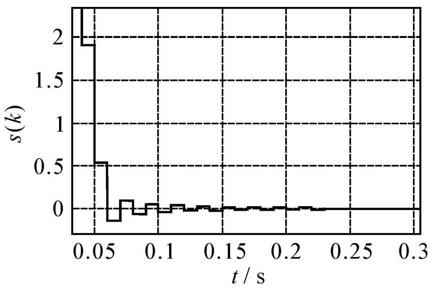



图 3　本文趋近律的相轨迹

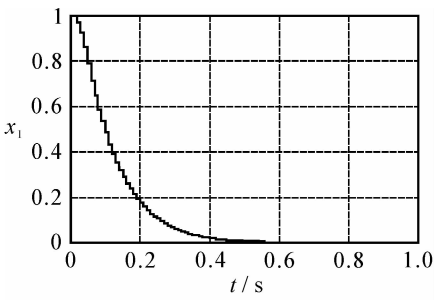



(a) 趋近律 $s(k)$ 的变化

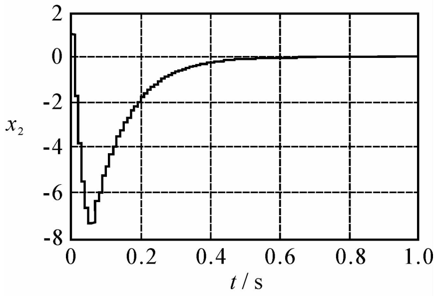



(b) 趋近律 $s(k)$ 的局部放大

图 4　本文趋近律的仿真结果




(a) 趋近律状态变量 $x_1$ 的变化




(b) 趋近律状态变量 $x_2$ 的变化

图 5　本文趋近律状态变量的变化

1时，$|s(k)|$ 随着 $k$ 的增大而单调递减，且 $s(k)$ 保持符号不变，即 $\mathrm{sgn}(s(k+1)) = \mathrm{sgn}(s(k))$. 当出现 $|s(k)| < 1$ 时，$\mathrm{sgn}(s(k+1)) = -\mathrm{sgn}(s(k))$，系统状态步步穿越切换面形成准滑动模态，并且抖振逐渐衰减到零. 系统状态最终趋于原点，不存在稳态振荡现象，趋近过程比离散指数趋近律(1) 有了较大改善.

## 6　结　　论

本文针对离散时间系统的变结构控制问题，提出一种新的趋近律. 利用该趋近律设计的变结构控制器，可使系统状态渐近趋向切换面，并使系统的准滑动模态保持步步穿越切换面的基本属性，且最终趋向平衡点，不存在稳态振荡现象，从而改善了趋近过程. 理论分析和仿真结果都表明本文给出的方法是行之有效的.

## 参考文献(References)

[1] 刘金琨，孙富春. 滑模变结构控制理论及其算法研究与进展[J]. 控制理论与应用，2007，24(3)：407-418.
(Liu J K，Sun F C. Research and development on theory and algorithms of sliding mode control[J]. Control Theory & Applications，2007，24(3)：407-418.)

[2] 郭继峰，高存臣. 滞后离散广义不确定系统的变结构控制[J]. 控制与决策，2007，22(1)：95-99.
(Guo J F，Gao C C. Variable structure control of discrete uncertain singular systems with multiple time-delays[J]. Control and Decision，2007，22(1)：95-99.)

[3] 宋立忠，李槐树，姚琼荟. 基于趋近律方法的离散时间系统变结构控制[J]. 控制理论与应用，2008，25(3)：525-528.
(Song L Z，Li H S，Yao Q H. Discrete-time variable structure control based on reaching law approach[J]. Control Theory & Applications，2008，25(3)：525-528.)

[4] 周德文，高存臣，李自强. 一种离散变结构控制趋近律[J]. 控制与决策，2008，23(3)：306-309.
(Zhou D W，Gao C C，Li Z Q. Reaching law of discrete-time variable structure control system[J]. Control and Decision，2008，23(3)：306-309.)

[5] 任启峰，高存臣，王品. 基于衰减控制的离散时间系统的变结构控制[J]. 系统仿真学报，2008，20(4)：1056-1059.
(Ren Q F，Gao C C，Wang P. Variable structure control for discrete time systems based on attenuating control[J]. J of System Simulation，2008，20(4)：1056-1059.)

[6] 王贞艳，张井岗，陈志梅. 一类非线性离散时间系统的变结构控制[J]. 系统仿真学报，2005，17(10)：2483-2489.
(Wang Z Y，Zhang J G，Chen Z M. Variable structure control for nonlinear discrete-time system[J]. J of System Simulation，2005，17(10)：2483-2489.)

[7] 李文林. 离散时间系统变结构控制的趋近律问题[J]. 控制与决策，2004，19(11)：1267-1269.
(Li W L. Reaching law of discrete-time variable structure control systems[J]. Control and Decision, 2004, 19(11): 1267-1269.)
[8] Dot Y, Holf R G. Microprocessor based sliding mode controller for DC motor drivers[C]. The Industrial Application Society Annual Metting. Cincinnati, 1980, 2: 154-161.
[9] Sapturk S Z, Istefanopulos Y, Kaynak O. On the stability of discrete-time sliding mode control systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1987, 32(10): 930-932.
[10] Furuta K. Sliding mode control of a discrete system [J]. Systems and Control Letters, 1990, 14(2): 145-152.
[11] 高为炳. 离散时间系统的变结构控制[J]. 自动化学报，1995，21(2)：154-161.
(Gao W B. Discrete-time variable structure control[J]. Acta Automation Sinica, 1995, 21(2): 154-161.)
[12] Gao W B, Wang Y F, Homaifa A. Discrete-time variable structure control systems[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1995, 42(2): 117-122.
[13] 翟长连，吴智铭. 不确定离散时间系统的变结构控制设计[J]. 自动化学报，2000，26(2)：184-191.
(Zhai C L, Wu Z M. Variable structure control design for uncertain discrete time systems [J]. Acta Automation Sinica, 2000, 26(2): 184-191.)
[14] 姚琼荟，宋立忠，温洪. 离散变结构控制系统的比例-等速-变速控制[J]. 控制与决策，2000，15(3)：329-332.
(Yao Q H, Song L Z, Wen H. Proportional-constant-variable rate control for discrete-time variable structure systems[J]. Control and Decision, 2000, 15(3): 329-332.)
[15] 米阳，黄建雄，李文林. 多输入离散时滞系统的变结构控制设计[J]. 控制与决策，2006，21(12)：1425-1428.
(Mi Y, Huang J X, Li W L. Variable structure control for multi-input discrete systems with control delay[J]. Control and Decision, 2006, 21(12): 1425-1428.)
[16] 米阳，李文林，井元伟. 基于幂次趋近律的一类离散时间系统的变结构控制[J]. 控制与决策，2008，23(6)：643-646.
(Mi Y, Li W L, Jing Y W. Variable structure control for a class of discrete-time system based on power reaching law[J]. Control and Decision, 2008, 23(6): 643-646.)
[17] 姚琼荟，黄继起，吴汉松. 变结构控制系统[M]. 重庆：重庆大学出版社，1997.
(Yao Q H, Huang J Q, Wu H S. Variable structure control system[M]. Chongqing: Chongqing University Press, 1997.)

(上接第 1208 页)

[13] Grabowski J, Wodecki M. A very fast tabu search algorithm for the permutation flow-shop problem with makespan criterion[J]. Computers and Operations Research, 2004, 31(11): 1891-1909.
[14] 金锋，宋士吉，吴澄. 一类基于 FSP 问题 Block 性质的快速 TS 算法[J]. 控制与决策，2007，22(3)：247-251.
(Jin F, Song S J, Wu C. Fast TS algorithm based on block properties of FSP[J]. Control and Decision, 2007, 22(3): 247-251.)
[15] Reeves C R. A genetic algorithm for flowshop sequencing[J]. Computers and Operations Research, 1995, 22(1): 5-13.
[16] Reeves C R, Yamada T. Genetic algorithms, path relinking and the flowshop sequencing problem[J]. Evolutionary Computation, 1998, 6(1): 45-60.
[17] Wang L, Zheng D Z. An effective hybrid heuristic for flow shop scheduling [J]. Int J of Advanced Manufacturing Technology, 2003, 21(1): 38-44.
[18] 卢开澄，卢华明. 组合数学[M]. 北京：清华大学出版社，2002.
(Lu K C, Lu H M. Combinatorics[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2002.)
[19] 田澎，杨自厚，张嗣瀛. 同顺序(flow-shop)排序问题的模拟退火求解[J]. 信息与控制，1994，23(3)：133-139.
(Tian P, Yang Z H, Zhang S Y. Flow-shop scheduling by simulated annealing[J]. Information and Control, 1994, 23(3): 133-139.)
[20] Taillard E. Some efficient heuristic methods for the flow shop sequencing problem[J]. European J of Operational Research, 1990, 47(1): 65-74.
[21] Taillard E. Benchmarks for basic scheduling problems [J]. European J of Operational Research, 1993, 64(2): 278-285.