

非线性迟滞阻尼对隔振系统力传递特性影响

孙靖雅, 华宏星, 肖 锋, 刘兴天, 黄修长

(1. 上海交通大学 振动、冲击、噪声研究所, 上海 200240;

2. 上海交通大学 机械系统与振动国家重点实验室, 上海 200240)

摘要: 为提高系统隔振性能, 研究摩擦阻尼在几何非线性条件下产生的迟滞阻尼(结构阻尼)对力传递特性影响。区别于传统单自由度隔振系统, 采用含基础质量影响的两自由度无约束隔振系统模型进行阻尼力特性研究。用平均法求解运动方程, 获得系统频率-响应幅值方程, 以此导出系统力传递率及力位移传递率表达式。理论结果表明, 质量、阻尼与激励频率为影响传递率主要因素。与粘滞阻尼相比, 迟滞阻尼隔振效果更好, 不仅能降低共振区响应, 亦能改善高频区隔振性能。对运动方程进行扫频激励下数值仿真, 获得力传递特性数值解。结果显示仿真结果与理论结果吻合良好, 几何非线性阻尼隔振系统具有良好隔振性能。

关键词: 隔振系统; 力传递率; 阻尼; 几何非线性

中图分类号: O328; TB53

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.10.025

Influence of nonlinear hysteretic damping on force transmissibility of a vibration isolation system

SUN Jing-ya, HUA Hong-xing, XIAO Feng, LIU Xing-tian, HUANG Xiu-chang

(1. Institute of Vibration, Shock and Noise, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China;

2. State Key Laboratory of Mechanical System and Vibration, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200240, China)

Abstract: To improve performances of a vibration isolation system, the influence of hysteretic damping caused by friction damping under nonlinear geometric condition on the force transmissibility of the system was investigated. Being different from the traditional single DOF vibration isolation model, an unconstrained 2-DOF vibration isolation model was built, containing the influence of the base mass. Its motion equation was solved by using the averaging method to get the frequency-amplitude equation. Then the expressions of the force transmissibility and the force-displacement transmissibility of the system were derived. It was shown that mass, damping and excitation frequency are the dominant parameters to influence the transmissibility; comparing to linear viscous damping, the hysteretic damping has a better performance to isolate vibration, it not only suppresses the resonance responses, but also improves the isolation performances at high frequencies. At last, a numerical solution of the force transmissibility for the motion equation with frequency-sweeping force excitation was calculated. The results showed that the simulation results agree well with the theoretical ones, the vibration isolation system with geometric nonlinear hysteretic damping has a better performance of vibration isolation.

Key words: vibration isolation system; force transmissibility; damping; geometric nonlinear

隔振装置广泛用于船舶、桥梁、航天、交通运输等领域^[1-6], 以减少振动、冲击对设备使用精度及疲劳寿命的不利影响。为抑制隔振装置响应, 最常用为阻尼技术。传统粘滞阻尼加入可抑制共振峰, 但同时也会降低高频区隔振性能。因此, 能同时改善共振区、高频隔振区隔振特性的非线性阻尼一直为热门研究领域。

Ruzicka^[7]采用等效阻尼法研究任意速度指数的阻尼对单自由度隔振系统影响, 认为共振峰处取相同等效阻尼系数时, 速度指数大于1的阻尼有利于力激励隔振; 速度指数小于1的阻尼则有利于基础位移激励隔振。Guo等^[8-12]采用不同方法亦获得相同结论。对力激励隔振, 增大阻尼速度指数改善隔振效果亦会有不利影响。速度指数大于1时, 激励力幅值增大将导致等效阻尼系数随之增大, 会致高频隔振效果下降, 且速度指数大于2的阻尼一般需采用主动控制方能实现。而迟滞阻尼(结构阻尼)对隔振系统具有较好隔振效果, 与粘滞阻尼相比, 该类阻尼不仅能抑制共振峰, 同时在高

频区的隔振性能也有所改善。但迟滞阻尼与材料的损耗因子有关^[7],且高损耗因子较难实现。Tang 等^[13-14]采用粘滞阻尼,通过改变阻尼器安装方式,实现位移相关的几何非线性阻尼。利用等效阻尼系数方法对粘滞阻尼作用下隔振效果研究结果表明,振动幅度较大时呈现为强阻尼;振动幅度较小时表现为弱阻尼。该类阻尼具有较好的隔振效果,不仅能抑制共振峰,也具有良好高频隔振性能。Raj 等^[4]研究在汽车悬架中应用的间隙随活塞行程变化阻尼器,提出阻尼系数随位移变化的阻尼隔振效果更好。Jia 等^[1]设计的新颖阻尼系数随位移变化阻尼器,在船舶管路减振中得以应用。文献[1-4]仅阐述该类阻尼器机理及优点,未从理论上分析该类阻尼器对隔振系统影响。本文采用平均法研究摩擦阻尼在几何非线性条件下产生的非线性阻尼对隔振系统影响。该方法亦可分析任意速度指数的非线性阻尼对隔振系统影响。本文分析的摩擦阻尼引起的非线性阻尼,在小振幅条件下可简化为迟滞阻尼。与材料阻尼损耗因子引起的迟滞阻尼不同,利用摩擦阻尼产生的迟滞阻尼,其阻尼系数大小可调节,并可实现材料内阻尼达不到的强阻尼效果。该阻尼可用于改善粘性阻尼隔振装置的隔振性能。

鉴于目前研究卫星隔振常用单自由度隔振系统模型,模型基础通常考虑为固定不动^[15-16],未考虑基础质量对隔振性能影响。故本文建立可考虑基础质量对隔振系统影响的二自由度无约束模型,采用平均法对系统运动方程求解获得频率-幅值方程,继而获得激励下响应幅值。用导出的力传递率、力位移传递率分析粘滞阻尼及迟滞阻尼单独作用下隔振特性,考虑两种阻尼联合作用下隔振效果。采用数值方法求解运动方程,并与理论结果比较。

1 隔振系统模型

卫星隔振系统示意图如图1,图中 m 为动量轮安装平台质量, M 为服务舱刚体(基础)质量。基础质量 M 趋于无穷大时,模型可简化为传统的单自由度隔振系统。设刚体与基础仅沿水平方向运动,即仅有水平方向自由度。刚体与基础在水平方向通过刚度 k 的弹簧及阻尼系数 c 的阻尼器组成隔振装置连接,垂直方向用两对称布置的库伦摩擦阻尼隔振器连接。阻尼器输出阻尼力为 $f_h = c_h \text{sign}(\dot{\delta})$,其中 c_h 为摩擦幅值, $\dot{\delta}$ 为摩擦阻尼器两端相对速度。刚体平台存在由偏心质量引起的频率依赖型激励力 $f(t) = m_0 r \omega^2 \sin(\omega t)$,其中 m_0 为动量轮上偏心质量, r 为偏心质量偏心距, ω 为动量轮转速即激励频率。

令两物体水平方向相对位移 $z = y - x$,摩擦阻尼器两端相对运动速度可表示为

$$\dot{\delta} = \frac{\dot{z}z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \tag{1}$$

得阻尼器水平方向阻尼力为

$$f_h = 2c_h \frac{|z| |\dot{z}|^{-1} \dot{z}}{\sqrt{a^2 + z^2}} \tag{2}$$

当 $z/a \leq 0.2$ 时,阻尼力可近似简化为

$$f_h = \frac{2c_h}{a} |z| |\dot{z}|^{-1} \dot{z} \tag{3}$$

即小振幅时,垂直方向布置的摩擦阻尼器可在水平方向产生迟滞阻尼。

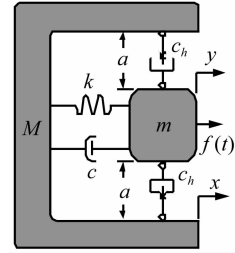


图1 隔振系统示意图

Fig.1 Sketch of the vibration isolation system

2 数学模型及求解

图1 隔振系统运动方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{y} + \frac{2c_h}{a} |z| |\dot{z}|^{-1} \dot{z} + c\dot{z} + kz &= m_0 r \omega^2 \sin(\omega t) \\ M\ddot{x} + \frac{2c_h}{a} |z| |\dot{z}|^{-1} \dot{z} + c\dot{z} + kz &= 0 \end{aligned} \right\} \tag{4}$$

用 $z = y - x$ 消除式(4)中 y, x 可简化为

$$\ddot{z} + \frac{2c_h}{a\mu} |z| |\dot{z}|^{-1} \dot{z} + \frac{c}{\mu} \dot{z} + \frac{k}{\mu} z = \frac{m_0 r \omega^2}{m} \sin(\omega t) \tag{5}$$

式中: $\mu = mM/(m + M)$ 。

引入变量: $u = mz/(m_0 r)$, $\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$, $\Omega = \omega/\omega_0$, $\tau = \omega_0 t$, $\zeta_1 = c_h/(\alpha k)$, $\zeta_2 = c/(2\mu\omega_0)$,对式(5)进行无量纲化可得:

$$u'' + 2\zeta_1 |u| |u'|^{-1} u' + 2\zeta_2 u' + u = \Omega^2 \sin(\Omega\tau) \tag{6}$$

设方程(6)解的形式为

$$u = U(\tau) \sin[\varphi(\tau)] \tag{7}$$

式中: $\varphi(\tau) = \Omega\tau + \psi(\tau)$ 。

采用平均法解方程(6)可得幅值-频率特性方程为(具体见附录或文献[5,9]):

$$\left(\frac{4\zeta_1 U + 2\pi\zeta_2 \Omega U}{\pi\Omega^2} \right)^2 + \frac{U^2(1 - \Omega^2)^2}{\Omega^4} = 1 \tag{8}$$

则方程的解为

$$U = \sqrt{\frac{\Omega^4}{\left(\frac{4}{\pi}\zeta_1 + 2\zeta_2\Omega \right)^2 + (1 - \Omega^2)^2}} \tag{9}$$

3 隔振系统传递率

将 $u = U(\tau) \sin[\varphi(\tau)]$ 代入式(4), 并设初始速度、位移均为零, 得:

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} = \frac{m_0 r \omega^2}{\omega_0^2(m+M)} \left(\sin(\Omega\tau) - \Omega^2 \frac{d^2u}{d\tau^2} \right) \quad (10)$$

$$x(\tau) = \frac{-m_0 r \omega^2 (\sin(\Omega\tau) + U \sin(\Omega\tau + \psi))}{\omega_0^2 \Omega^2 (m+M)} \quad (11)$$

对力传递率, 一般定义为输出力与激励力傅里叶变化的比值^[8,17], 此时力传递率与力-位移传递率分别为(见附录):

$$T_{ff} = \frac{\max |M\dot{x}|}{\max |f(x)|} = \frac{M \sqrt{2\Omega^{-2}U^2 - U^2 + 1}}{(m+M)} = \frac{M}{(m+M)} \sqrt{\frac{\left(\frac{4}{\pi}\zeta_1 + 2\zeta_2\Omega\right)^2 + 1}{\left(\frac{4}{\pi}\zeta_1 + 2\zeta_2\Omega\right)^2 + (1-\Omega^2)^2}} \quad (12)$$

$$T_{fd} = \frac{\max |x|}{\max |f(x)|} = \frac{\sqrt{2\Omega^{-2}U^2 - U^2 + 1}}{\omega_0^2(m+M)\Omega^2} = \frac{1}{\omega^2(m+M)} \sqrt{\frac{\left(\frac{4}{\pi}\zeta_1 + 2\zeta_2\Omega\right)^2 + 1}{\left(\frac{4}{\pi}\zeta_1 + 2\zeta_2\Omega\right)^2 + (1-\Omega^2)^2}} \quad (13)$$

4 讨论

上两种传递率均以 dB 表示, 即 $20\log_{10} T_{ff}$ 与 $20\log_{10} T_{fd}$ 。

4.1 两种阻尼单独作用下传递率特性

当 $\zeta_1 = 0, \zeta_2 \neq 0$ 时, 隔振系统为传统的线性隔振系统。其力传递率、力位移传递率分别为

$$T_{ff} = \frac{M}{(m+M)} \sqrt{\frac{(2\zeta_2\Omega)^2 + 1}{(2\zeta_2\Omega)^2 + (1-\Omega^2)^2}} \quad (14)$$

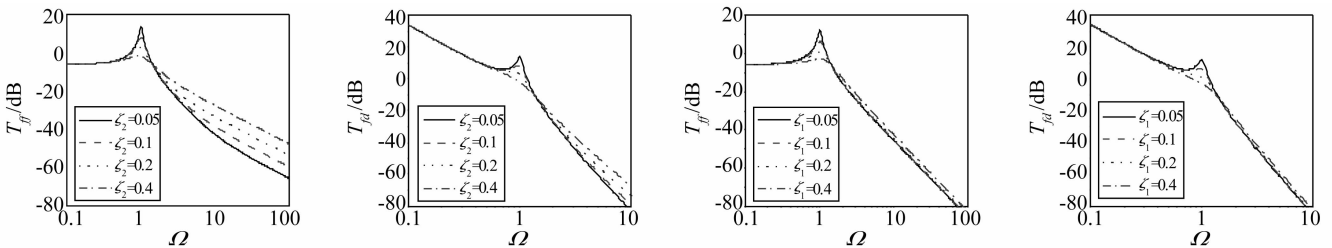


图 2 不同阻尼系数下, 力传递率 T_{ff} 和力位移传递率 T_{fd} 随频率的变化曲线 ($M = m = 1$)

Fig. 2 Force transmissibility T_{ff} and force-displacement transmissibility T_{fd} under different damping coefficient ($M = m = 1$)

对力位移传递率, 或刚体质量或基础质量趋于无穷大时, 隔振系统力位移传递率均近似为零。其与力传递率公式有相似之处, 但力位移传递率受激励频率影响。当激励频率增大时, 力位移传递率迅速下降, 但

$$T_{fd} = \frac{1}{\omega^2(m+M)} \sqrt{\frac{(2\zeta_2\Omega)^2 + 1}{(2\zeta_2\Omega)^2 + (1-\Omega^2)^2}} \quad (15)$$

当 $\zeta_1 \neq 0, \zeta_2 = 0$ 时, 隔振系统为具有结构阻尼的非线性隔振系统:

$$T_{ff} = \frac{M}{(m+M)} \sqrt{\frac{(4\zeta_1)^2 + \pi^2}{(4\zeta_1)^2 + \pi^2(1-\Omega^2)^2}} \quad (16)$$

$$T_{fd} = \frac{1}{\omega^2(m+M)} \sqrt{\frac{(4\zeta_1)^2 + \pi^2}{(4\zeta_1)^2 + \pi^2(1-\Omega^2)^2}} \quad (17)$$

由以上公式看出, 影响传递率因素主要为质量、阻尼及激励频率。由图 2 看出, 在两种阻尼单独作用下, 力传递率、力位移传递率规律相似, 即在共振区阻尼增大, 共振峰值减小; 在高频隔振区传递率随阻尼的增大而增大, 隔振性能变差。共振峰相同时, 迟滞阻尼作用下高频隔振区传递率上升较小, 而粘滞阻尼作用下则上升较大。

图 3 为两种阻尼作用下传递率比值曲线, 其中 ΔT 表示粘滞阻尼与迟滞阻尼作用下力传递率比值及力位移传递率比值。阻尼系数取 $\zeta = \zeta_1 = \zeta_2$ 。由图 3 看出, 采用相同阻尼系数时, 迟滞阻尼较粘滞阻尼隔振效果更好, 不仅能抑制共振, 且在高频隔振区性能亦可得改善。高频区有迟滞阻尼的隔振系统传递率随频率下降速率为 40 dB 每十倍频程, 而粘滞阻尼下降速率为 20 dB 每十倍频程。因此, 采用迟滞阻尼可获得较传统粘滞阻尼更好的隔振性能。质量对传递率影响主要体现在随刚体质量 m 的增大, 力传递率不断下降, 刚体质量趋于无穷大时, 力传递率接近零, 此时无力传递于基础; 随基础质量 M 的增大, 力传递率不断增大, 并趋于传统单自由度隔振系统力传递率特性。需说明的是, 本文给出的迟滞阻尼影响下力传递率公式与文献[7]稍有区别, 主要差异在于文献[7]中对迟滞阻尼进行简化, 其表达式在高频区较精确, 在共振区存在一定误差。式(16)结论较之更精确。

激励频率 $\omega < 1$, 系统传递率会被放大, 即系统在低频激励下位移响应可能较大。实际物理意义可解释为: 激励频率远小于共振频率时, 刚体与基础可认为是牢固结合整体; 刚体偏心质量位置改变时, 刚体与基础位

移也会同时发生改变,但整个隔振系统质心保持不变。即刚体与基础的最大位移有限,取决于偏心质量、偏心距乘积的大小。

对式(16) T_{ff} 表达式关于 Ω 求导,并令 $\frac{dT_{ff}}{d\Omega} = 0$,

可得:

$$2\zeta_2^2\Omega^4 + \frac{4}{\pi}\zeta_1\zeta_2\Omega^3 + \left(\frac{16}{\pi^2}\zeta_1^2 + 1\right)\Omega^2 - \frac{16}{\pi^2}\zeta_1^2 - 1 = 0 \tag{18}$$

求解后可得力传递率最大值对应频率。

当 $\zeta_1 = 0, \zeta_2 \neq 0$ 时,力传递率最大值及对应频率分别为

$$T_{ff,max} = \frac{M}{(m + M)} \sqrt{\frac{16\zeta_2^4}{16\zeta_2^4 - 8\zeta_2^2 - 2 + 2\sqrt{1 - 8\zeta_2^2}}} \tag{19}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{\sqrt{1 + 8\zeta_2^2} - 1}{4\zeta_2^2}} \tag{20}$$

该结果可在文献[7]中得到印证。

当 $\zeta_1 \neq 0, \zeta_2 = 0$ 时,力传递率最大值发生于 $\Omega = 1$, 最大值为

$$T_{ff} = \frac{M}{(m + M)} \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(4\zeta_1)^2}} \tag{21}$$

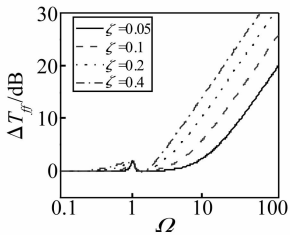


图3 两种阻尼作用下力传递率比值随频率变化曲线
Fig. 3 Ratio of the force transmissibility with viscous damping to that with hysteretic damping

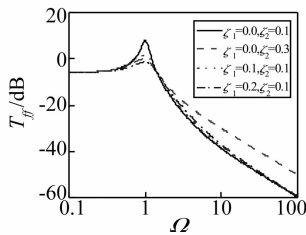


图4 两种阻尼共同作用下力传递率曲线
Fig. 4 Force transmissibility of isolators with combination of viscous damping and hysteretic damping

5 数值仿真

采用数值解法对式(4)直接求解,其中激励力频率为随时间线性变化的扫频频率。仿真中参数设置为 $M = 1 \text{ kg}, m = 1 \text{ kg}, k = 8 \text{ N/m}, c_h = 0.2, a = 1 \text{ m}, c = 0 \text{ N} \cdot \text{s/m}, m_0r = 1$ 。扫频时间步长 0.000125 Hz/s 。将求解后基础加速度乘以基础质量,可得基础所受力的变化规律。图5中细实线为基础上力与激励幅值比值 $F_{base}/(m_0r\omega^2) = M\ddot{x}/(m_0r\omega^2)$ 随时间变化,粗实线为

可以看出,粘滞阻尼影响下的共振频率随阻尼变化而变化,但迟滞阻尼影响下共振频率不受频率影响,发生于 $\Omega = 1$ 处。对力位移传递率最大值及对应频率,由于解析公式表达较复杂,且当阻尼系数较大时,不存在共振峰(图2(b)、(d)),因此,具体表达式此处不再给出。

4.2 两种阻尼共同作用下载率特性

传统隔振系统常采用粘滞阻尼抑制共振区响应,但阻尼增大同时也降低高频区隔振性能。与粘滞阻尼相比,迟滞阻尼能同时改善共振区、高频隔振区隔振性能。因此,在粘滞阻尼的隔振系统中加入迟滞阻尼,系统的隔振性能也可以得到改善。

图4为不同配置阻尼作用下系统力传递率曲线。由图4看出, $\zeta_1 = 0, \zeta_2 = 0.1$ 阻尼配置情况下,隔振系统在高频隔振区隔振性能较好,但在共振区力传递率较大。为抑制共振峰值,增大粘滞阻尼至 $\zeta_2 = 0.3$ 后,共振峰得到一定削减,但高频隔振区传递特性反而变差。若采用 $\zeta_1 = 0.05, \zeta_2 = 0.1$ 或 $\zeta_1 = 0.05, \zeta_2 = 0.2$ 配置,虽高频区隔振性能有一定降低,但共振区响应却得到明显改善。因此,采用迟滞阻尼对现有隔振系统性能提升为可行途径。

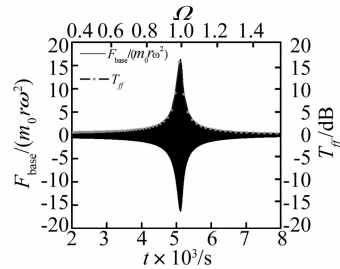


图5 数值计算与理论所得力传递率对比(纵坐标为基础所受作用力与激励幅值比值)
Fig. 5 Comparison between the numerical and the theoretic results (the vertical ordinate represents the ratio between the force on the base to the excitation amplitude)

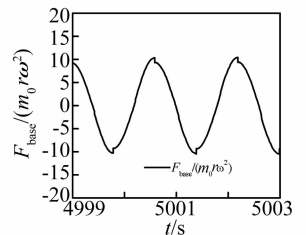


图6 数值计算所得基础所受作用力曲线
Fig. 6 Force on the base obtained from the numerical simulation

平均法所得力传递率。由曲线对比看出,数值仿真结果与理论结果基本吻合。

图6为数值计算得基础所受作用力曲线,纵坐标为基础所受力与激励力比值 $F_{base}/(m_0r\omega^2)$,横坐标为扫频时间坐标。由图6看出,摩擦阻尼产生的迟滞阻尼与材料内阻尼表现出的迟滞阻尼有所不同,主要体现在:运动方向改变时,阻尼力会出现跳跃现象,且随振幅的增大而增大。力的阶跃幅度与摩擦阻尼大小、振幅等有关。输出阻尼力不均匀,会对隔振效果产生

不利影响。

6 结 论

(1) 采用两自由度无约束隔振系统模型进行阻尼影响下的传递率特性研究。用平均法及数值仿真方法求解获得摩擦阻尼在几何非线性下产生的迟滞阻尼(结构阻尼)对系统力传递率特性。

(2) 增大刚体、基础质量可降低力传递率,提高隔振性能。增加阻尼系数会降低共振峰值,亦会降低高频隔振效果。采用迟滞阻尼,可明显降低共振峰值,高频性能下降较少。激励频率对基础力位移传递率有显著影响,激励频率小于 1 时,会对力位移传递率起放大作用;当激励频率大于 1 时,力位移传递率迅速下降。

(3) 数值结果与理论结果吻合良好。摩擦力产生的运动方向上非线性阻尼力存在跳跃现象,主要与运动方向转变时摩擦力方向改变有关。实际应用中应考虑可能的不利影响。

(4) 采用摩擦阻尼实现的结构阻尼可用于改善隔振系统隔振性能,并可提升现有隔振系统性能。

参 考 文 献

[1] JIA Jiu-hong, SHEN Xiao-yao, DU Jian-ye, et al. Design and mechanical characteristics analysis of a new viscous damper for piping system[J]. Archive of Applied Mechanics, 2009, 79 (3): 279 - 286.

[2] Sung Wei-pei, Shih Ming-xiang. Testing and modeling for energy dissipation behavior of velocity and displacement dependent hydraulic damper [J]. Tsinghua Science and Technology, 2008, 13(1): 1 - 6.

[3] Davis L P, Wilson J, Jewell R, et al. Hubble space telescope reaction wheel assembly vibration isolation system [A]. In Vibration Damping Workshop, Marshall Space Flight Center [C]. 1986.

[4] Raj A H K, Padmanabhan C. A new passive non-linear damper for automobiles[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering, 2009, 223 (11): 1435 - 1443.

[5] Jazar G N, Golnaraghi M F. Nonlinear modeling, experimental verification, and theoretical analysis of a hydraulic engine mount[J]. Journal of Vibration and Control, 2002, 8 (1): 87 - 116.

[6] Dixon J. The shock absorber handbook[M]. Wiley, 2008.

[7] Ruzicka J E, Derby T F. Influence of damping in vibration isolation[M]. DTIC Document, 1971.

[8] Guo P, Lang Z, Peng Z. Analysis and design of the force and displacement transmissibility of nonlinear viscous damper based vibration isolation systems [J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(4): 2671 - 2687.

[9] Kovacic I, Milovanovic Z, Brennan M J. On the relative and absolute transmissibility of a vibration isolation system subjected to base excitation [J]. Facta Universitatis-series: Working and Living Environmental Protection, 2008, 5 (1): 39 - 48.

[10] Peng Z K, Meng G, Lang Z Q, et al. Study of the effects of cubic nonlinear damping on vibration isolations using harmonic balance method [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2012, 47 (10): 1073 - 1080.

[11] Peng Z K, Lang Z Q, Tomlinson G R, et al. The transmissibility of vibration isolators with a nonlinear antisymmetric damping characteristic [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2010, 132 (1): 014501 - 1 - 014501 - 7.

[12] Milovanovic Z, Kovacic I, Brennan M J. On the displacement transmissibility of a base excited viscously damped nonlinear vibration isolator [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2009, 131 (5): 054502.1 - 054502.7.

[13] Tang B, Brennan M. A comparison of two nonlinear damping mechanisms in a vibration isolator [J]. Journal of Sound and Vibration, 2013, 332(3): 510 - 520.

[14] Tang B, Brennan M. A comparison of the effects of nonlinear damping on the free vibration of a single-degree-of-freedom system [J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2012, 134(2): 024501.1 - 014501.4.

[15] 张尧, 黄庭轩, 徐世杰. 星上控制力矩陀螺群隔振平台的动力学特性 [J]. 北京航空航天大学学报, 2012, 38 (1): 80 - 85.
ZHANG Yao, HUANG Ting-xuan, XU Shi-jie. Dynamic characteristic of vibration isolation platform of control moment gyroscopes on satellites [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics, 2012, 38 (1): 80 - 85.

[16] 关新, 王全武, 郑钢铁. 飞轮拟主动隔振方法 [J]. 宇航学报, 2010(7): 1870 - 1876.
GUAN Xin, WANG Quan-wu, ZHENG Gang-tie. A pseudo-active vibration isolation method for reaction wheels [J]. Journal of Astronautics, 2010(7): 1870 - 1876.

[17] 裘揆, 陈乐生, 陈大跃. 力隔振试验系统的结构设计和性能分析 [J]. 机械工程学报, 2007, 43 (2): 168 - 172.
QIU Kui, CHEN Le-sheng, CHEN Da-yue. Structure and performance analysis of rig for force isolation [J]. Chinese Journal of Mechanical Engineering, 2007, 43 (2): 168 - 172.

附录

1. 式(6)求解过程:

将式(7)求得

$$u' = U(\tau)\Omega\cos(\varphi(\tau)) \quad (8*)$$

并设满足条件

$$U'\sin\varphi + U\psi'\cos\varphi = 0 \quad (9*)$$

式(8)的导数为

$$u'' = \Omega U'\cos\varphi - \Omega U(\Omega + \psi')\sin\varphi \quad (10*)$$

将式(7)、(8*)、(10*)代入式(6),得

$$\Omega U'\cos\varphi - \Omega U(\Omega + \psi')\sin\varphi + 2\zeta_1 U|\sin\varphi||\cos\varphi|^{-1}\cos\varphi +$$

$$2\zeta_2 U\Omega\cos\varphi + U\sin\varphi = \Omega^2\sin(\Omega\tau) \quad (11*)$$

用条件(9*)消除式(11*)中 ψ' 可简化为

$$\Omega U' = - [U(1 - \Omega^2)\sin\varphi - \Omega^2\sin(\Omega\tau) +$$

$$2\zeta_1 U |\sin\varphi| |\cos\varphi|^{-1} \cos\varphi + 2\zeta_2 U \Omega \cos\varphi] \cos\varphi \quad (12 *)$$

$$\Omega U \psi' = [U(1 - \Omega^2) \sin\varphi - \Omega^2 \sin(\Omega\tau) + 2\zeta_1 U |\sin\varphi| |\cos\varphi|^{-1} \cos\varphi + 2\zeta_2 U \Omega \cos\varphi] \sin\varphi \quad (13 *)$$

对上式右端在 2π 周期内平均

$$\Omega U' = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U(1 - \Omega^2) \sin\varphi - \Omega^2 \sin(\Omega\tau) + 2\zeta_1 U |\sin\varphi| |\cos\varphi|^{-1} \cos\varphi + 2\zeta_2 U \Omega \cos\varphi] \cos\varphi d\varphi \quad (14 *)$$

$$\Omega U \psi' = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [U(1 - \Omega^2) \sin\varphi - \Omega^2 \sin(\Omega\tau) + 2\zeta_1 U |\sin\varphi| |\cos\varphi|^{-1} \cos\varphi + 2\zeta_2 U \Omega \cos\varphi] \sin\varphi d\varphi \quad (15 *)$$

上式化简为

$$\Omega U' = \frac{1}{2\pi} [-\pi\Omega^2 \sin\psi - 4\zeta_1 U - 2\zeta_2 U \Omega \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi d\varphi] \quad (16 *)$$

$$\Omega \pi \psi' = \frac{1}{2\pi} [U\pi(1 - \Omega^2) - \pi\Omega^2 \cos\psi] \quad (17 *)$$

稳态解应满足 $U' = 0$ 且 $\psi' = 0$, 据式(16*)、(17*)则有

$$-\pi\Omega^2 \sin\psi - 8\zeta_1 - 2\pi\zeta_2 U \Omega = 0 \quad (18 *)$$

$$U\pi(1 - \Omega^2) - \pi\Omega^2 \cos\psi = 0 \quad (19 *)$$

消除上两式中 ψ , 即得式(8)

$$\left(\frac{4\zeta_1 U + 2\pi\zeta_2 U \Omega}{\pi\Omega^2}\right)^2 + \left[\frac{U(1 - \Omega^2)}{\Omega^4}\right]^2 = 1 \quad (8)$$

2. 式(12)具体推导

由式(10)推导出 T_{ff} 的表达式为

$$T_{ff} = \frac{\max |M\ddot{x}|}{\max |f(x)|} = \frac{\max \left| \frac{Mm_0 r \omega^2}{m + M} \left(\sin(\Omega\tau) - \Omega^{-2} \frac{d^2 u}{d\tau^2} \right) \right|}{\max |m_0 r \omega^2 \sin(\omega t)|} = \frac{M}{m + M} \max |\sin(\Omega\tau) + U^2 \sin(\Omega\tau + \psi)| =$$

$$\frac{M \sqrt{(1 + U \cos\psi)^2 + U^2 \sin^2\psi}}{m + M} = \frac{M \sqrt{1 + U^2 + 2U \cos\psi}}{m + M}$$

考虑 $U\pi(1 - \Omega^2) - \pi\Omega^2 \cos\psi = 0$ (见式(8)推导), 则有

$$T_{ff} = \frac{M \sqrt{1 + U^2 + 2U \cos\psi}}{(m + M)} = \frac{M \sqrt{2U^2 \Omega^{-2} - U^2 + 1}}{m + M}$$