

第五、六章 动态电路的瞬态分析

许多实际电路不能只用电阻和电源元件来构造模型，往往还包含电容元件和电感元件，这两种元件的伏安关系都涉及对电流、电压的微分和积分，称为动态元件。含动态元件的电路称为动态电路。

这两章讨论的动态电路限于一阶和二阶电路。

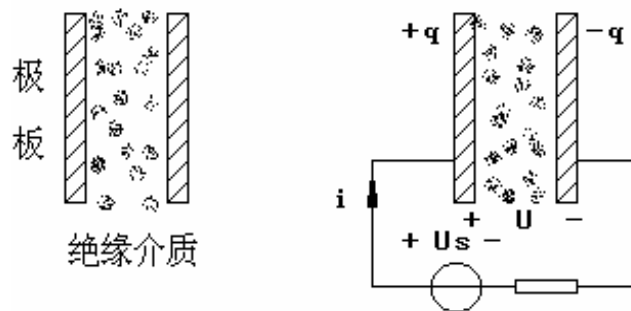
§5-1 电容元件和电感元件

一、电容元件

1. 电容元件及其库伏特性

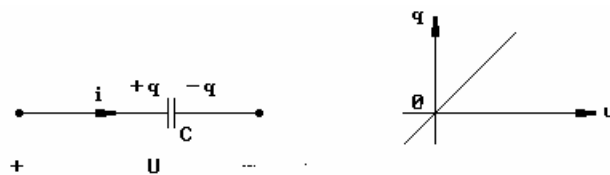
工程中电容器的应用极为广泛，那么究竟什么是电容器呢？

将两块金属极板用绝缘介质隔开，就形成了一个电容器。加上电源后，极板上分别聚集等量异号的电荷，在绝缘介质中建立起电场，并储存有电场能量，即 $U \rightarrow \pm q \rightarrow$ 存储电场能量。



实际电容器 $\xrightarrow{\text{忽略其介质、漏电损耗}}$ 电容元件

线性电容元件：理想二端元件，在电路中的图形符合为：



由图示参考方向，有 $q = Cu$ (库伏关系特性)

\therefore 库伏特性为 u 、 q 平面上的一条过原点的直线。

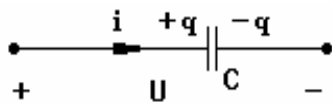
式中， C 定义为该电容元件的电容，即： $C = \frac{q}{u}$

单位：法(拉) F

	μF	$10^{-6} F$
常用辅助单位：	nF	$10^{-9} F$ 纳法
	pF	$10^{-12} F$

※非线性电容的特性曲线不是通过原点的直线。

2. 电容元件的 VAR



如上图：当极板间电压变化时，极板上电荷也随之改变，于是电容器电路中出现电流。当 u 、 i 关联方向时， $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_c(t)}{dt}$ 。

可见：

- 1) C 为动态元件， u 变化才有 i ； u 不变化，相当于 DC 时， $\rightarrow i = 0 \rightarrow C$ 开路(隔直作用)；
- 2) 由于 i 为有限值， u_c 不会跃变；

$$u_c(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\text{令： } u_c(0) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^0 i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$\text{则： } u_c(t) = u_c(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{记忆元件}$$

- 3) $u > 0$ ，且 $\frac{du}{dt} > 0$ ， $\rightarrow i > 0$ ，充电 $q \uparrow$

$$u > 0$$
，且 $\frac{du}{dt} < 0$ ， $\rightarrow i < 0$ ，放电 $q > 0$ ，但 $|q| \downarrow$

$$\text{又 } u < 0$$
，且 $\frac{du}{dt} < 0$ ， $\rightarrow i < 0$ ， $q < 0$ ，但 $|q| \uparrow$ 反向充电

$$\text{当 } u < 0$$
，且 $\frac{du}{dt} > 0$ ， $\rightarrow i > 0$ ， $q < 0$ ，但 $|q| \downarrow$ 反向放电

总之， $|u| \uparrow \rightarrow |q| \uparrow \rightarrow$ 某个方向充电 \rightarrow 储存能量 \uparrow

$|q| \downarrow \rightarrow$ 某个方向放电 \rightarrow 释放能量 \downarrow

3. 电场能量

u 、 i 关联方向时，电容元件吸收的功率为：

$$p(t) = u(t) \times i(t) = Cu(t) \frac{du(t)}{dt}$$
，则在 $dt = (t_o, t)$ 时间内，电容元件电

场中的能量增加量为： $dW = pdt = Cu(t)du(t)$

则 $t_o \rightarrow t$ 期间外电路供给电容的能量应为：

$$W_c(t) = \int_{t_o}^t u(\mathbf{x}) \times i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$= \int_{t_o}^t Cu(t) du(t) = \frac{1}{2} Cu^2(t) \Big|_{t_o}^t = \frac{1}{2} C [u^2(t) - u^2(t_o)]$$

如果充电是从 $t_o = -\infty$ 开始，即 $u(-\infty) = 0$ ，可知电容充电到 $u(t)$ 时，电容的储能为：

$$W_c(t) = \frac{1}{2}Cu^2(t) \geq 0$$

某个时刻电场能量只与当时的电压值有关，而与电压建立过程无关。总之 C 为储能元件，是无源元件(不会释放出比它所储能量还多的能量)。

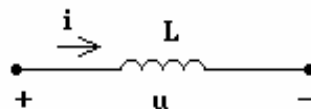
二、电感元件

定义：如图(P.96 图 5-4(a))所示，把金属导线绕在一骨架上就构成了实际的电感器(或称电感线圈)。

1. 电感元件及其韦安关系

电感是反映磁场能性质的电路参数，电感元件是实际线圈的理想化模型，假想它是由无阻导线绕制而成的线圈。当一匝线圈中通以电流 i 后，在线圈内部将产生磁通 f_L (称为自感磁通)， N 匝相链的线圈通过 Nf_L ，记 $y_L = Nf_L$ ， y_L 称做磁通链(或磁链)，即 N 匝相链的线圈通过的自感磁通之和。

f_L 和 y_L 是由线圈本身的电流产生的，叫做自感磁通和自感磁通链。

线性电感元件的图形符号为：

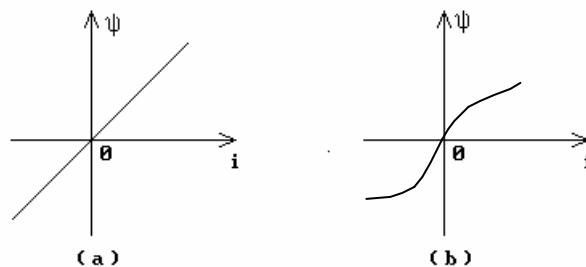
我们规定磁通 f_L 和磁通链 y_L 的参考方向与电流参考方向之间满足右手螺旋法则，在这种参考方向下，任何时刻线性电感元件的自感磁通链 y_L 与电流 i 是成正比的。

$$\text{有} \quad y_L = Li \quad (\text{称为韦安关系})$$

式中： L 称为该元件的自感或电感，是一个正实常数，单位：亨 (H)，辅助单位有： μH 、 mH ； f_L 、 y_L 的单位：韦伯 Wb 。

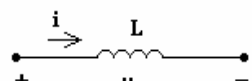
由上式知，电感元件的特性表征为磁链 y_L 与电流 i 的关系(韦安特性)。

对于线性电感，在 $y_L - i$ 平面上，特性曲线为一条通过原点的直线，如下图(a)，否则称非线性电感，如图(b)。



2. 电感的伏安关系 VAR

在电感元件中，当电流 i 随时间变化时，磁链 Ψ_L 也随时间改变。根据法拉第电磁感应定律，此时元件中产生感应电压，感应电压等于磁链的变化率，如果取 u 、 i 关联方向时，电感的 VAR 为：



$$u(t) = \frac{d\Psi(t)}{dt} = L \frac{di(t)}{dt} \quad (*)$$

可见：(1) L 为动态元件，(i 变化，才有 u)。

(2) 电流不变，即 DC 时， $u=0$ ， L 相当于短路。

(3) i 跃变 ($\frac{di}{dt} \rightarrow \infty$) 时， $\rightarrow u = \infty$ \therefore 只要 $u \neq \infty$ ， i 就不会跃变。

(4) 对(*)式积分，可把电感的电流 i 表示为电压 u 的函数

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(x) dx = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u(x) dx + \frac{1}{L} \int_0^t u(x) dx \quad (**)$$

令： $i(0) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^0 u(x) dx$ ， $i(0)$ 为初始电流

$$i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(x) dx \quad (\text{积分形式的 VAR})$$

可见： L 元件的 $i(t)$ 不仅与 t 时刻的 $u(t)$ 有关，还与 u 的历史有关，故 L 为记忆元件。

对式(**)任选初始时刻 t_0 ，则有：

$$i(t) = i(t_0) + \frac{1}{L} \int_{t_0}^t u(x) dx \quad (***)$$

3. 磁场能量

电感线圈中有电流时，其周围即建立磁场，因此电感是一种能存储磁场能量的元件。

取 u 、 i 关联参考方向，则瞬时功率为：

$$p_{\text{吸}}(t) = u(t) \times i(t) = Li(t) \frac{di(t)}{dt}$$

$p(t)$ 可正可负， $p(t)$ 为正，表示电感从外电路吸收能量；

$p(t)$ 为负，表示电感向外电路放出能量。

从 t_0 到 t 期间供给电感的能量为：

$$W_L(t) = \int_{t_0}^t u(x) \times i(x) dx = \frac{1}{2} L [i^2(t) - i^2(t_0)]$$

以上就是电感在 (t_0, t) 期间获得的储能，若 $t_0 = -\infty$ ，则由于 $i(-\infty) = 0$ ，

可知 t 时刻，电感的储能为： $W_L(t) = \frac{1}{2} Li^2(t) \geq 0$ 。 \therefore 电感在某一时刻的

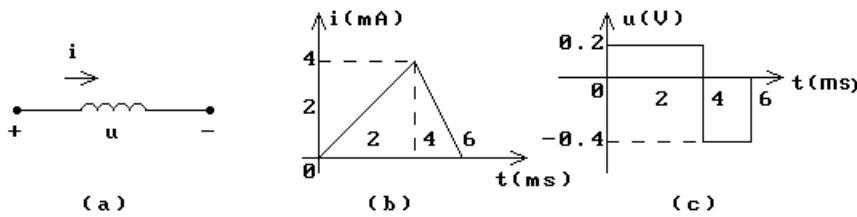
储能只与该时刻的电流值有关。

可见：(1) L 无源元件；

(2) L 储能元件，不耗能， L 不会释放出比它所储能量还多得多的能量。

以上我们介绍了 L 与 C ，通过分析可知，某一时刻电感的储能只与该时刻的电流有关，某一时刻电容的储能只与该时刻的电压有关，电路的储能可用电感电流及电容电压来表明。我们把某一时刻的电感电流和电容电压称为该时刻的状态。初始时刻 t_0 的 $i_L(t_0)$ 和 $u_C(t_0)$ 称为电路的初始状态。(P. 99 画线部分)

例：有一电感元件， $L=0.2H$ ，在指定的参考方向下(如图 a)，通过的电流 i 的波形如图 b 所示，求电感元件中产生的自感电压 u 的波形，并计算在电流增大过程中电感元件从电源吸收的能量。



解：当 $0 < t < 4ms$ 时， $i = t$ ， $u = L \frac{di}{dt} = 0.2V$

当 $4ms < t < 6ms$ 时， $i = -2t + 12$ ， $u = L \frac{di}{dt} = -0.4V$

$u(t)$ 的波形如图 c 所示。

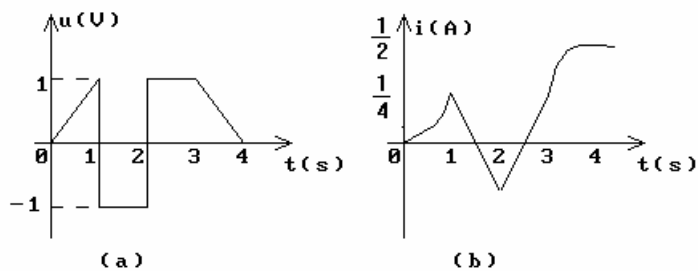
电流增大过程中电感元件吸取的能量等于 $i = 4ms$ 时的磁场能：

$$\frac{1}{2} Li^2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times (4 \times 10^{-3})^2 J = 1.6 \times 10^{-6} J = 1.6 \mu J$$

0~4ms 吸收

4ms~6ms 释放

例：若 $2H$ 电感的电压波形如图(a)所示，试画出电流的波形。



解：本题涉及积分的问题，可以先用积分求出函数表达式再画波形。对图(a)所示 $u(t)$ 波形可分段写出函数式如下：

$$u(t) = \begin{cases} t & (0 \leq t \leq 1) \\ -1 & (1 \leq t \leq 2) \\ 1 & (2 \leq t \leq 3) \\ 4-t & (3 \leq t \leq 4) \end{cases}$$

利用式(***)可分段计算 $i(t)$ 。

在 $0 \leq t \leq 1$ 期间: $i(t) = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 + \frac{1}{2} \int_0^t t d\mathbf{x} = \frac{t^2}{2} A$

$t = 1$ 秒时, $i(1) = \frac{1}{4} A$

此间 $i(t)$ 波形为抛物线, 从 0 增加到 $\frac{1}{4} A$, 曲线向上凹。

在 $1 \leq t \leq 2$ 期间: $i(t) = i(1) + \frac{1}{L} \int_1^t u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_1^t (-1) \times dt = -\frac{t}{2} + \frac{3}{4} A$

$t = 2$ 秒时, $i(2) = -\frac{1}{4} A$

此间 $i(t)$ 线性下降, 由 $\frac{1}{4} A$ 降至 $-\frac{1}{4} A$ 。

在 $2 \leq t \leq 3$ 期间: $i(t) = i(2) + \frac{1}{L} \int_2^t u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_2^t dt = \frac{t}{2} + \frac{5}{4} A$

$t = 3$ 秒时, $i(3) = \frac{1}{4} A$

在 $3 \leq t \leq 4$ 期间: $i(t) = i(3) + \frac{1}{L} \int_3^t u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \int_3^t (4-t) dt = -\frac{t^2}{4} + 2t - \frac{7}{2} A$

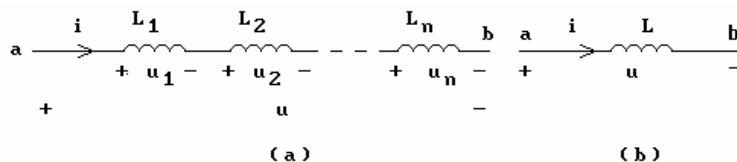
$t = 4$ 秒时, $i(4) = \frac{1}{2} A$

此间 $i(t)$ 波形为按抛物线上升, 曲线向下凹, 从 $\frac{1}{4} A$ 增加到 $\frac{1}{2} A$ 。

在 $t > 4$ 时, $u(t)$ 为零, 因而 $i(t) = \frac{1}{2} A$ 。

根据以上分析结果画出 $i(t)$ 波形, 如图 b 所示。

三、电感的串联



与电阻串联一样, 上图为电感串联电路, 假设电压、电流参考方向关联, 由电感元件的 VAR 可得:

$$u_1 = L_1 \frac{di}{dt}, u_2 = L_2 \frac{di}{dt}, \dots, u_k = L_k \frac{di}{dt}, \dots, u_n = L_n \frac{di}{dt}, \text{ 由 KVL 得:}$$

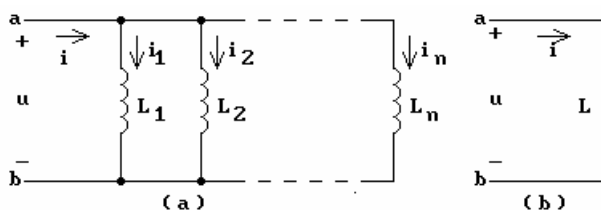
$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 + \dots + u_k + \dots + u_n \\ &= L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + \dots + L_k \frac{di}{dt} + \dots + L_n \frac{di}{dt} \\ &= (L_1 + L_2 + \dots + L_k + \dots + L_n) \frac{di}{dt} \end{aligned}$$

所以, 串联等效电感为: $L = L_1 + L_2 + \dots + L_k + \dots + L_n = \sum_{k=1}^n L_k$

任一电感上的电压为: $u_k(t) = \frac{L_k}{L} u(t), \quad k = 1, 2, \dots, n$

式中: $L = \sum_{k=1}^n L_k$, $\frac{L_k}{L}$ 称为分压系数。

四、电感的并联



电感并联电路与其等效电感

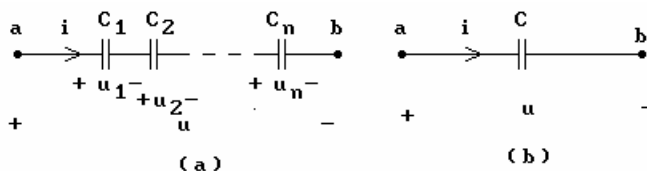
由电感的 VAR 及电路的 KCL 不难得出电感并联的等效电感为:

$$\frac{1}{L} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{L_k}, \text{ 即: 电感并联电路等效电感的倒数等于相并联各电感}$$

倒数之和。

任一电感上的电流为: $i_k(t) = \frac{1}{L_k} \int_{-\infty}^t u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{L}{L_k} i(t)$, 式中 $k = 1, 2, \dots, n$, 该式称为电感并联分流公式, $\frac{L}{L_k}$ 称为分流系数, 上式表明电感并联分流符合反比关系。

五、电容的串联



电容串联电路与其等效电容

上图为 n 个电容的串联电路, 设电流、电压参考方向关联。根据电容元件的电压电流约束关系得:

$$u_1(t) = \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

$$u_2(t) = \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

...

$$u_k(t) = \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

...

$$u_n(t) = \frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

由 KVL 得电容串联电路总电压:

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_k(t) + \dots + u_n(t)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \cdots + \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} + \cdots + \frac{1}{C_n} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_k} + \cdots + \frac{1}{C_n} \right) \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad \text{式中: } \frac{1}{C} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{C_k}
\end{aligned}$$

C 是 n 个电容串联后的等效电容, 它的倒数等于 n 个相串联电容倒数之和。

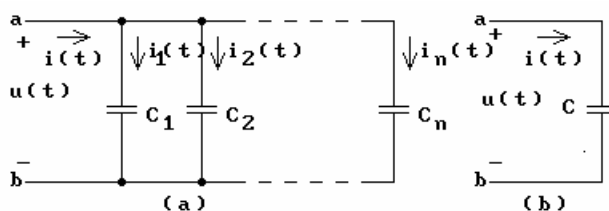
因流经各串联电容的电流是同一电流, 有: $\int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = Cu(t)$

所以, 相串联的电容 C_k 上的电压为:

$$u_k(t) = \frac{1}{C_k} \int_{-\infty}^t i(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = \frac{C}{C_k} u(t)$$

此式称为电容串联电路分压公式, 其中 $\frac{C}{C_k}$ 称为分压系数, 它说明电容串联电路分压与电容值 C_k 呈反比关系。

六、电容的并联



电容并联电路与其等效电容

上图为 n 个电容的并联电路, 由 KCL 及电容元件上的电流电压微分关系可的等效电容为:

$$C = C_1 + C_2 + \cdots + C_{k+} + \cdots + C_n = \sum_{k=1}^n C_k$$

即: 电容并联电路等效电容等于相并联的各电容之和。

相并联电容上的电压是同一电压, 又 $\frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i(t)$, 推得:

相并联电容 C_k 上的电流为: $i_k = C_k \frac{du}{dt} = \frac{C_k}{C} i(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$

式中 C 是并联后的等效总电容, 上式称为电容并联分流公式, 其中 $\frac{C_k}{C}$ 为分流系数, 它表明电容并联电路分流与电容值 C_k 呈正比关系。

七、 C 和 L 的模型(自学)

作业: P. 121 5-1、5-3

§5-2 一阶电路的瞬态分析

一、动态电路

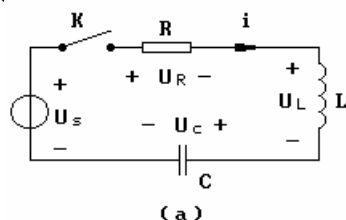
1. 稳态:

- (1) 不随时间发生变化;
- (2) 周期性地变化, 这一状态称为电路的稳定工作状态。

2. 暂(瞬)态:

含有动态元件的电路发生“换路”(或工作条件发生变化), 需经历一个稳态到另一个稳态的过渡, 此过渡过程称为暂(瞬)态过程。

例: 电路如图(a)所示:



当 K 合上之前, $i=0$, $u_R=0$, 在某一时刻 t , 合上 K , 则由 KVL 有:

$$u_R + u_L + u_C = u_s$$

即

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = u_s$$

求导、整理: $RC \frac{di(t)}{dt} + LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + i(t) = C \frac{du_s}{dt}$ (二阶微分方程)

若将 L 短路, 则有: $RC \frac{di}{dt} + i = C \frac{du_s}{dt}$ (一阶微分方程)

既然是微分方程, 那么它们的解必然是随时间 t 而变, 也就是说, u_R 、 u_L 、 u_C 并不是直接达到最终的稳态(固定值), 而是要经历一段时间, 我们把这种含 L 、 C 的电路称为动态电路, 而将 L 、 C 元件称为动态元件。

一般情况下, 当电路中含有:

一个储能元件 → 描述为一阶微分方程 —— 一阶电路

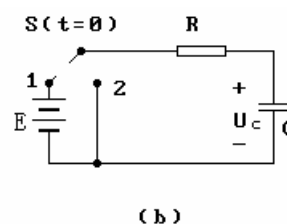
二个储能元件 → 描述为二阶微分方程 —— 二阶电路

n 个储能元件 → 描述为 n 阶微分方程 —— n 阶电路

二、动态电路的特点

设有电路, 如图(b)。当 $t < 0$, S 打在 1, E 对 C 充电, $u_C \uparrow = E$, 达到一种稳定状态; S 在 $t=0$ 时刻打到 2, C 对外放电, 直至放光($u_C=0$), 从而进入另一种稳定状态。

这里, S 从 1 → 2, 称之为换路, 理解为瞬间



完成。电路的接通或断开、电路参数或电源的突变均可理解为换路。

S 在 1 时, 称为换路前, 记为 $t=0_-$

S 在 2 时, 称为换路后, 记为 $t=0_+$

可以看到, S 从 1 打到 2 后, 欲使 $u_c = 0$, 需要一定时间, 这个过程就称为过渡过程或暂态过程。

同理: 若 R 改为 R' , 或 C 改为 C' , 则参数改变后, 也要有一过渡。

结论: 当动态电路的结构或元件参数发生改变时, 如电源或无源元件断开或接入, 信号的突然注入等, 电路将从一个稳定状态逐步过渡到另一个稳定状态, 这中间的过程即是过渡过程。(P.102 画线)

三、初始条件

若有 n 阶微分方程: $a_1 f^{(n)}(t) + a_2 f^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} f'(t) + a_n f(t) = b$

欲求 $f(t)$, 必须事先知道: $f(0), f'(0), \dots, f^{(n-1)}(0)$ (即初始值)

对于动态电路: 即为 $u(0_+), i(0_+)$ 及其导数 $u^{(n-1)}(0_+), i^{(n-1)}(0_+)$ 。

四、换路定理

1. 电容

由 $u_c(t) = u_c(t_0) + \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i_c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, 令: $t_0 = 0_-, t = 0_+$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_c(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$$

只要 i_c 为有限值, 必有: $\frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_c(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$

$\therefore u_c(0_-) = u_c(0_+)$ 换路定理一

即: 在换路的一瞬间, 电容上的电压不会跃变。

若 $u_c(0_-) = 0$, 则 $u_c(0_+) = 0$, 这一瞬间, C 被短路 $\Rightarrow u_c(t_{0-}) = u_c(t_{0+})$

2. 电感

有 $i_L(0_+) = i_L(0_-)$ 换路定理二

即: 在换路的一瞬间, 电感上流动的电流不会跃变。

若 $i_L(0_-) = 0$, 则 $i_L(0_+) = 0$, 即在 $t = 0_+$ 这一时刻, 电感相当于开路。

$\Rightarrow i_L(t_{0-}) = i_L(t_{0+})$

五、初始值的求解

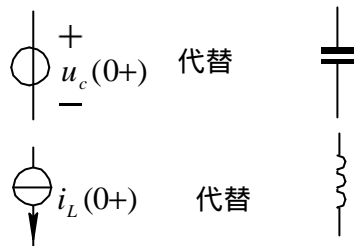
1. 由 $t = 0_-$ 的电路求 $u_c(0_-), i_L(0_-)$

若 $t = 0_-$ 时电路已达稳态, 则 $\begin{cases} L & \text{--- 短路} \\ C & \text{--- 开路} \end{cases}$

于是, 0_- 电路 $\rightarrow 0_-$ 电阻电路

2. 由换路定律, 得 $u_c(0_+)$, $i_L(0_+)$

相关初值用



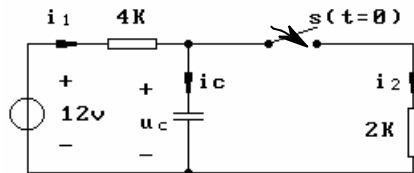
原电路 \rightarrow 0_+ 电阻电路。

六、终值 $r(\infty)$ 的确定

换路后, 由 $t \rightarrow \infty$ 的终值稳态电路求 $r(\infty)$, 此时:

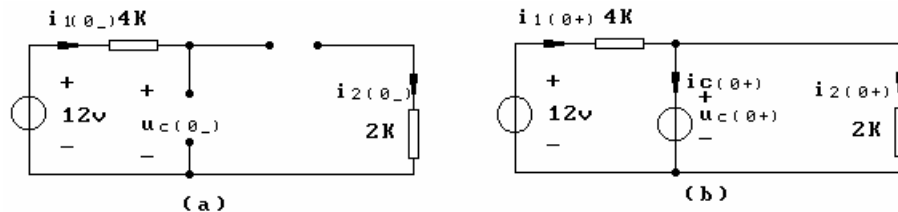
$\left\{ \begin{array}{l} L \text{ --- 短路} \\ C \text{ --- 开路} \end{array} \right.$ **P** “ ∞ 电路”为“ ∞ 电阻电路”

例: $t=0$, 开关 S 合上, 求: $i_1(0_+)$, $i_c(0_+)$, $i_2(0_+)$, $u_c(0_+)$ 。



解: $t < 0$, 电路已达稳态, C 相当于开路, 电路如图(a)。

$$\therefore u_c(0_-) = 12V$$

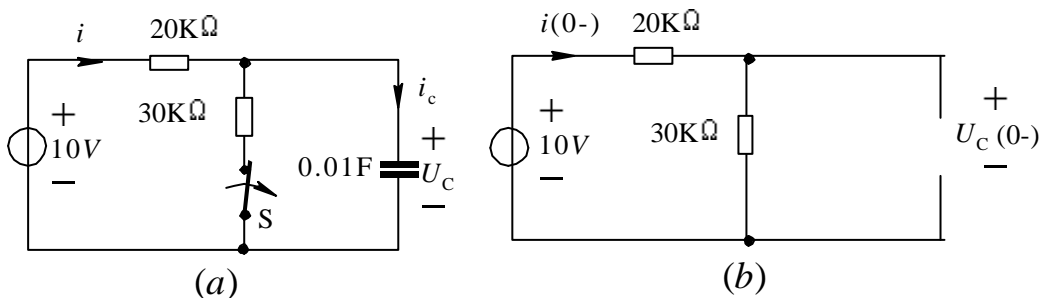


由换路定律, $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 12V$ $i_1(0_-) = 0$, $i_2(0_-) = 0$

$t > 0$, ($t = 0_+$)时, 用替代定理可得图(b), 以一电压源替代 $u_c(0_+)$

$$\therefore i_1(0_+) = 0, \quad i_2(0_+) = 6mA, \quad i_c(0_+) = -6mA$$

例: 图示电路, $t < 0$ 时, S 闭合, 电路已达稳态, $t = 0$ 时, S 断开, 试求: $i(0_+)$, $u(0_+)$, $u_c(0_+)$, $i_c(0_+)$ 。



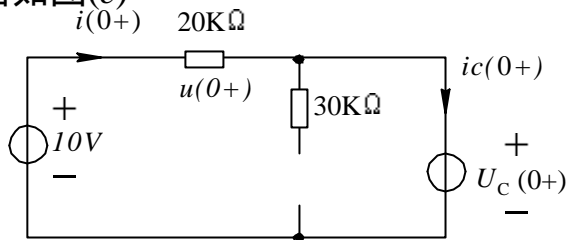
解: 0_- 电路, C 相当于开路, 电路如图(b)

∴ 有: $u_c(0_-) = \frac{10}{20+30} \times 30 = 6V$ $i(0_-) = \frac{10}{20+30} = 0.2mA$

$t=0$ 时, S 闭合, 由换路定律: $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 6V$

0_+ 电路, C 用电压源代替, 电路如图(c)

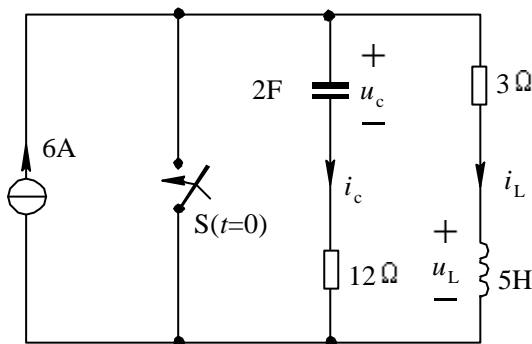
∴ $i(0_+) = i_c(0_+) = \frac{10 - u_c(0_+)}{20} = 0.2mA$
 $u(0_+) = 20 \times i(0_+) = 4V$



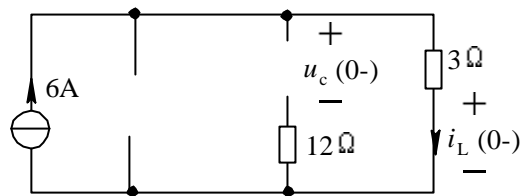
(c)

例: 图示电路, $t < 0$ 时, S 断开, 电路已达稳态; $t=0$ 时, S 闭合。

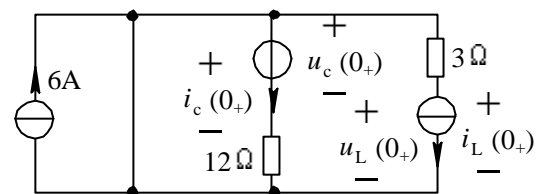
试求: $i_L(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 、 $u_c(0_+)$ 、 $i_c(0_+)$ 。



(a)



(b)



(c)

解: 0_- 电路如图(b)所示, C 相当于开路, L 相当于短路

∴ $i_L(0_-) = 6A$ $u_c(0_-) = 3 \times i_L(0_-) = 18V$

$t=0$ 时, S 断开, 由换路定律

$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 18V$ $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 6A$

0_+ 电路, 如图(c)所示:

有 $i_c(0_+) = \frac{-u_c(0_+)}{12} = \frac{-18}{12} = -1.5A$

由 KVL: $3i_L(0_+) + u_L(0_+) = 0$

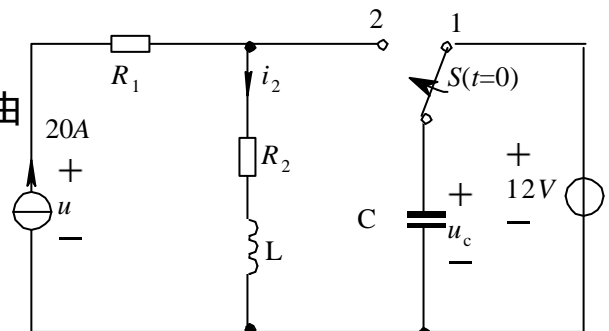
∴ $u_L(0_+) = -3i_L(0_+) = -3 \times 6 = -18V$

例: 图示电路, $t < 0$ 时, S 打在“1”的位置, 电路已达稳态, $t=0$ 时, S 由

“1” 打向“2”, $R_1 = 1.5\Omega$,

$R_2 = 0.5\Omega$, $L = 2H$, $C = 2F$,

试求: $i_2(0_+)$ 、 $u_c(0_+)$ 、 $u(0_+)$ 。



解：0₋ 电路如右图所示

有： $i_2(0_-) = 20A$

$u_c(0_-) = 12V$

$u(0_-) = 20(R_1 + R_2) = 40V$

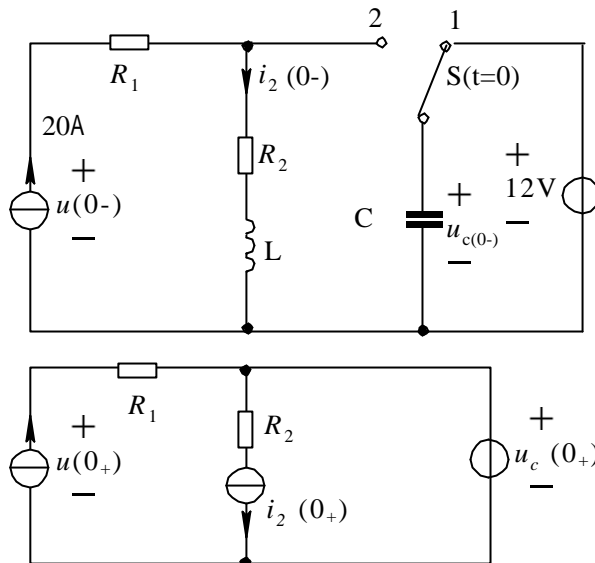
由换路定律：

$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 12V$

$i_2(0_+) = i_2(0_-) = 20A$

0₊ 电路如图所示，有：

$u(0_+) = u_c(0_+) + 20R_1 = 42V$



例：图示电路如图(a)， $U_s = 50V$ ， $R_1 = R_2 = 5\Omega$ ， $R_3 = 20\Omega$ ， $t < 0$ 时， S 闭合，电路已达稳态， $t = 0$ 时， S 断开，试求： $i_L(0_+)$ 、 $u_c(0_+)$ 、 $u_{R2}(0_+)$ 、 $u_{R3}(0_+)$ 、 $i_c(0_+)$ 、 $u_L(0_+)$ 。

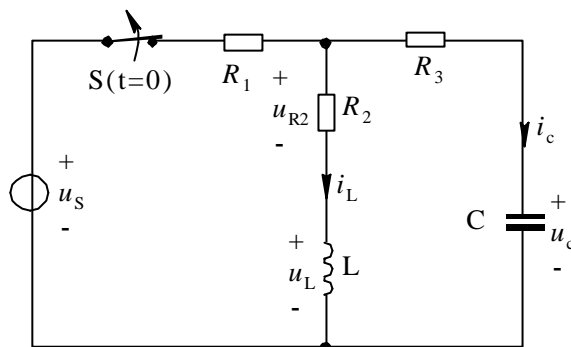
解：(1) 确定独立初始值

$u_c(0_+)$ 、 $i_L(0_+)$ 。

0₋ 电路如图(b)所示， C 相当于开路， L 相当于短路

$\therefore i_L(0_-) = \frac{U_s}{R_1 + R_2} = \frac{50}{5 + 5} = 5A$

$u_c(0_-) = 5 \times i_L(0_-) = 25V$

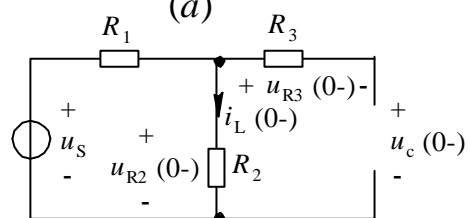


(a)

$t = 0$ 时， S 断开，由换路定律

$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 25V$

$i_L(0_+) = i_L(0_-) = 5A$



(b)

(2) 计算相关初始值， C 、 L 分别用等效电压源 $u_c(0_+)$ 和等效电流源 $i_L(0_+)$ 代替，得到 $t = 0_+$ 时刻的等效电路，如图(c)所示，

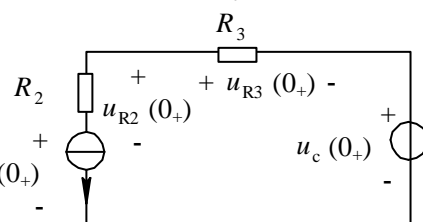
有：

$u_{R2}(0_+) = R_2 \times i_L(0_+) = 5 \times 5 = 25V$

$i_c(0_+) = -i_L(0_+) = -5A$

$u_{R3}(0_+) = R_3 \times i_c(0_+) = 20 \times (-5) = -100V$

$u_L(0_+) = -u_{R2}(0_+) + u_{R3}(0_+) + u_c(0_+) = -25 + (-100) + 25 = -100V$



(c)

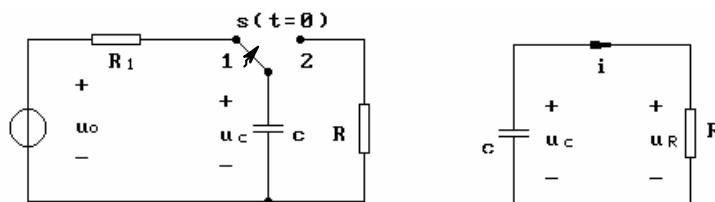
比较: $u_{R3}(0_-) = 0$
 $u_{R2}(0_-) = R_2 \times i_L(0_-) = 25V$
 $u_L(0_-) = 0$

七、一阶电路的零输入响应

在动态电路中起激励作用的因素:

- ① 外施独立源, L 、 C 无储能 \rightarrow 零状态响应
 - ② L 、 C 初始有储能, 无外加电源 \rightarrow 零输入响应
- 对于线性电路: 零输入响应 + 零状态响应 = 全响应

1. RC 电路的零输入响应



$t=0$ 时: S 从 1 打到 2: 有: $u_c(0_+) = u_c(0_-) = u_o$

$$u_R(t) = u_c(t) = Ri \quad \text{而} \quad i = -C \frac{du_c}{dt}$$

由 KVL: $RC \frac{du_c(t)}{dt} + u_c(t) = 0$ (一阶齐次微分方程)

又 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = u_o$

特征方程 $RCp + 1 = 0$ 得: $p = -\frac{1}{RC}$ (特征根)

$\therefore u_c(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$

又 $u_c(0_+) = u_o \rightarrow A = u_c(0_+) = u_o$

$\therefore u_c(t) = u_o e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$

电流: $i(t) = -C \frac{du_c}{dt} = \frac{u_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$

$$u_R(t) = u_c(t) = Ri(t) = u_o e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$$

可以看出 $u_c(t)$ 呈指数下降。令: $RC = \tau$ (称为时间常数, 单位: 秒)。理论上, $t \rightarrow \infty, u_c(\infty) = 0, C$ 放电完毕。

$t=0$	$t = \tau$	$t=2 \tau$
$u_c = u_o$	$u_c = 36.8\% u_o$	$u_c = 13.5\% u_o$
$t=3 \tau$	$t=4 \tau$	$t=5 \tau$
$u_c = 0.05 u_o$	$u_c = 1.8\% u_o$	$u_c = 0.07\% u_o$

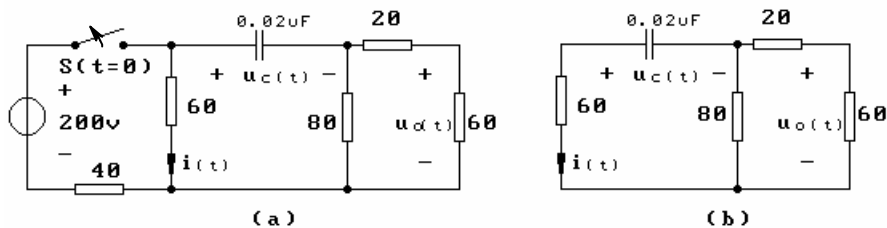
通常认为： t 经 $3\tau \sim 5\tau$ ， C 放电完毕，过渡过程结束，电路进入新的稳定状态。时间常数等于特征根 P 倒数的负值；特征根 P 具有频率的量纲，故称为固有频率。 τ 越小，电压、电流衰减越快。

对 RC 电路：① 一个 RC 电路，仅有一个对应的 τ ；

② $u_c(t)$ 、 $i(t)$ 的形式为 $Ae^{-\frac{t}{RC}}$ 。

τ 如何求呢？关键是求 R 。

例：求图(a)电路中 $i(t)$ 、 $u_o(t)$ 。



解： 0_- 电路， $0.02 \mu F$ 电容开路。

$$u_c(0_-) = \frac{60}{40+60} \times 200 = 120V$$

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = 120V$$

换路后：关键求 τ ， $\tau = RC$ ，先求 R

求 C 两端的等效电阻： $R = 60 + \frac{80}{2} = 100\Omega$

$$\therefore \tau = RC = 100 \times 0.02 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-6} s$$

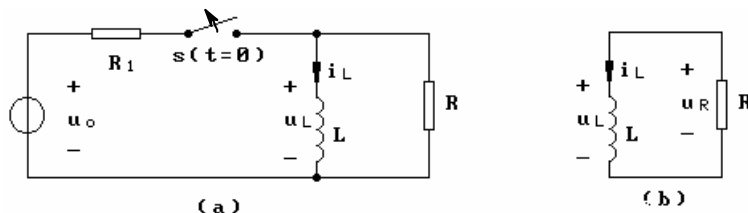
$$u_c(t) = 120e^{-\frac{t}{2 \times 10^{-6}}} = 120e^{-5 \times 10^5 t} \text{ V}, t \geq 0$$

由电容元件的 VAR：

$$i(t) = -C \frac{du_c(t)}{dt} = -0.02 \times 120 \times (-5 \times 10^5) e^{-5 \times 10^5 t} = 1.2e^{-5 \times 10^5 t} \text{ A}, t \geq 0$$

利用电阻并联的分流公式可求出 $u_o(t)$ (略)。

2. RL 电路的零输入响应



$$t < 0 \quad i_L(0_-) = \frac{U_o}{R_1} = I_o$$

$$t > 0 \quad i_L(0_+) = i_L(0_-) = I_o$$

$$t \geq 0 \text{ 的电路如图 } b: u_L(t) = L \frac{di_L}{dt}, \quad u_R(t) = -Ri_L(t)$$

由 KVL: $L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = 0$

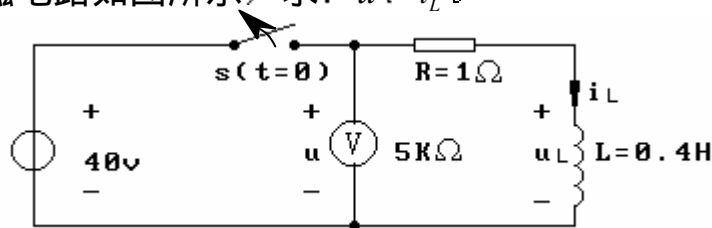
特征方程: $Lp + R = 0 \Rightarrow p = -\frac{R}{L}$

$\therefore i_L(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$, 代入初值, 得 $A = I_0$

故 $i_L(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$ A, $t \geq 0$

令: $\frac{L}{R} = \tau \rightarrow$ 时间常数, 可利用 R 与 $L \rightarrow \tau$

例: 励磁电路如图所示, 求: u 、 i_L 。



解: $i_L(0_+) = i_L(0_-) \approx 40A$

当 $t \geq 0$ 时, $t = \frac{L}{R} = \frac{0.4}{5000+1} \approx 8 \times 10^{-5} s$

$\therefore i_L(t) = 40e^{-\frac{t}{\tau}} = 40e^{-\frac{t}{8 \times 10^{-5}}} A, t \geq 0$

$u(t) \approx u_L(t) = -5000i_L(t) = -2 \times 10^5 e^{-\frac{t}{\tau}} V, t \geq 0$

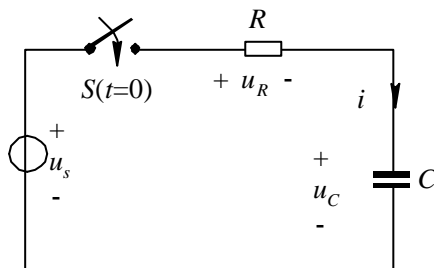
当 $t = 0_+$, $|u| = 200 KV$

分析: \textcircled{V} 将被烧毁, 若没有 \textcircled{V} , i_L 没有通路, 将在开关上产生强大的电弧光, 空气开关易被强大的电压击穿。

八、一阶电路的零状态响应

零状态指: $u_c(0_+) = 0, i_L(0_+) = 0$ 。

1. RC 电路在 DC 激励下的零状态响应



图示电路中, 在开关 S 闭合之前, 电容未充电, 即电路处于零初始状态, $u_c(0_-) = 0$ 。 S 合上, C 将被充电。

$t \geq 0$ 时, 由 KVL 得: $u_R + u_c = u_s$

把 $u_R = Ri$ 、 $i = C \frac{du_c}{dt}$ 代入上式, 得以 $u_c(t)$ 为变量的方程:

$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_s \quad (t \geq 0) \quad (*)$$

这是一阶线性非齐次常微分方程，此类方程的解由两个分量组成

即：

$$u_c = u'_c + u''_c$$

u'_c 非齐次微分方程式(*)的一个特解。在图中，开关 S 闭合很久后，电容已充电完毕，这时电容电压已趋稳定，即：

$$u'_c = u_c(\infty) = u_s \quad (\text{作为特解})$$

u''_c 对应齐次微分方程式 $RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$ 的通解。

$$u''_c = Ae^{-\frac{t}{RC}} = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

式中：A 待定积分常数。

$p = -\frac{1}{RC}$ ，为方程的特征根。

$\tau = RC$ 时间常数。

故： $u_c(t) = u_s + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$

由 $u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0$ ，得： $A = -u_s$

$$\therefore u_c = u_s - u_s e^{-\frac{t}{\tau}} = u_s (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \text{ V} \quad (t \geq 0)$$

u'_c 在直流或周期函数激励下的特解，一般取电路达到稳定状态的解作为特解(与激励形式相同)，故特解也称为稳态解或稳定分量。

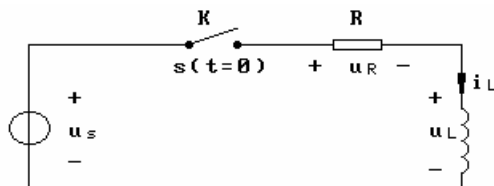
u''_c 形式与输入激励无关，称为自由分量，与零输入响应具有相同的模式，通常它随着时间的推移而趋于零，也叫暂态解或暂态分量。

在图示电路参考方向下，

$$i(t) = C \frac{du_c}{dt} = \frac{u_s}{R} \times e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ A} \quad (t \geq 0)$$

2. RL 电路在恒定输入的零状态响应

K 闭合之前，电感中无电流，电路处于零状态， $i_L(0_-) = 0$ ；当 $t=0$ ，K 闭合，由 KVL：



$t \geq 0$ 时， $u_L + u_R = u_s$

$$L \frac{di_L}{dt} + u_R = u_s \quad (t \geq 0) \quad (**)$$

将 $u_L = L \frac{di_L}{dt}$, $u_R = Ri_L$ 代入式(**):

有: $L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = u_s$ ($t \geq 0$)

解之: $i_L = i'_L + i''_L$

稳态分量 $i'_L = i_L(\infty) = \frac{u_s}{R}$

暂态分量: $i''_L = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{u_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$i_L(t) = \frac{u_s}{R} - \frac{u_s}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{u_s}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad A \quad (t \geq 0)$$

$$u_L(t) = L \frac{di_L}{dt} = u_s e^{-\frac{t}{\tau}} \quad V \quad (t \geq 0)$$

例: P.110 例 5-5

作业: P.122 5-7、5-8、5-10、5-11、5-15。

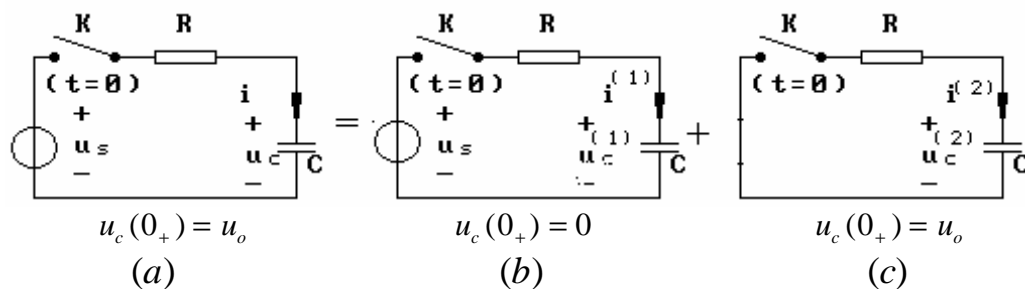
§5-3 一阶电路的全响应、三要素法

一、全响应

在非零初始状态和外部输入共同作用下的响应称为全响应。对线性电路，由叠加定理可知：

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

下面以 RC 电路为例进行讨论：



$$u_c^{(1)}(t) = u_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \quad (1)$$

$$u_c^{(2)}(t) = u_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad (2)$$

由叠加定理：

$$u_c(t) = u_s(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) + u_o e^{-\frac{t}{RC}} \quad (*)$$

零状态 零输入

$$= (u_o - u_s)e^{-\frac{t}{RC}} + u_s$$

暂态响应 稳态响应
自由分量 强制分量

$$i(t) = i^{(1)}(t) + i^{(2)}(t) = \frac{u_s}{R} e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{u_o}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (**)$$

从上面的分析，可以得到：

全响应 = 稳态分量 + 暂态分量

全响应 = 强制分量 + 自由分量

$$u_c(t) = \underbrace{(u_o - u_s)e^{-\frac{t}{RC}}}_{\text{暂态分量 [响应]}} + \underbrace{u_s}_{\text{稳态分量 [响应]}}$$

在实际问题中，往往并不要求算出全响应的分量，可以通过某种途径直接写出结果，即三要素法。

二、三要素法

一阶电路的微分方程为：
$$a \frac{df(t)}{dt} + bf(t) = g(t)$$

上式为一阶常系数微分方程， a 、 b 为常数， $g(t)$ 则取决于激励源，其通解表达式为：

$$f(t) = f_{\text{特}}(t) + Ae^{pt} \quad (t \geq 0)$$

当 $t=0_+$ 时: $f(0_+) = f_{\text{特}}(0_+) + A$

$$\therefore A = f(0_+) - f_{\text{特}}(0_+)$$

$$\therefore \text{全响应: } f(t) = f_{\text{特}}(t) + [f(0_+) - f_{\text{特}}(0_+)]e^{pt}$$

$f_{\text{特}}(t)$ 一般是可以通过换路后达到新稳定状态时的电路(终值电路)来求解, 即 $f_{\text{特}}(t) = f_{\text{新稳}}(t)$ 。若激励为直流, 则此特解为一常数。(直流稳态响应)。

\therefore 当 $t \rightarrow \infty$ 时电路才进入稳定状态,

$$\therefore f_{\text{特}}(t) = f(\infty), \quad f_{\text{特}}(0_+) = f(\infty)$$

$$\therefore f(t) = f(\infty) + [f(0_+) - f(\infty)]e^{pt}$$

式中: $f(\infty)$ 、 $f(0_+)$ 、 $p = -\frac{1}{\tau}$ 称为三要素。

(1) $p = -\frac{1}{\tau}$ 通过换路后的电路结构求得: $\tau_c = RC$ 、 $\tau_L = \frac{L}{R}$;

(2) $f(0_+)$ 通过换路定理和 0_+ 等效电路来求;

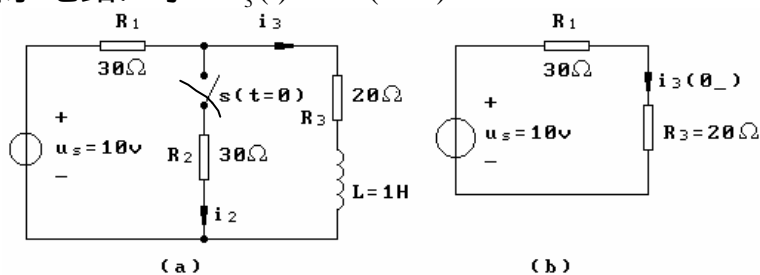
(3) $f(\infty)$ 可通过换路后, $t = \infty$ 达到新的稳态电路来求。此时, C 开路, L 短路。

例如: $u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad V$

$$i_L(t) = i_L(\infty) + [i_L(0_+) - i_L(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \quad A$$

举例说明方法、步骤。

例: 图示电路, 求: $i_3(t) = ? \quad (t \geq 0)$ 。

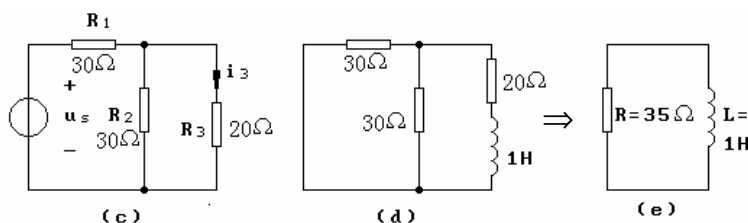


解: $t = 0_-$ 时, 电路如图(b)所示。

$$\text{有: } i_3(0_-) = \frac{10}{20+30} = 0.2A$$

由换路定律 $i_3(0_+) = i_3(0_-) = 0.2A$

换路后的稳定状态($t \rightarrow \infty$), 电路如图(c)所示。



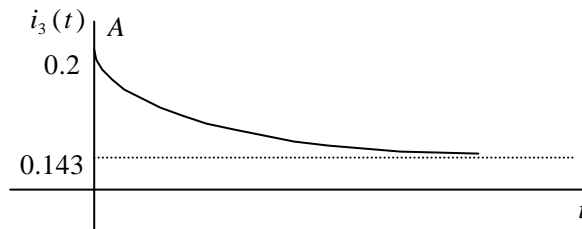
有: $i_3(\infty) = \frac{u_s}{R_1 + \frac{R_2 \times R_3}{R_2 + R_3}} \times \frac{R_2}{R_2 + R_3} = 0.143A$ (用分流公式)

以下求 τ : 换路后的电路 (令电压源 u_s 短路, 即除源), 电路如图 (d) 所示:

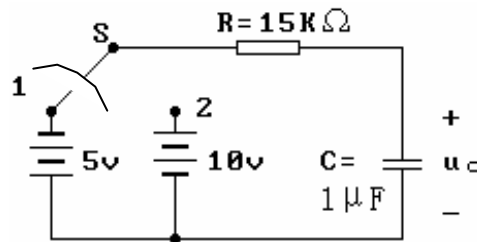
$$\therefore \tau = \frac{L}{R} = \frac{1}{35} s$$

$$\begin{aligned} i_3(t) &= i_3(\infty) + [i_3(0_+) - i_3(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} \\ &= 0.143 + (0.2 - 0.143)e^{-35t} \\ &= 0.143 + 0.057e^{-35t} \text{ A } (t \geq 0) \end{aligned}$$

下面画出波形:



例: 开关 S 在 $t=0$ 时由 $1 \rightarrow 2$, $t=10ms$ 时, 再从 $2 \rightarrow 1$ 。试求 $u_c(t)$, 并画出波形。



解: 分段讨论: (用三要素法)

① $0 < t$, S 在 1, 电路处于稳态 $u_c(0_-) = -5V$

② $0 < t < 10ms$, S 从 $1 \rightarrow 2$, 这时

$$u_c(0_+) = u_c(0_-) = -5V, \quad u_c(\infty) = 10V$$

$$\tau = RC = 15 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} = 15ms$$

$$\therefore u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= 10 + (-5 - 10)e^{-\frac{t}{15ms}}$$

$$= 10 - 15e^{-\frac{t}{15ms}} \text{ V}, \quad 0 < t < 10ms$$

③ $t \geq 10ms$, S 从 $2 \rightarrow 1$, 这时

$$u_c(10ms_+) = u_c(10ms_-) = 10 - 15e^{-\frac{10ms}{15ms}} = 2.3V$$

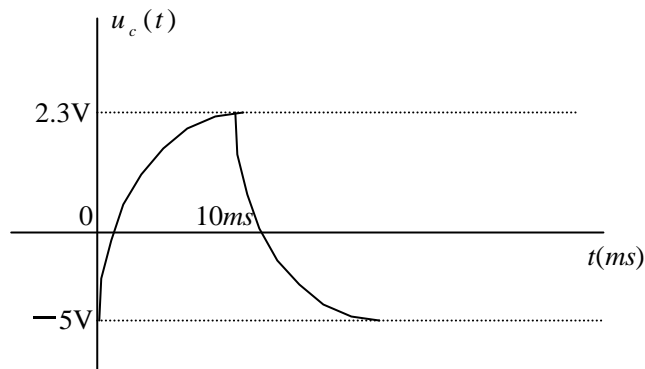
$$u_c(\infty) = -5V$$

$$\tau = RC = 15 \times 10^3 \times 1 \times 10^{-6} = 15ms$$

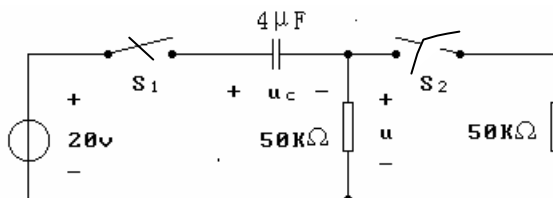
故
$$u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(10ms_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t-10ms}{15ms}}$$

$$= -5 + 7.3e^{-\frac{t-10ms}{15ms}} \text{ V} \quad (t \geq 10ms)$$

波形如下:



例: 图中 $t=0$ 时, S_1 闭合, 在 $t=0.1s$ 时, 闭合 S_2 。求 S_2 闭合后的电压 $u(t)$ 的表达式。



解:
$$t < 0, \quad u_c(0_-) = 0,$$

$$0 < t < 0.1s, \quad u_c(0_+) = u_c(0_-) = 0,$$

$$u_c(\infty) = 20V$$

$$\tau = 4\mu\text{F} \times 50K\Omega = 0.2s$$

$\therefore u_c(t) = u_c(\infty) + [u_c(0_+) - u_c(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}} = 20 - 20e^{-5t} \text{ V}$ (也可直接用零状态响应公式写出)

$$t \geq 0.1s, \quad u_c(0.1s_+) = u_c(0.1s_-) = 20 - 20e^{-5 \times 0.1} = 7.87V$$

$$u_c(\infty) = 20V$$

$$\tau = \frac{50K\Omega}{2} \times 4\mu\text{F} = 0.1s$$

故:
$$u_c(t) = 20 + (7.87 - 20)e^{-\frac{t-0.1}{0.1}} = 20 - 12.13e^{-10(t-0.1)} \text{ V}$$

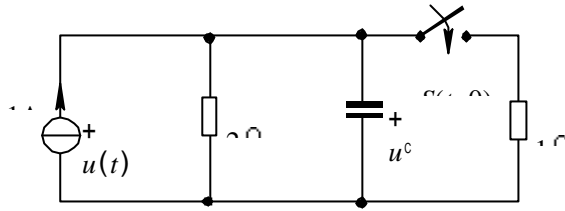
$$u(t) = i(t) \times 50 \times 10^3 = \frac{C \frac{du_c(t)}{dt}}{2} \times 50 \times 10^3$$

$$= 25 \times 10^3 \times C \frac{du_c}{dt}$$

$$= 25 \times 10^3 \times 4 \times 10^{-6} \times (-12.3) \times (-10) e^{-10(t-0.1)}$$

$$= 12.13e^{-10(t-0.1)} \text{ V} \quad t \geq 0.1s$$

例：图示电路， $t < 0$ 时开关打开已久，在 $t = 0$ 时开关闭合。求： $u(t)$ 。



解：由换路定律求电压 $u(t)$ 的初始值 $u(0_+)$ 。

$$u(0_+) = u_c(0_+) = u_c(0_-) = 2 \times 1 = 2V$$

换路后电压 $u(t)$ 的稳态分量 $u(\infty) = 1 \times \frac{2 \times 1}{2+1} = \frac{2}{3}V$

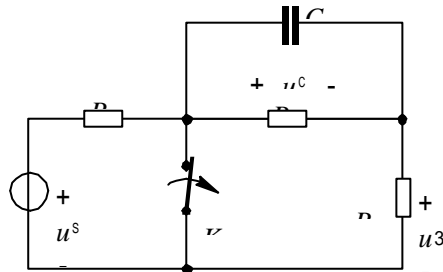
换路后电路的时间常数 $\tau = RC$ ， R 为电容元件所接二端网络除源后的等效电阻，它相当于 2Ω 和 1Ω 电阻并联，所以：

$$\tau = \frac{2 \times 1}{2+1} \times 300 \times 10^{-6} s = 2 \times 10^{-4} s$$

$$u(t) = u(\infty) + [u(0_+) - u(\infty)]e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{4}{3}e^{-0.5 \times 10^4 t} \quad V \quad t \geq 0$$

例：图示电路，已知 $U_s = 12V$ ， $R_1 = R_2 = R_3 = 3k\Omega$ ，
时，开关 K 打开，经 后又合上。求



解：1. $0 \leq t < t_1$ ， K 断开

(1) 初始值：

在 时刻电容相当于短路，所以 应由 与 分压确定，

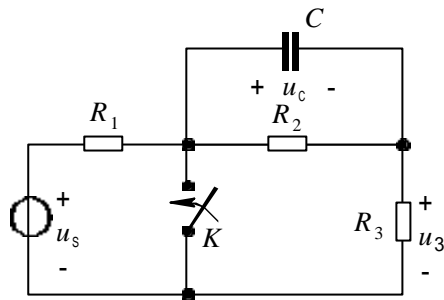
即

(2) 稳态分量：电路达到稳态时， C 相当于开路，此时
可由 串联分压确定。

(3) 时间常数 τ

,

2. 在 时, K 又合上的情况。



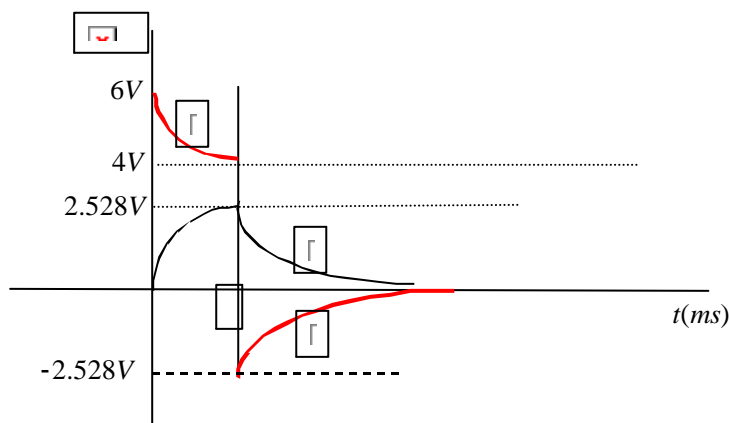
(1) 初始值:

(2) 稳态分量: 当 时, 支路被短路,

,

(3) 时间常数 τ :

、 波形如下:



作业: P. 123 5-12、5-13、5-14。

§ 5-4 阶跃函数与阶跃响应

一、阶跃函数

1. 单位阶跃函数的定义：

1

0

如上图，在 $t=0$ 处不连续。

单位阶跃函数

上述函数的电路模型：表示 1V 直流电压源在 $t=0$ 时接入电路，在此之前该电路一直处于输入短路状态，如下图所示。

2. 延迟阶跃函数

1

0

t_0

3. $u(t-t_0)$ ：表示在 $t < t_0$ 区间内即为原函数， $t > t_0$ 区间恒为零。

同理：

0

t

0

t

由此可以看出，阶跃函数 $u(t)$ 可以表示电路的激励和响应。如 RC 零状态响应电路中：

电路的激励：

电路的响应：

例：用阶跃函数表示以下图中所示波形。

解：

解：

解：

解：

二 阶跃函数在一阶电路中的应用

例：

1. 若 $u_s(t) = U_0 \delta(t)$ ，即相当于在 $t = 0$ 时 S 合上， $i(0^+) = \frac{U_0}{R}$ 。

故：

2. 若 $u_s(t) = U_0 \epsilon(t)$ ，即相当于在 $t = 0$ 时， S 合上， $i(0^+) = 0$ 。

故：

说明由时不变电路的性质得到： $u_s(t) = U_0 \delta(t)$ 作用下，响应为 $i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$ ；则

作用下，响应为

例：开关 S 在 时由 $1 \rightarrow 2$ ， 时，由又 $2 \rightarrow 1$ 。试求 ，
并画出波形。

例：

解：

\because 时，

\therefore 当 时，

因此：当 ，

当 ，

当 ，

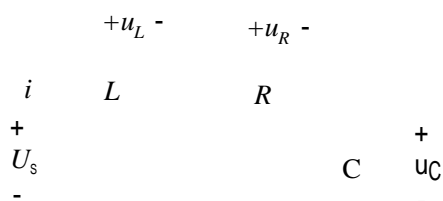
波形如右下图：

作业：P. 124 5-17、5-18。

§6-1 二阶电路的零输入响应和全响应

电路中含有两个动态元件的电路需用二阶微分方程来描述，故称为二阶电路。二阶电路的分析仍然是采用由 KVL 、 KCL 及 VAR 建立方程再求解的方法。分析线性二阶电路的问题也就是求解二阶线性常微分方程的问题。

本节以 RLC 串联电路的零输入响应为例分析二阶电路。如下图所示。



对于每一个元件，由 VAR 得：

(a)

(b)

(c)

由 KVL ：

(1)

这是一个二阶线性常系数微分方程。为了求出未知量 i ，必须知道两个初始条件，即 $i(0)$ 及 $u_C(0)$ 。

其中：

即： $u_C(0)$ (电容的初始状态)、 $i(0)$ (电感的初始状态)为此方程的两个初始条件。

对于零输入响应，即 $t=0$ 时电路的响应，式(1)变为：

(2)

由微分方程理论可知，这一齐次方程解答的形式将视为特征根的性质而定，式(2)的特征方程为：

(3)

解之：

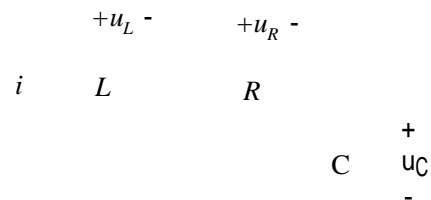
(此式对换路、除源 RLC 串联电路的任何响应变量均适用, 故今后对这类电路可不必再列方程)

即特征根, 称为电路的固有频率, 由于 R 、 L 、 C 数值不同, 和 有三种情况出现:

1. 当 $\Delta > 0$ 时, s_1 和 s_2 为不相等的负实数;
2. 当 $\Delta = 0$ 时, s_1 和 s_2 为两相等的负实数;
3. 当 $\Delta < 0$ 时, s_1 和 s_2 为一对共扼复数, 实部为负数。

下面分别讨论这三种情况下 RLC 电路的零输入响应形式。

一、 RLC 串联电路的零输入响应 过阻尼情况



零输入情况下 RLC 串联电路如上图所示, 初始状态 $i(0^-)$ 、 $u_C(0^-)$ 已知。当 $\Delta > 0$, 即 $R > 2\sqrt{L/C}$ 时, 固有频率(特征根)为不相等的负实数。

所以: (4)

其中 K_1 和 K_2 由初始条件确定, 方法如下:

;

∴

因 s_1 和 s_2 为不相等的负实数, 可令:
这样 α 、 β 为两正实数。

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \beta, \quad (*)$$

由 $s_1 = -\alpha + \beta$, 得:

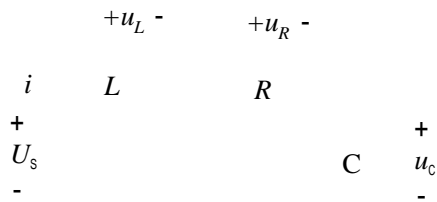
(**)

可见，不论是 还是 都是由随时间衰减的指数函数项来表示的，这说明电路响应是非振荡性的。

当 R 较大，符合 ， 响应便为非振荡，称为过阻尼情况。

例：图示电路， ， ， ， ， ， ， ，

时， ， 试求 及 。



解：电路微分方程：

特征方程：

得： ，

由

得：

从而有： ，

∴ V

A

当然， 及 可直接由式(*)、(**)写出。

响应曲线可定性做出： P.128 图 6-3

讨论：由 \dots ，且 \dots 又 \dots ； \dots 由 \dots

能量过程：

		当 R “较大”， L 释能时不能再使 C 充电，这时电路响应不形成振荡。

由曲线可看出当 \dots ， $\therefore \dots$ 即电容电压变化率为正，电容电压上升；当 \dots ， \dots 达最大，当 \dots 时， \dots 下降， \dots 和 \dots 的零输入响应都从初始值开始，最后趋于零。

二 RLC 串联电路的零输入响应 临界阻尼情况

在上题图中，如果 \dots ，即 \dots 时，固有频率(特征根)为相等的负实数，即：

齐次方程的解可表示为：

常数 \dots 和 \dots 由初始条件确定，方法如下：

$$\dots$$

$$\therefore \dots$$

$$\therefore \dots \quad (5)$$

$$\dots \quad (6)$$

从式(5)、(6)可见,电路响应仍为非振荡的。若 \dots 稍减小一点,以致

，则响应将为振荡的(下面讲述)。因此，当符合 时，响应处于临界振荡状态,称为临界阻尼状态情况。

三 RLC 串联电路的零输入响应 欠阻尼情况

当 $\zeta < 1$ ，即： $\omega_0 > \alpha$ 时：

固有频率(特征根)为共轭复数，可表示为：

其中，

在这种情况下：

下面来确定 i 和 u_C ：

∴

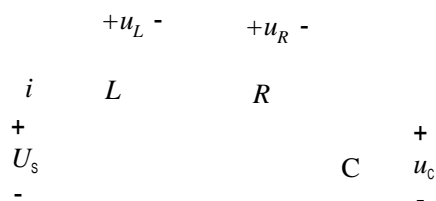
可得：
$$i = e^{-\alpha t} [A_1 \cos(\omega_d t) + A_2 \sin(\omega_d t)] \quad (7)$$

其中：

式(7)说明 i 是衰减振荡，如图 6-6 所示，它的振幅 $I_m e^{-\alpha t}$ 是随时间作为指数衰减的。 α 为衰减系数， α 越大，衰减越快； ω_d 是衰减振荡的角频率， ω_d 越大，振荡周期越小，振荡加快。

综上所述,RLC 电路零输入响应的性质取决于电路的固有频率 p ， p 可以是复数、实数或虚数，从而决定了响应为衰减振荡过程，非振荡过程或等幅振荡过程。在网络理论中， p 是一个重要的概念。

四 直流 RLC 串联电路的完全响应



KVL:

(8)

这是一个二阶非齐次常系数常微分方程，解为：

根据特征根的三种不同情况，有三种形式，相应的完全解形式为：

1. 当 $\Delta > 0$ ，在过阻尼情况下：

(a)

2. 当 $\Delta = 0$ ，在临界阻尼情况下：

(b)

3. 当 $\Delta < 0$ ，在欠阻尼情况下：

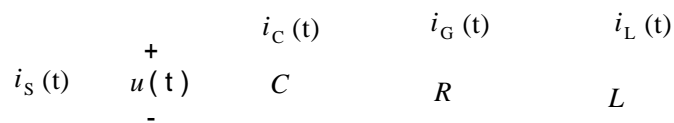
(c)

和 $i_L(t)$ 可由初始值确定。

例：P.134 例 6-6

五 直流 *GLC* 并联电路的完全响应

GLC 并联电路是另一种简单的二阶电路，如图所示：



由 *KCL*:

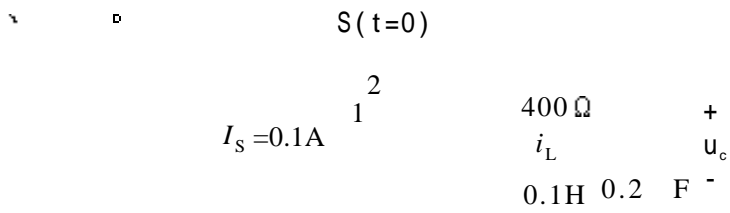
代入上式

得：

解这个非齐次二阶微分方程可求得 $i_C(t)$ 和 $i_L(t)$ 。

, …… , P.136 式 6-34(略)

例：已知电感、电容无初始储能， $t=0$ 时，开关由1打向2，求：



解： *KVL*：

KCL：

得： (1)

而： (特解， L 短路， C 开路)

又 ， 可得 0_+ 电路， L 相当于开路， C 相当于短路。

所以有： ， ，

式(1) 对应齐次方程对应的特征方程为：

有特征根：

所以：

代入 ， 得：

解之： ，

故： ，

同理：

得:

,

作业: P.137 6-2

一阶动态电路例题

例：有一纯电阻网络 N ，接成图(a)时，测得 $U_{oc} = 10V$ ；接成图(b)时，测得 $I_{sc} = 5mA$ 。如接成图(c)时，并已知 $U_c = 6V$ ，试以求 i_c 时的 i_c 和 U_c 。

解：由图(a)和(b)可知电阻网络 N (包括电源 $10V$ 在内)的开路电压为 $6V$ ，短路电流为 $5mA$ ，并由此求出等效有源二端网络的等效电阻，即：

图(c)的戴维南等效电路如图(d)所示。用三要素法计算。

- (1)确定初始值：
- (2)确定稳态值：
- (3)确定时间常数：

于是得： (d)

例：如图电路， $t=0$ 时开关 S 闭合，已知 $U_c(0^-) = 6V$ ，受控源的控制系数为 g 。

- (1)若 $g = 0.5S$ ，求电容电压 $U_c(t)$ ；
- (2)若 $g = 1S$ ，求 $U_c(t)$ 。
- (3)分析、判断电路的工作情况。

解：这里只求电容电压 $U_c(t)$ ，我们将除电容以外部分的电路看作是一端

口电路，求出它的戴维南等效电路。

设端口处电流 i ，如图(a)所示，求出其伏安特性。由下图(a)，根据 KVL 有：

根据上式可作戴维南等效电路，如图(b)所示。

(1) 当 $\omega = 1$ 时， $i = 1$ 。不难求得：

由已知 $i = 1$ ，按三要素法写出电路的响应：

电路及其波形如下图：

(2) 当 $\omega = 2$ 时， $i = 1$ 。不难求得：

由已知 _____ ，按三要素法写出电路的响应：

电路及其波形如下图：

由上图(b)可见，电压 _____ 随着 _____ 的增加而无限增高，这在实际电路中是不可能的，因为实际元件通常只在一定的工作电压(或电流)的范围内才能看作是线性的，超出一定范围，将受到元件非线性特性的限制，甚至使元件损坏，电路不能正常工作。

例：P.123 5-10 (先画出关于电容 C 的戴维南等效电路)

例：P.123 5-11 (先画出关于电容 C 的戴维南等效电路)

例：P.124 5-18