

新型准零刚度隔振系统的设计与研究

孟令帅, 孙景工, 牛福, 任旭东, 祁建成

(军事医学科学院 卫生装备研究所, 天津 300161)

摘要: 通过并联具有负刚度特性的碟形弹簧与线性正刚度弹簧, 设计了一种新型准零刚度隔振系统。通过静力学特性研究, 建立了系统的力-位移和刚度-位移关系表达式, 获取了系统在平衡位置具有准零刚度的参数条件; 通过动力学特性研究, 建立了系统分别在简谐力和简谐位移激励下的非线性动力学方程, 应用平均法分析了系统参数和激励幅值对系统力传递率和位移传递率的影响, 并与其等效线性系统进行了比较, 证明了该系统在隔离低频和超低频振动时具有优异的隔振性能, 为该新型准零刚度隔振系统的设计应用提供了理论指导。

关键词: 准零刚度; 非线性; 平均法; 传递率

中图分类号: TH212; TH213.3

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.11.034

Design and Analysis of a novel quasi-zero stiffness vibration isolation system

MENG Ling-shuai, SUN Jing-gong, NIU Fu, REN Xu-dong, QI Jian-cheng

(Institute of Medical Equipment, Academy of Military Medical Sciences, Tianjin 300161, China)

Abstract: Combining parallelly a negative stiffness disk spring with a linear positive stiffness spring, a novel quasi-zero stiffness vibration isolation system was designed. In the static characteristics analysis, the force-displacement relationship and the stiffness-displacement relationship of the system were established, the system parameters offering zero stiffness at the equilibrium position of the system were derived. In the dynamic characteristics analysis, the nonlinear dynamic equations were established, respectively when the system was excited by a harmonic force or a harmonic displacement. By using the averaging method, the effects of system parameters and the excitation amplitude on the force transmissibility and the displacement transmissibility of the system were analyzed. Compared with its equivalent linear system, this system was proved to be superior in low frequency and ultra-low frequency vibration isolations. The results offered a theoretical guidance for design and application of the novel quasi-zero stiffness vibration isolation system.

Key words: quasi-zero stiffness; nonlinear; averaging method; transmissibility

作为一种非线性隔振系统, 准零刚度隔振系统一般通过线性正刚度弹簧并联负刚度机构实现。通过正负刚度并联, 准零刚度隔振系统同时具有较高的静态刚度和较低的动态刚度, 在隔离低频和超低频振动时有很好的隔振性能, 一直以来尤其是近年来成为国内外学者的研究热点。Alabuzhev等^[1]首先较为全面地阐述了准零刚度隔振系统的理论, 并提出了许多设计方法。Platus^[2]采用了在轴向载荷作用下互相铰接的两根杆作为负刚度机构, 之后张建卓等^[3]采用相似的轴向载荷作用下的欧拉压杆作为负刚度机构, 并实验验证了其用于精密仪器隔振的可行性。Carrella等^[4-6]

系统地研究了对称斜弹簧并联垂直弹簧机构的静力学特性和在平衡位置附近的隔振性能。Thanh等^[7]研究了水平弹簧通过连杆并联垂直弹簧来获得静力平衡位置的准零刚度, 并实验验证了其用于汽车座椅隔振的优异表现。路纯红等^[8]采用了一种新型连杆弹簧机构作为负刚度机构, 增加了系统的静态承载能力。刘兴天等^[9]研究了采用滑动梁作为负刚度机构的准零刚度隔振系统, 进一步扩展了准零刚度隔振系统的实现方法。

本文基于正负刚度并联隔振原理, 采用碟形弹簧作为负刚度机构与线性正刚度弹簧并联, 提出了一种新型准零刚度隔振系统。通过静力学特性研究, 分析了系统在静力平衡位置附近的准零刚度特性; 通过动力学特性研究, 建立了系统分别在简谐力和简谐位移激励下的非线性动力学方程, 应用平均法得到系统的力传递率和位移传递率; 并与其等效线性系统进行了

比较,分析了系统参数和激励幅值对该系统力传递率和位移传递率的影响。

1 静力学特性研究

1.1 碟形弹簧

如图1所示的碟形弹簧弹性模量为 E ,泊松比为 μ , a, b 分别为碟形弹簧的外半径和内半径, e_1, e_2 分别为支点到轴线的距离, h 为碟形弹簧的内锥高, δ 为碟形弹簧的厚度。在轴向力 f_d 的作用下,其力位移关系可表示为^[10-11]

$$f_d = \frac{Ex}{e_1^2(1-\mu^2)M} \left[(\bar{h} - x) \left(\bar{h} - \frac{x}{2} \right) \delta + \Gamma \delta^3 \right] \quad (1)$$

其中:等效内锥高 $\bar{h} = h/\eta$, 支点距离比 $C = e_1/e_2$, 系数 η, M 和 Γ 分别为 $\eta = (a - b)/(e_1 - e_2)$, $\frac{1}{M} = \pi \left(\frac{C+1}{C-1} - \frac{2}{\ln C} \right) \left(\frac{C}{C-1} \right)^2$, $\Gamma = \frac{\ln C}{6 \left(\frac{C+1}{C-1} - \frac{2}{\ln C} \right)}$ 。

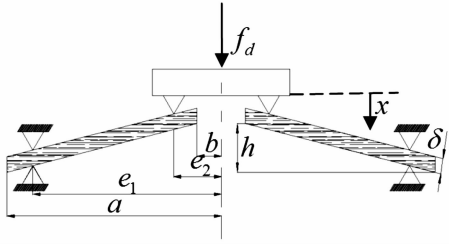


图1 碟形弹簧的结构示意图

Fig.1 Schematic diagram of a disk spring

由式(1)看出,当 $x = \bar{h}$ 时,碟形弹簧的回复力 $f_{d0} \neq 0$ 。系统的力位移关系表达式为三次多项式,其曲线在 $x \in [0, 2\bar{h}]$ 的范围内关于点 (\bar{h}, f_{d0}) 对称。

令 $u = x - \bar{h}$, 碟形弹簧的无量纲力位移关系可表示为

$$f_d = \frac{1}{2} \hat{u}^3 + \left(\Gamma - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \hat{u} + \alpha \Gamma \quad (2)$$

其中: $\hat{f}_d = f_d e_1^2 (1 - \mu^2) M / (E \delta^4)$, $\hat{u} = u / \delta$, 等效高厚比 $\alpha = \bar{h} / \delta$ 。

对 \hat{u} 求导,碟形弹簧无量纲刚度位移关系可表示为

$$k_d = \frac{3}{2} \hat{u}^2 + \Gamma - \frac{1}{2} \alpha^2 \quad (3)$$

由于 $\hat{u} \in [-\alpha, \alpha]$, 根据式(3)可以看出,碟形弹簧的无量纲刚度关于 $\hat{u} = 0$ 对称。且当碟形弹簧处于压平状态,即 $\hat{u} = 0$ 时,刚度存在最小值 $\hat{k}_{dmin} = \Gamma - \alpha^2/2$ 。当 $\Gamma - \alpha^2/2 < 0$ 时,碟形弹簧存在负刚度区域,则系统参数应满足 $\alpha > \sqrt{2\Gamma}$ 。在此前提下,设 \hat{u}_1 和 \hat{u}_2 为 $\hat{k}_d = 0$ 的

两个根,则碟形弹簧的负刚度区域范围是 $|\hat{u}_1 - \hat{u}_2| = 2\sqrt{(\alpha^2 - 2\Gamma)/3}$ 。由于 Γ 随着 C 的增加单调递增,则碟形弹簧的刚度最小值随着 α 的增大而减小,随着 C 的增大而增大。碟形弹簧的负刚度区域范围随着 α 的增大而增大,随着 C 的增大而减小。

1.2 准零刚度隔振系统

将碟形弹簧与刚度为 k_v 的线性正刚度弹簧并联,构造出一种新型准零刚度隔振系统,其结构示意图如图2所示。在轴向力 f 的作用下,不考虑质量 m ,该准零刚度隔振系统的力位移关系可表示为

$$f = k_v x + \frac{Ex}{e_1^2(1-\mu^2)M} \left[(\bar{h} - x) \left(\bar{h} - \frac{x}{2} \right) \delta + \Gamma \delta^3 \right] \quad (4)$$

令 $u = x - \bar{h}$, 系统的无量纲力位移关系可表示为

$$f = \hat{u} + \alpha + \bar{k} \left[\frac{1}{2} \hat{u}^3 + \left(\Gamma - \frac{1}{2} \alpha^2 \right) \hat{u} + \alpha \Gamma \right] \quad (5)$$

其中: $f = f/(k_v \delta)$, 定义的刚度比 $\bar{k} = \frac{E \delta^3}{k_v e_1^2 (1 - \mu^2) M}$

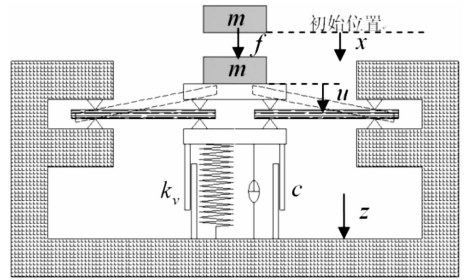


图2 准零刚度隔振系统的结构示意图

Fig.2 Schematic diagram of a quasi-zero stiffness vibration isolation system

对 \hat{u} 求导,系统的无量纲刚度位移关系可表示为

$$\hat{k} = \bar{k} \left[\frac{3}{2} \hat{u}^2 - \frac{1}{2} \alpha^2 + \Gamma \right] + 1 \quad (6)$$

刚度比 $\bar{k} > 0$, 当 α 和 C 不变,不同刚度比对系统刚度的影响如图3所示。

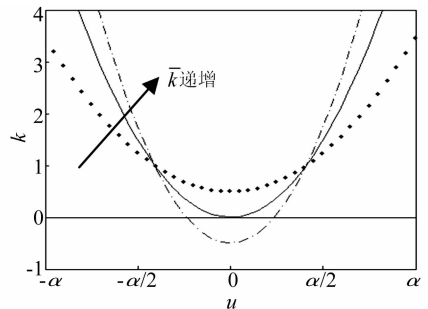


图3 不同刚度比条件下的曲线

Fig.3 The non-dimensional stiffness-displacement curve of different stiffness ratio

由图3可知,系统在碟形弹簧处于压平状态,即 $\hat{u} = 0$

时,有刚度最小值,且系统的刚度关于此平衡位置对称。随着刚度比 \bar{k} 的增大,系统的刚度最小值由正变负。

实际应用中,系统在平衡位置处的无量纲刚度应满足 $\hat{k}_{\hat{u}=0} \geq 0$, 则 $\alpha \leq \sqrt{2\Gamma + 2/\bar{k}}$, 结合碟形弹簧存在负刚度的参数条件, 则系统的参数应该满足

$$\sqrt{2\Gamma} < \alpha \leq \sqrt{2\Gamma + 2/\bar{k}} \quad (7)$$

若令平衡位置处, 即 $\hat{u} = 0$ 时, 系统的无量纲刚度 $\hat{k} = 0$, 得到

$$\bar{k}_{QZS} = \frac{2}{\alpha^2 - 2\Gamma} \quad (8)$$

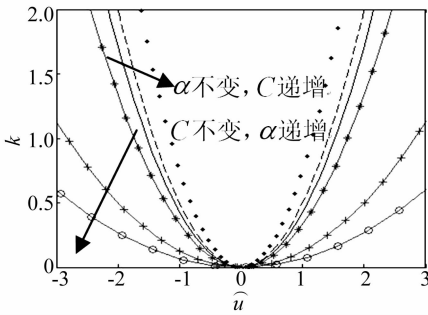


图 4 不同系统参数条件下的无量纲刚度位移曲线
Fig. 4 The non-dimensional stiffness-displacement curve of different system parameters

由式(8)可以看出, 当 α 值增大或 C 值减小时, 需要更小的等效刚度比 \bar{k} 来获取系统在平衡位置的零刚度。将式(8)带入式(6), 得到不同 α 值或 C 值对系统刚度的影响如图 4 所示。为了使系统在平衡位置附近具有较小刚度和较大的较小刚度范围, 应该增大 α 值或者减小 C 值。

2 动力学特性研究

2.1 动力学建模

如图 2 所示, 当系统承载质量为 m 的被隔振物体后, 刚好在碟形弹簧处于压平状态, 即 $u = 0$ 时, 达到静力平衡, 且系统在平衡位置的刚度为零。由式(5)和式(8)得

$$mg = \frac{\alpha^3}{\alpha^2 - 2\Gamma} k_v \delta \quad (9)$$

此时, 对被隔振物体施加简谐力激励 $f = f_0 \cos(\omega t)$ 或对基座施加简谐位移激励 $z = z_0 \cos(\omega t)$, 根据牛顿第二定律分别得到系统的非线性动力学方程为

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + f_1 - mg = f_0 \cos(\omega t) \quad (10a)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + f_2 - mg = m\omega^2 z_0 \cos(\omega t) \quad (10b)$$

其中: $y = u - z, f_1 = mg + k_v u^3 / [\delta^2 (\alpha^2 - 2\Gamma)], f_2 = mg + k_v y^3 / [\delta^2 (\alpha^2 - 2\Gamma)]$ 。

将式(9)带入式(10), 系统的无量纲运动方程化为

$$\hat{u}'' + 2\xi\hat{u}' + \chi\hat{u}^3 = f_0 \cos(\Omega\tau) \quad (11a)$$

$$\hat{y}'' + 2\xi\hat{y}' + \chi\hat{y}^3 = \Omega^2 \hat{z}_0 \cos(\Omega\tau) \quad (11b)$$

其中: $\tau = \omega_n t, \Omega = \omega / \omega_n, \omega_n = \sqrt{k_v / m}, \hat{y} = y / \delta, \xi = c / (2m\omega_n), f_0 = f_0 / (k_v \delta), \hat{z}_0 = z_0 / \delta, \chi = 1 / (\alpha^2 - 2\Gamma), (\cdot)' = d(\cdot) / d\tau$ 。

式(11)可统一化为

$$\hat{\rho}'' + 2\xi\hat{\rho}' + \chi\hat{\rho}^3 = \lambda\gamma \cos(\Omega\tau) \quad (12)$$

其中: 当系统受到简谐力激励时, $\lambda = 1, \gamma = f_0$; 当系统受到简谐位移激励时, $\lambda = \Omega^2, \gamma = \hat{z}_0$ 。

对于式(12)所示的非线性动力学方程, 采用平均法求解^[12], 设系统的响应为 $\hat{\rho} = \hat{\rho}_0 \cos(\Omega\tau + \varphi), \hat{\rho}' = -\Omega\hat{\rho}_0 \sin(\Omega\tau + \varphi)$, 其中 $\hat{\rho}_0$ 和 φ 是关于 τ 的函数。则带入式(12), 解得

$$\hat{\rho}'_0 = -\frac{1}{\Omega} \Lambda \sin(\Omega\tau + \varphi) \quad (13a)$$

$$\varphi' = -\frac{1}{\hat{\rho}_0 \Omega} \Lambda \cos(\Omega\tau + \varphi) \quad (13b)$$

其中: $\Lambda = \lambda\gamma \cos(\Omega\tau) + 2\xi\Omega\hat{\rho}_0 \sin(\Omega\tau + \varphi) + \Omega^2\hat{\rho}_0 \cos(\Omega\tau + \varphi) - \chi\hat{\rho}_0^3 \cos^3(\Omega\tau + \varphi)$ 。

式(13)右边可以用外界激励一个周期内的平均值代替, 得到

$$\hat{\rho}'_0 = -\frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \Lambda \sin(\Omega\tau + \varphi) d\tau \quad (14a)$$

$$\varphi' = -\frac{\Omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\hat{\rho}_0 \Omega} \Lambda \cos(\Omega\tau + \varphi) d\tau \quad (14b)$$

对式(14)的右边积分, 并令左边等于零, 得到

$$-\frac{\lambda\gamma \sin(\varphi)}{2\Omega} - \xi\hat{\rho}_0 = 0 \quad (15a)$$

$$-\frac{\lambda\gamma \cos(\varphi)}{2\Omega\hat{\rho}_0} - \frac{\Omega}{2} + \frac{3\chi\hat{\rho}_0^2}{8\Omega} = 0 \quad (15b)$$

两式平方和得到系统的幅频响应函数为

$$\left(\frac{3}{4}\chi\hat{\rho}_0^3 - \Omega^2\hat{\rho}_0\right)^2 + 4\xi\Omega^2\hat{\rho}_0^2 = \lambda^2\gamma^2 \quad (16)$$

上式是关于 Ω^2 的二次项方程, 对于系统分别在简谐力和简谐位移激励条件下, 解得

$$\Omega_{1,2}' = \frac{1}{2} \sqrt{3\chi\hat{\rho}_0^2 - 8\xi^2 \pm \frac{4}{\hat{\rho}_0} \sqrt{4\xi^4\hat{\rho}_0^2 - 3\chi\xi^2\hat{\rho}_0^4 + \gamma^2}} \quad (17)$$

$$\Omega_{1,2}' = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3\chi\hat{\rho}_0^4 - 8\xi^2\hat{\rho}_0^2 \pm \hat{\rho}_0^2 \sqrt{64\xi^4 - 48\chi\xi^2\hat{\rho}_0^2 + 9\chi^2\lambda^2\hat{\rho}_0^2}}{\hat{\rho}_0^2 - \gamma^2}} \quad (18)$$

当系统在简谐力激励作用下, 传递到基座上的无量纲作用力为

$$f_i = 2\xi\hat{\rho}' + \chi\hat{\rho}^3 \quad (19)$$

则系统的力传递率为

$$|T_f| = \frac{|f_t|}{|f_0|} = \frac{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\chi\hat{\rho}_0^3\right)^2 + (2\xi\Omega\hat{\rho}_0)^2}}{\gamma} \quad (20)$$

当系统在简谐位移激励作用下,被隔振物体的无量纲位移为

$$\hat{u} = \hat{y} + z = \hat{\rho} + \gamma \quad (21)$$

则系统的位移传递率为

$$|T_z| = \frac{|\hat{u}|}{|z_0|} = \frac{\sqrt{\hat{\rho}_0^2 + \gamma^2 + 2\hat{\rho}_0\gamma\cos\varphi}}{\gamma} \quad (22)$$

系统的最大传递率幅值对应于系统的最大响应幅值,分别令式(17)和式(18)中的两式相等,得到系统分别在简谐力和简谐位移激励下的最大响应幅值和其对应的频率为

$$\hat{\rho}_{0\max}^f = \sqrt{\frac{2\xi^3 + \sqrt{4\xi^6 + 3\chi\gamma^2}}{3\chi\xi}} \quad (23a)$$

$$\hat{\rho}_{0\max}^d = \frac{8\xi^2}{\sqrt{48\chi\xi^2 - 9\chi^2\gamma^2}} \quad (23b)$$

$$\Omega_{\max}^f = \frac{1}{\sqrt{2\xi}} \sqrt{\sqrt{\xi^6 + \frac{3}{4}\chi\gamma^2} - 3\xi^3} \quad (24a)$$

$$\Omega_{\max}^d = \xi^3 \sqrt{\frac{24\chi\gamma^2 - 64\xi^2}{64\xi^6 - 60\chi\xi^4\gamma^2 + 18\chi^2\xi^2\gamma^4 - 27\chi^3\gamma^6}} \quad (24b)$$

将式(23)和式(24)分别代入式(20)和式(22)可以得到系统分别在简谐力和简谐位移激励下的最大传递率幅值。

当系统除去负刚度结构碟形弹簧时,被隔振物体由线性正刚度弹簧独自承载。该等效线性系统的静态位移增加,但其在相同简谐力激励作用下的力传递率和相同简谐位移激励作用下的位移传递率不变,均为

$$|T_l| = \sqrt{\frac{1 + 4\xi^2\Omega^2}{(1 - \Omega^2)^2 + 4\xi^2\Omega^2}} \quad (25)$$

2.2 系统参数和激励幅值对传递率的影响

根据2.1节中的分析,得到系统参数和激励幅值对系统的力传递率和位移传递率的影响如图5-7所示。

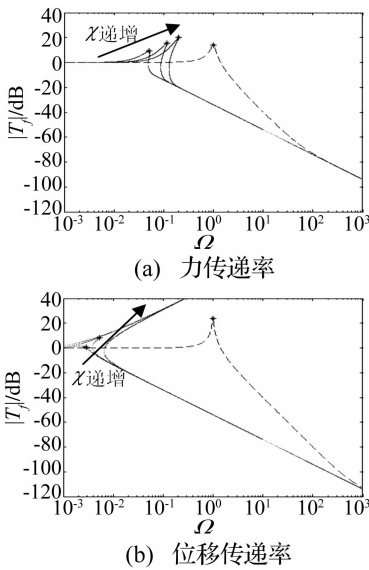


图5 非线性项对系统传递率的影响
Fig.5 Effect of nonlinear item on the isolation performance

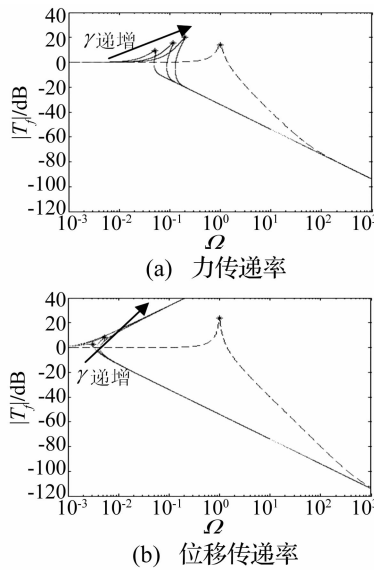


图6 激励幅值对系统传递率的影响
Fig.6 Effect of excitation amplitude on the isolation performance

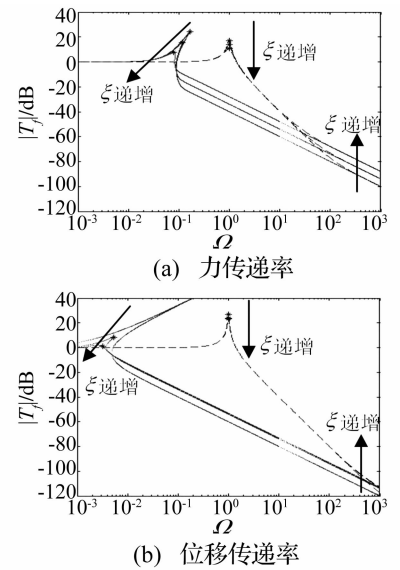


图7 阻尼比对系统传递率的影响
Fig.7 Effect of damp ratio on the isolation performance

如图5所示,当激励频率小于系统最大传递率幅值对应的频率时,系统的传递率幅值大于线性系统;当激励频率大于系统最大传递率幅值对应的频率时,系统的传递率幅值小于其等效线性系统;当激励频率特别大时,系统和其等效线性系统的传递率趋于相等。相较于其等效线性系统,该系统的隔振起始频率低,隔振频率范围大。且非线性项越小,系统的隔振起始频率越低,隔振频率范围越大,系统的最大传递率幅值越小,对被隔振物体造成的危害越小,隔振性能越好。结

合图4,可以通过增大 α 值和减小 C 值来获得更小的非线性项,从而使系统具有更好的隔振性能。

如图6所示,激励幅值对系统的力传递率和位移传递率影响与非线性项对系统的影响基本相同。相较于其等效线性系统传递率不受激励幅值的影响,该系统的激励幅值越小,系统的隔振起始频率越低,隔振频率范围越大,系统的最大传递率幅值越小,对被隔振物体造成的危害越小,隔振性能越好。因此,可以通过适当地控制激励幅值来获取系统更好的隔振性能。

如图 7 所示,与等效线性系统基本一致,阻尼比越大,该系统在共振频率附近的传递率幅值越小,在高频时的传递率幅值越大,系统的最大传递率幅值越小,不稳定区域逐渐减小,对被隔振物体造成的危害越小。

除此之外,不同于简谐力激励下系统的力传递率,该系统在受到简谐位移激励时,较大的非线性项和激励幅值或者较小的阻尼比会导致其出现极大的最大位移传递率幅值,严重影响系统的隔振性能。

综上所述,为了使该隔振系统能隔离超低频或低频振动,并具有很好的隔振性能,可以在适当地控制激励幅值的基础上,通过增大 α 值和减小 C 值来减小系统的非线性项或者增大系统的阻尼比。

3 结 论

本文通过碟形弹簧与线性弹簧并联,设计了一种新型准零刚度隔振系统,并研究了该系统的静力学和动力学特性。通过静力学研究,系统在平衡位置可以实现准零刚度特性,并且可以通过增大 α 值和减小 C 值来获取系统在平衡位置附近的较小刚度和较大的较小刚度范围;通过动力学分析,分别研究了不同非线性项、激励幅值和阻尼比对系统力传递率和位移传递率的影响,并与其等效线性系统进行了比较。研究表明,在适当地控制激励幅值的基础上,通过增大 α 值和减小 C 值来减小系统的非线性项或者增大系统的阻尼比,使系统在隔离超低频或低频振动时具有优异的隔振性能。

参 考 文 献

- [1] Alabuzhev P, Gritchin A, Kim L, et al. Vibration protecting and measuring systems with quasi-zero stiffness [M]. USA: Hemisphere Publishing Corporation, 1989.
- [2] Platus D L. Negative-stiffness-mechanism vibration isolation systems [J]. Proceedings of SPIE, 1999, 3784: 98 - 105.
- [3] 张建卓,李旦,董申,等. 精密仪器用超低频非线性并联隔振系统研究 [J]. 中国机械工程, 2004, 15(1): 69 - 71.
ZHANG Jian-zhuo, LI Dan, Dong Shen, et al. Study on ultra-low frequency parallel connection isolation used for precision instruments [J]. China Mechanical Engineering, 2004, 15(1): 69 - 71.
- [4] Carrella A, Brennan M J, Waters T P. Static analysis of a passive vibration with quasi-zero-stiffness characteristic [J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 301 (3 - 5): 678 - 689.
- [5] Carrella A, Brennan M J, Kovacic I, et al. On the force transmissibility of a vibration isolator with quasi-zero-stiffness [J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 322 (4 - 5): 707 - 717.
- [6] Carrella A, Brennan M J, Waters T P, et al. Force and displacement transmissibility of a nonlinear isolator with high-static-low-dynamic-stiffness [J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2012, 55(1): 22 - 29.
- [7] Thanh D L, Kyoung K A. A vibration isolation system in low frequency excitation region using negative stiffness structure for vehicle seat [J]. Journal of Sound and Vibration, 2011, 330(26): 6311 - 6355.
- [8] 路纯红,白鸿柏. 新型超低频非线性被动隔振系统的设计 [J]. 振动与冲击, 2011, 30 (1): 234 - 236.
LU Chun-hong, BAI Hong-bai. A new type nonlinear ultra-low frequency passive vibration isolation system [J]. Journal of Vibration and Shock, 2011, 30 (1): 234 - 236.
- [9] 刘兴天,张志谊,华宏星. 新型低频隔振器的特性研究 [J]. 振动与冲击, 2012, 31(5): 161 - 164.
LIU Xing-tian, ZHANG Zhi-yi, HUA Hong-xing. Characteristics of a novel low-frequency isolator [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(5): 161 - 164.
- [10] Almen J O, Laszlo A. The uniform-section disc spring [J]. Trans ASME, 1936, 58(5): 305 - 314.
- [11] 陆文遂. 碟形弹簧的计算设计与制造 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 1990, 10 - 18.
- [12] 刘延柱,陈立群. 非线性振动 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010, 73 - 83.