

随机失谐周期压电 Timoshenko 梁的波动局部化研究

丁 兰¹, 尹 涛², 朱宏平¹

(1. 华中科技大学 土木工程与力学学院, 武汉 430074; 2. 武汉大学 土木建筑工程学院, 武汉 430072)

摘 要: 基于 Timoshenko 梁理论, 考虑基梁和压电片的转动惯量和剪切效应, 采用有限元法和传递矩阵法建立了振动波在表面周期性粘贴压电片的轴-弯耦合 Timoshenko 梁中的传播模型, 并利用 Lyapunov 指数及局部化因子分析了几何尺寸和材料特性随机失谐对结构波动局部化的影响。数值分析表明, 对于周期压电梁而言, 不同基梁材料对结构的频带特性会有较明显影响; 而基梁长度及压电材料参数的随机失谐对频带性质和波动局部化程度的影响则十分有限, 通过调整结构模型参数仅能微调此梁的波动特性。分析结果对压电周期结构的优化设计和振动控制研究提供了理论参考。

关键词: 失谐周期压电结构; Timoshenko 梁; 传递矩阵; Lyapunov 指数; 局部化因子

中图分类号: O326

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.11.018

Wave localization in a randomly disordered periodic piezoelectric Timoshenko beam

DING Lan¹, YIN Tao², ZHU Hong-ping¹

(1. School of Civil Engineering and Mechanics, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China;

2. School of Civil and Architectural Engineering, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: A model of wave propagation in an axial-bending coupled beam with piezoelectric patches periodically adhered to it was developed by using the finite element and transfer matrix methods. Both the base beam and piezoelectric layer were treated as Timoshenko beams. The effects of randomly disordered geometric sizes and material parameters on the wave localization characteristics of the periodic structure were analyzed with varying of localization factors. Numerical study indicated that for the periodic piezoelectric beam, different materials of the base beam have obvious effect on the frequency band feature of the beam, but the frequency band feature of the beam and the wave propagation localization behavior have little sensitivity to the random disorder of the length of the base beam and the piezoelectric parameters, so the characteristics of the frequency band of the beam and wave propagation in the structure can be slightly adjusted by tuning structural parameters. The investigation provided a theoretical reference for optimal design and vibration control in periodic piezoelectric structures.

Key words: randomly disordered periodic piezoelectric structure; Timoshenko beam; transfer matrix; lyapunov exponent; localization factor

智能材料和结构在使用过程中能够感知外界环境的变化, 并能针对这种变化做出适当的反应。因其具有自感应和主动控制的能力, 所以被广泛应用于各种工程领域。在各种智能材料中, 压电材料在今后的智能结构振动控制研究和工程应用中占有极其重要的地位, 特别是压电周期结构得到了越来越广泛的应用^[1]。周期结构具有通频和禁频等特殊的力学性质, 而失谐

周期结构还会表现出振动及波的局部化特性^[2]。局部化导致波动幅值沿失谐周期结构以空间指数形式衰减, 利用此性质即可有效控制结构振动在特定频率范围内的传播。

由于机电耦合效应的影响, 压电周期结构将呈现一些新的物理性质, 对其进行的研究也会变得复杂。以往的研究多局限在纯弹性周期结构方面, 近年来一些学者开始着手研究周期压电结构中的振动波传播及局部化问题。Baz 等^[2]对周期压电质量-弹簧系统的振动主动控制进行了研究; Li 等^[3]研究了层状周期压电复合材料结构中的波动局部化问题, 并利用 Lyapunov 指数方法给出了结构中局部化因子的表达式。Wang 等^[4]研究了 Rayleigh 表面波在随机失谐压电声

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(51208390); 国家重点基础研究发展计划(973 计划)资助(2011CB013800); 教育部博士点基金资助项目(20110141120026)

收稿日期: 2013-05-21 修改稿收到日期: 2013-06-24

第一作者 丁兰 女, 博士生, 1985 年生

通信作者 尹涛 男, 博士, 副教授, 1979 年生

子晶体中的传播,得出了一些有意义的结论。上述研究对象都是针对周期性地嵌有压电材料的结构,而就目前的研究现状来看,对其它类型的周期压电智能结构的相关研究,仅有为数不多的报道,如 Thorp 等^[1,5]分别针对周期压电贴片杆结构中的振动波传播与局部化以及板结构的振动主动控制等问题进行了研究。显然,对此种表面粘贴压电片的周期结构的波传播及其局部化问题的研究尚不够深入,有待更进一步地开展。自从 Lin 等^[6]首次利用传递矩阵方法研究了波在加固板结构中的传播特性,大部分学者直接求解结构的运动方程得到传递矩阵,对于大型复杂结构运动方程的求解相对困难,而 Solaroli 等^[7-8]则采用有限单元方法得到周期加固壳和叠合梁结构的传递矩阵,为本文分析周期性地粘贴压电片的 Timoshenko 梁结构提供了参考。

本文基于 Timoshenko 梁理论,考虑基梁和压电片的转动惯量和剪切效应,研究了轴-弯耦合随机失谐压电 Timoshenko 梁中的波动局部化问题。采用有限单元法和传递矩阵法相结合,提取了结构的动刚度矩阵,推导了结构相邻胞元间的传递矩阵,并给出了局部化因子的表达式,进而分析了几何尺寸和材料特性失谐对周期压电结构波动局部化的影响,对失谐压电周期结构振动控制研究提供了理论参考。

1 轴-弯耦合压电 Timoshenko 梁的传递矩阵

图 1 所示为一周期性粘贴压电片的弹性梁。设压电周期结构中含有 n 个胞元,每个胞元中含有两个子结构,分别称为子结构 1 和子结构 2。为使问题简化,假设压电层和基梁完好联结无滑移,且具有相同的横向位移 $w_1(x, t)$ 和转角 $\psi_1(x, t)$,其中下标 1 代表子结构 1。

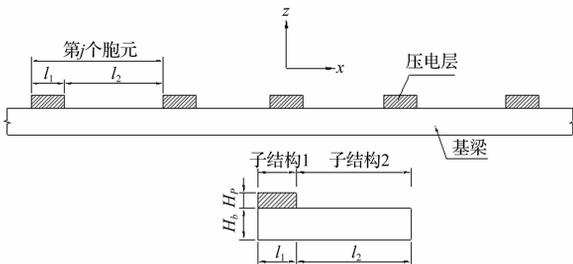


图 1 周期压电梁的结构简图
Fig. 1 Schematic diagram of the periodic piezoelectric beam

将每层均作为 Timoshenko 梁考虑,弹性-压电双层梁(子结构 1)的变形见图 2。

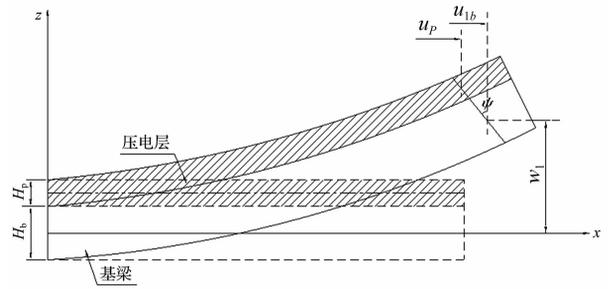


图 2 弹性-压电双层梁的变形示意图
Fig. 2 Deformation of the elastic-piezoelectric two-layer beam

对于界面层完好联结的情况,

$$u_p = u_{1b} - \frac{H_b + H_p}{2} \psi_1 \quad (1)$$

式中, u_{1b} 、 u_p 、 H_b 和 H_p 分别为基梁和压电层的轴向位移和厚度;下标 b 和 p 分别表示基梁层和压电层。

压电材料在轴向荷载作用下的本构方程为^[9]

$$\begin{Bmatrix} \sigma \\ U \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^D & -h_{31} \\ -h_{31} & \beta_{33}^S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon \\ D \end{Bmatrix} \quad (2)$$

式中, σ 和 ε 分别为 x 方向的应力和应变; D 和 U 分别为电位移和电场强度; C_{11}^D 、 β_{33}^S 和 h_{31} 分别为弹性刚度、介电常数和压电常数。

在闭路状态下,运用方程(2)中的本构关系,子结构 1 的势能 V_1 和动能 T_1 可表示为

$$\begin{aligned} V_1 = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[E_b A_b \left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial x} \right)^2 + E_b I_b \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. \kappa_b G_b A_b \left(\psi_1 - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[C_{11}^D A_p \left(\frac{\partial u_p}{\partial x} \right)^2 + C_{11}^D I_p \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ & \left. \kappa_p G_p A_p \left(\psi_1 - \frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[-2 A_p h_{31} D \frac{\partial u_p}{\partial x} + A_p \beta_{33}^S D^2 \right] dx \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} T_1 = & \frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[\rho_b A_b \left(\frac{\partial u_{1b}}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ & \left. \rho_b A_b \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_b I_b \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 \right] dx + \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int_0^{l_1} \left[\rho_p A_p \left(\frac{\partial u_p}{\partial t} \right)^2 + \rho_p A_p \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 + \rho_p I_p \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (4)$$

其中, E 、 G 、 A 、 I 、 κ 和 ρ 分别为压电层和基梁的杨氏模量、剪切模量、横截面面积、惯性矩、横截面抗剪形状系数和密度。

子结构 2 的势能 V_2 和动能 T_2 可分别表达为

$$V_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[E_b A_b \left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial x} \right)^2 + E_b I_b \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x} \right)^2 + \right.$$

$$\kappa_b G_b A_b \left(\psi_2 - \frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 dx \quad (5)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \int_0^{l_2} \left[\rho_b A_b \left(\frac{\partial u_{2b}}{\partial t} \right)^2 + \rho_b A_b \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right)^2 + \rho_b I_b \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial t} \right)^2 \right] dx \quad (6)$$

其中, u_{2b} 、 ψ_2 和 w_2 分别为子结构2的轴向位移、转角和横向位移。

将各子结构的运动表示为位移自由度和形函数的级数:

$$\begin{Bmatrix} u_{ib}(x,t) & w_i(x,t) & \psi_i(x,t) \end{Bmatrix}^T = \begin{bmatrix} N_{iu}(x) & N_{iw}(x) & N_{i\psi}(x) \end{bmatrix}^T \{\delta_i(t)\} \quad (7)$$

($i = 1, 2$)

式中, i 代表子结构编号。形函数 $N_{iu}(x)$ 、 $N_{iw}(x)$ 、 $N_{i\psi}(x)$ 分别表示为^[10]

$$N_{iu}(x) = \left[1 - \frac{x}{l_i} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{x}{l_i} \quad 0 \quad 0 \right] \quad (8)$$

$$N_{iw}(x) = [0 \quad \varphi_1(x) \quad \varphi_2(x) \quad 0 \quad \varphi_3(x) \quad \varphi_4(x)] \quad (9)$$

$$N_{i\psi}(x) = [0 \quad \varphi'_1(x) \quad \varphi'_2(x) \quad 0 \quad \varphi'_3(x) \quad \varphi'_4(x)] + \frac{E_b I_b}{\kappa_b G_b A_b} [0 \quad \varphi''_1(x) \quad \varphi''_2(x) \quad 0 \quad \varphi''_3(x) \quad \varphi''_4(x)] \quad (10)$$

式中

$$\varphi_1(x) = \left[2 \left(\frac{x}{l_i} \right)^3 - 3 \left(\frac{x}{l_i} \right)^2 - \zeta \frac{x}{l_i} + (1 + \zeta) \right] / (1 + \zeta)$$

$$\varphi_2(x) = \left[\frac{x^3}{l_i^2} - \left(2 + \frac{\zeta}{2} \right) \frac{x^2}{l_i} + \left(1 + \frac{\zeta}{2} \right) x \right] / (1 + \zeta)$$

$$\varphi_3(x) = \left[-2 \left(\frac{x}{l_i} \right)^3 + 3 \left(\frac{x}{l_i} \right)^2 + \zeta \frac{x}{l_i} \right] / (1 + \zeta)$$

$$\varphi_4(x) = \left[\frac{x^3}{l_i^2} - \left(1 - \frac{\zeta}{2} \right) \frac{x^2}{l_i} - \frac{\zeta}{2} x \right] / (1 + \zeta)$$

$$\zeta = 12 E_b I_b / (\kappa_b G_b A_b l_i^2) \quad (11)$$

节点自由度向量为

$$\{\delta_i(t)\} = [u_{iL} \quad w_{iL} \quad \psi_{iL} \quad u_{iR} \quad w_{iR} \quad \psi_{iR}]^T \quad (12)$$

其中,下标 L和 R分别代表子结构1和子结构2的左右节点。

将式(7)代入式(3)和(4),并利用式(1)消除 u_p ,可得子结构1的势能和动能

$$V_1 = \frac{1}{2} \{\delta_1(t)\}^T [K_1] \{\delta_1(t)\} \quad (13)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_1(t)\}^T [M_1] \{\dot{\delta}_1(t)\} \quad (14)$$

同理,将式(7)代入式(5)和(6)可得子结构2的势能和动能

$$V_2 = \frac{1}{2} \{\delta_2(t)\}^T [K_2] \{\delta_2(t)\} \quad (15)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \{\dot{\delta}_2(t)\}^T [M_2] \{\dot{\delta}_2(t)\} \quad (16)$$

式中, $[K_1]$ 、 $[K_2]$ 、 $[M_1]$ 和 $[M_2]$ 分别为子结构1和子结构2的刚度矩阵和质量矩阵:

$$[K_1] = \int_0^{l_1} E_b A_b \left[\frac{dN_{1u}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{1u}}{dx} \right] dx +$$

$$\int_0^{l_1} (E_b I_b + C_{11}^D I_p) \left[\frac{dN_{1\psi}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{1\psi}}{dx} \right] dx +$$

$$\int_0^{l_1} (\kappa_b G_b A_b + \kappa_p G_p A_p) \left\{ [N_{1\psi}] - \left[\frac{dN_{1w}}{dx} \right] \right\}^T \cdot$$

$$\left\{ [N_{1\psi}] - \left[\frac{dN_{1w}}{dx} \right] \right\} dx +$$

$$\int_0^{l_1} \left(C_{11}^D - \frac{h_{31}^2}{\beta_{33}^S} \right) A_p \left\{ \left[\frac{dN_{1u}}{dx} \right] - \frac{h_b + h_p}{2} \left[\frac{dN_{1\psi}}{dx} \right] \right\}^T \cdot$$

$$\left\{ \left[\frac{dN_{1u}}{dx} \right] - \frac{h_b + h_p}{2} \left[\frac{dN_{1\psi}}{dx} \right] \right\} dx \quad (17)$$

$$[M_1] = \int_0^{l_1} \left\{ \rho_b A_b [N_{1u}]^T [N_{1u}] + \right.$$

$$\left. (\rho_b A_b + \rho_p A_p) [N_{1w}]^T [N_{1w}] \right\} dx +$$

$$\int_0^{l_1} (\rho_b I_b + \rho_p I_p) [N_{1\psi}]^T [N_{1\psi}] dx +$$

$$\int_0^{l_1} \rho_p A_p \left\{ [N_{1u}] - \frac{h_b + h_p}{2} [N_{1\psi}] \right\}^T$$

$$\left\{ [N_{1u}] - \frac{h_b + h_p}{2} [N_{1\psi}] \right\} dx \quad (18)$$

$$[K_2] = \int_0^{l_2} \left\{ E_b A_b \left[\frac{dN_{2u}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{2u}}{dx} \right] + \right.$$

$$E_b I_b \left[\frac{dN_{2\psi}}{dx} \right]^T \left[\frac{dN_{2\psi}}{dx} \right] \left. \right\} dx + \int_0^{l_2} \kappa_b G_b A_b \left\{ [N_{2\psi}] - \right.$$

$$\left. \left[\frac{dN_{2w}}{dx} \right] \right\}^T \left\{ [N_{2\psi}] - \left[\frac{dN_{2w}}{dx} \right] \right\} dx \quad (19)$$

$$[M_2] = \int_0^{l_2} \left\{ \rho_b A_b [N_{2u}]^T [N_{2u}] + \right.$$

$$\left. \rho_b A_b [N_{2w}]^T [N_{2w}] + \rho_b I_b [N_{2\psi}]^T [N_{2\psi}] \right\} dx \quad (20)$$

当周期结构以频率 ω 振动时,利用上式(17) - (20)可得子结构1和子结构2的动刚度矩阵

$$[K_{d1}] = [K_1] - \omega^2 [M_1] \quad (21)$$

$$[K_{d2}] = [K_2] - \omega^2 [M_2] \quad (22)$$

根据动刚度矩阵,第 j 个胞元中各个子结构的动态运动方程可表示为

$$\begin{bmatrix} K_{d1LL}^{(j)} & K_{d1LR}^{(j)} \\ K_{d1RL}^{(j)} & K_{d1RR}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{1L}^{(j)} \\ X_{1R}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1L}^{(j)} \\ F_{1R}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (23)$$

$$\begin{bmatrix} K_{d2LL}^{(j)} & K_{d2LR}^{(j)} \\ K_{d2RL}^{(j)} & K_{d2RR}^{(j)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{2L}^{(j)} \\ X_{2R}^{(j)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{2L}^{(j)} \\ F_{2R}^{(j)} \end{Bmatrix} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

式中, $\mathbf{K}_{d_1}^{(j)}$ 和 $\mathbf{K}_{d_2}^{(j)}$ ($M, N = L, R$) 分别为 \mathbf{K}_{d_1} 和 \mathbf{K}_{d_2} 中的 3×3 阶子矩阵; $\mathbf{X}^{(j)}$ 和 $\mathbf{F}^{(j)}$ 为广义位移和广义力向量。

经调整, 式(23)和(24)可表达为

$$\mathbf{Y}_{iR}^{(j)} = \mathbf{T}'_i \mathbf{Y}_{iL}^{(j)} \quad (i = 1, 2) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

式中, $\mathbf{Y}_{iL}^{(j)} = [\mathbf{X}_{iL}^{(j)} \quad \mathbf{F}_{iL}^{(j)}]^T$, $\mathbf{Y}_{iR}^{(j)} = [\mathbf{X}_{iR}^{(j)} \quad \mathbf{F}_{iR}^{(j)}]^T$ 分别为两个子结构左、右两端的状态向量; \mathbf{T}'_i 为两个子结构的 6×6 阶传递矩阵:

$$\mathbf{T}'_i = \begin{bmatrix} -\mathbf{K}_{d1LR}^{(j)-1} \mathbf{K}_{d1LL}^{(j)} & \mathbf{K}_{d1LR}^{(j)-1} \\ \mathbf{K}_{d1RL}^{(j)} - \mathbf{K}_{d1RR}^{(j)} \mathbf{K}_{d1LR}^{(j)-1} \mathbf{K}_{d1LL}^{(j)} & \mathbf{K}_{d1RR}^{(j)} \mathbf{K}_{d1LR}^{(j)-1} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2) \quad (26)$$

两个子结构界面处满足

$$\mathbf{X}_{1R}^{(j)} = \mathbf{X}_{2L}^{(j)} \quad \mathbf{F}_{1R}^{(j)} = -\mathbf{F}_{2L}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (27)$$

式(27)可以表示为如下矩阵形式

$$\mathbf{Y}_{1R}^{(j)} = \mathbf{J} \mathbf{Y}_{2L}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

其中,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (29)$$

\mathbf{I} 为 3 阶单位矩阵。

利用式(25)和(28), 得到第 j 个胞元左右两端状态向量间的关系式为

$$\mathbf{Y}_{2R}^{(j)} = \mathbf{T}' \mathbf{Y}_{1L}^{(j)} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (30)$$

式中 $\mathbf{T}' = \mathbf{T}'_2 \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}'_1$ 为第 j 个胞元中的传递矩阵。

第 $(j-1)$ 个胞元右端和第 j 个胞元左端界面处满足

$$\mathbf{Y}_{1L}^{(j)} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Y}_{2R}^{(j-1)} \quad (j = 2, \dots, n) \quad (31)$$

代入(30)得第 $(j-1)$ 个胞元和第 j 个胞元状态向量间的关系式为

$$\mathbf{Y}_{2R}^{(j)} = \mathbf{T}' \mathbf{J}^{-1} \mathbf{Y}_{2R}^{(j-1)} = \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{Y}_{2R}^{(j-1)} \quad (j = 2, \dots, n) \quad (32)$$

由上式可见, $\mathbf{T}^{(j)} = \mathbf{T}' \mathbf{J}^{-1} = \mathbf{T}'_2 \mathbf{J}^{-1} \mathbf{T}'_1 \mathbf{J}^{-1}$ 即为两相邻胞元间的传递矩阵。

2 波动局部化

Lyapunov 指数是对相空间中相邻相轨线的平均指数发散程度或收敛程度的度量, 它定性地和定量地对动力系统的力学行为进行了有力的描述^[11]。研究周期结构中弹性波的传播和局部化时, 引用 Lyapunov 指数的概念, 可以提供一种关于弹性波幅值衰减程度的度量指标。局部化导致波动幅值沿失谐周期结构渐近地以空间指数形式衰减, 而相应的波动幅值的空间指数衰减常数称为局部化因子。因此, 局部化因子用来表示弹性波沿周期结构传播时, 波动幅值的空间指数衰

减程度^[11]。

根据周期结构的对称性, 可以证明, Lyapunov 指数总是以互为相反数的关系成对出现。若结构传递矩阵的阶数 $2d \times 2d$, ($d > 1$), 则可将 Lyapunov 指数按从大到小的顺序排列为

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d \geq 0 \geq \lambda_{d+1} (= -\lambda_d) \geq \lambda_{d+2} \cdot \dots (= -\lambda_{d-1}) \geq \dots \geq \lambda_{2d} (= -\lambda_1) \quad (33)$$

Lyapunov 指数中的最小正值 λ_d 代表了幅值衰减程度最小的波, 它在结构中传播的距离最远, 沿结构传输的能量也最远, 刻画了系统中弹性波和振动的主要衰减特性。因此, 最小正的 Lyapunov 指数定义为局部化因子^[3-4]。

Wolf^[12] 给出了计算连续型动力系统中 Lyapunov 指数的方法, 借鉴此方法, 可以给出离散型系统中 Lyapunov 指数的计算方法。对于传递矩阵阶数为 $2d \times 2d$ 的结构, 为了计算第 m ($1 \leq m \leq 2d$) 个 Lyapunov 指数, 需选择 m 个正交的 $2d$ 阶初始单位状态向量 $\mathbf{u}_1^{(0)}, \mathbf{u}_2^{(0)}, \dots, \mathbf{u}_m^{(0)}$, 利用式(32)可计算出每次迭代的状态向量。对于第 j 次迭代

$$\mathbf{Y}_{2R,k}^{(j)} = \mathbf{T}^{(j)} \mathbf{u}_k^{(j-1)} \quad (j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m) \quad (34)$$

式中, 向量 $\mathbf{u}_k^{(j-1)}$ 为单位正交向量, 但向量 $\mathbf{Y}_{2R,k}^{(j)}$ ($k = 1, 2, \dots, m$), 并不正交, 采用 Gram-Schmidt 标准正交化过程, 将其标准正交化:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{2R,1}^{(j)} = \mathbf{Y}_{2R,1}^{(j)}, \quad \mathbf{u}_1^{(j)} = \frac{\hat{\mathbf{Y}}_{2R,1}^{(j)}}{\|\hat{\mathbf{Y}}_{2R,1}^{(j)}\|}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{2R,2}^{(j)} = \mathbf{Y}_{2R,2}^{(j)} - (\mathbf{Y}_{2R,2}^{(j)}, \mathbf{u}_1^{(j)}) \mathbf{u}_1^{(j)}$$

$$\mathbf{u}_2^{(j)} = \frac{\hat{\mathbf{Y}}_{2R,2}^{(j)}}{\|\hat{\mathbf{Y}}_{2R,2}^{(j)}\|}$$

...

$$\hat{\mathbf{Y}}_{2R,m}^{(j)} = \mathbf{Y}_{2R,m}^{(j)} - (\mathbf{Y}_{2R,m}^{(j)}, \mathbf{u}_{m-1}^{(j)}) \mathbf{u}_{m-1}^{(j)} - \dots - (\mathbf{Y}_{2R,m}^{(j)}, \mathbf{u}_1^{(j)}) \mathbf{u}_1^{(j)}$$

$$\mathbf{u}_m^{(j)} = \frac{\hat{\mathbf{Y}}_{2R,m}^{(j)}}{\|\hat{\mathbf{Y}}_{2R,m}^{(j)}\|} \quad (35)$$

根据 Wolf 算法, 第 m ($1 \leq m \leq 2d$) 个 Lyapunov 指数的表达式为:

$$\lambda_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \ln \|\hat{\mathbf{Y}}_{2R,m}^{(j)}\| \quad (36)$$

式中 n 为周期结构的胞元数。

利用式(36), 可以计算出 d 对互为相反的 Lyapunov 指数, 第 d 个 Lyapunov 指数 λ_d 即为局部化因子。对于本文中的谐和周期结构, 相邻胞元间的传递矩阵 $\mathbf{T}^{(j)}$ 保持不变, 且其维数为 6×6 , 因此局部化因子为 λ_3 。利用局部化因子即可分析失谐周期结构的波动局部化现象。

3 算例及分析讨论

根据上述理论模型,本文考虑不同结构尺寸和材料参数失谐对结构局部化的影响。其中,基梁弹性材料采用铝和钢两种,压电材料采用 PKI 502^[9,13],子结构的长度 $l_2 = 5l_1 = 0.5$ m,所用到的材料参数如表 1 所示。计算过程中取无量纲频率 $\Omega = \omega / \sqrt{E_b I_b / \rho_b A_b l_1^4}$ 作为自变量。

表 1 基梁和压电层的材料常数表
Tab. 1 Material properties of the base beam and piezoelectric layer

	弹性材料(铝)	弹性材料(钢)	压电材料
宽度 b/m	0.012 7	0.012 7	0.012 7
厚度 H/m	0.002 286	0.002 286	0.000 762
密度 $\rho/$ ($kg \cdot m^{-3}$)	2 700	7 800	7 600
杨氏模量 $E \times 10^{10}/$ ($N \cdot m^{-2}$)	7.1	21	6.49
泊松比 ν	0.3	0.3	0.31
剪切模量 $G \times 10^{10}/$ ($N \cdot m^{-2}$)	2.730 8	8.076 9	2.477
横截面抗剪 形状系数 κ	5/6	5/6	5/6
压电常数 $h_{31} \times 10^8/$ ($V \cdot m^{-1}$)	-	-	-8.012 3
弹性刚度 $C_{11}^D/$ $\times 10^{10}/(N \cdot m^{-2})$	-	-	7.4
介电常数 $\beta_{33}^S/$ $\times 10^7/(V \cdot m \cdot C^{-1})$	-	-	7.054 7

3.1 长度 l_2 失谐

基梁弹性材料为铝,考虑子结构 2 的长度 l_2 失谐,设其服从均值为 $l'_2 = 0.5$ m,变异系数为 δ 的均匀分布,则 l_2 的取值范围可表示为^[3-4]

$$l_2 \in [l'_2(1 - \sqrt{3}\delta), l'_2(1 + \sqrt{3}\delta)] \quad (37)$$

引入一服从标准均匀分布的随机变量 $\eta \in (0, 1)$,则 l_2 可表示为

$$l_2 = l'_2[1 + \sqrt{3}\delta(2\eta - 1)] \quad (38)$$

图 3 给出了长度 l_2 失谐,变异系数 δ 取不同值时,局部化因子随无量纲频率的变化曲线。

由图 3 可观察到,当变异系数 $\delta = 0$ 时,谐调周期结构存在明显的频率通带和禁带,在无量纲频率区间 $\Omega \in (0, 71.5)$ 内,局部化因子 $\lambda_3 = 0$,该区间即为频率通带;在频率范围 $\Omega \in (71.5, 145.7)$ 内,局部化因子 $\lambda_3 > 0$,该区间即为频率禁带。当变异系数 $\delta > 0$ 时,对应 $\delta = 0$ 为频率通带的边界区间,局部化因子也大于

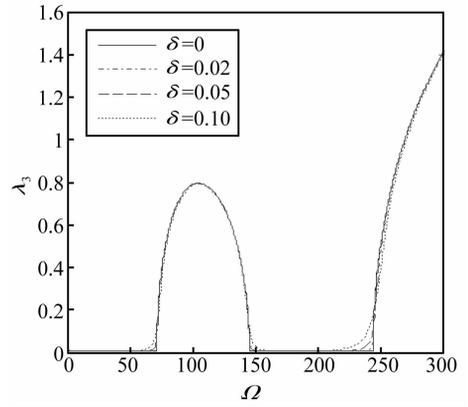


图 3 长度失谐下局部化因子随无量纲频率的变化

Fig. 3 Localization factors versus dimensionless frequencies for disordered length of the purely elastic beam

零,出现波动局部化现象,表明失谐周期结构在特定频率范围内能控制波在结构中的传播。随着变异系数的增加,禁带的宽度和局部化因子的幅值逐渐增加,该区间的局部化程度相应地增强。因此可以设计不同的变异系数来微调结构的频带区间和局部化程度。

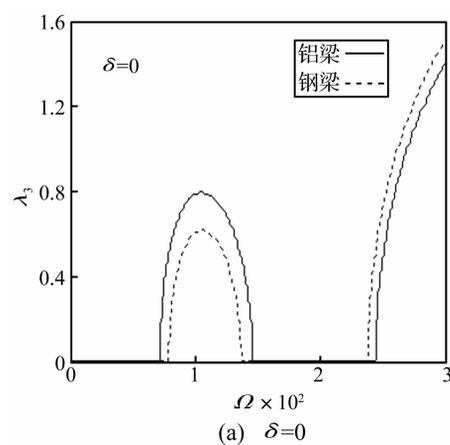
3.2 压电材料弹性刚度 C_{11}^D 失谐

基梁弹性材料分别为铝和钢,考虑压电材料的弹性刚度失谐,即 $C_{11}^D = C_{11}^{D'} [1 + \sqrt{3}\delta(2\eta - 1)]$,此时,弹性刚度均值仍取 $C_{11}^{D'} = 7.4 \times 10^{10}$ (N/m^2),分析变异系数不同时压电材料的弹性刚度失谐对周期结构波动局部化的影响,计算结果见图 4。

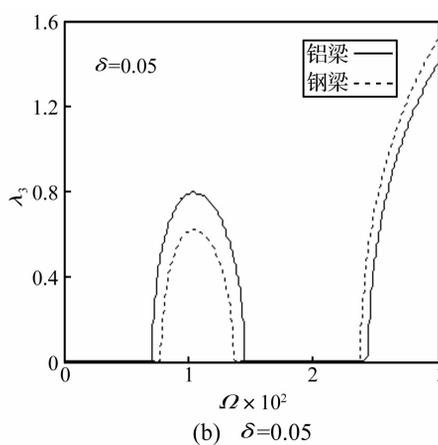
由图 4 可知,不同的基梁弹性材料对周期压电结构频带特性影响显著,尽管曲线形状类似,但在第一个禁带区间,钢梁的禁带带宽和局部化因子幅值都小于铝梁,表明在此频率范围内,波动在铝梁中的衰减程度更大。因此,可以根据实际需要选择不同的基梁弹性材料,以达到对结构进行有效的振动控制。比较图 4 中的四个子图可以发现,周期压电结构的局部化行为对压电材料弹性刚度失谐不够敏感,在特定频率范围内,弹性波不仅可以在谐调周期结构中传播,也可在失谐周期结构中传播。这种现象可能是由于压电材料为压电陶瓷材料,其弹性模量和密度等参数都较大,在此周期结构中占弹性刚度较大的组分,因此其变化对结构的局部化影响很小,可以通过调整基梁及压电材料的弹性刚度比以使得振动控制效应显著。

3.3 压电参数对波动局部化的影响

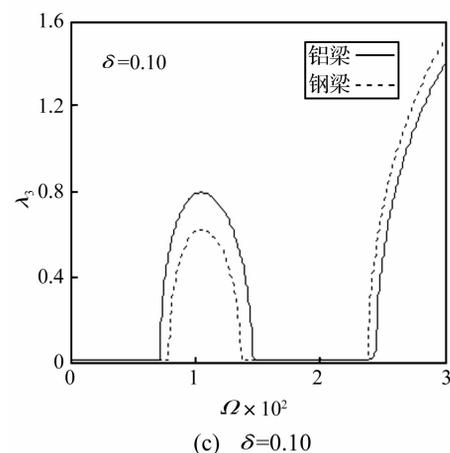
基梁弹性材料为铝,当长度 l_2 失谐且其变异系数 $\delta = 0.10$,压电材料的压电参数变化,即压电常数 h_{31} 及介电常数 β_{33}^S 分别选取不同值时,局部化因子随频率的变化曲线如图 5 所示。



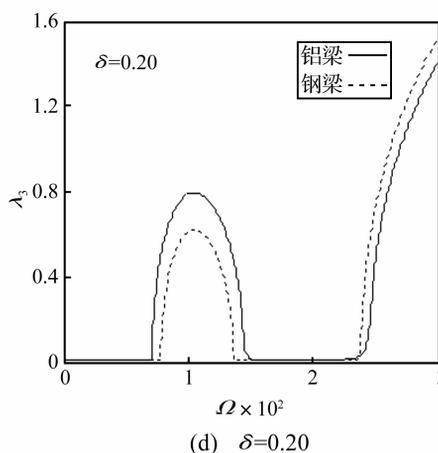
(a) $\delta=0$



(b) $\delta=0.05$



(c) $\delta=0.10$



(d) $\delta=0.20$

图 4 压电材料弹性刚度失谐下局部化因子随无量纲频率的变化

Fig. 4 Localization factors versus dimensionless frequencies for disordered elastic stiffness of piezoelectric material

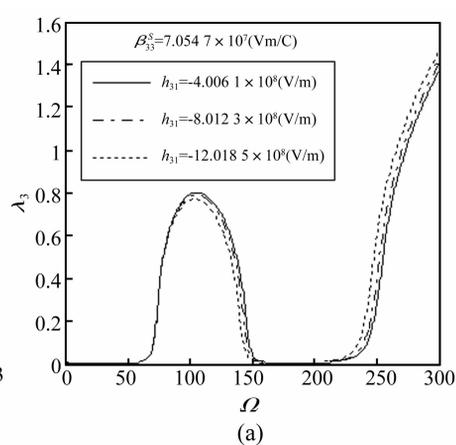
由图 5 可见,对于同一失谐度,压电参数对周期结构频带特性及局部化程度影响甚微,不同压电常数和介电常数的结构在低频区内,局部化因子曲线保持不变;在整个频率范围内,频率通带和禁带带宽几乎相同。但随着压电常数增加,局部化因子的峰值在第一个禁带降低,而在第二个禁带则增加;介电常数的变化规律与其则刚刚相反。

4 结论

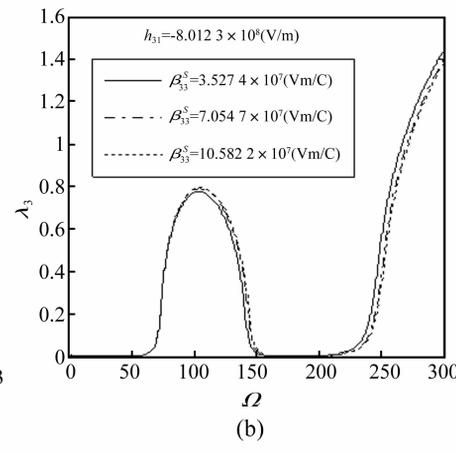
本文对随机失谐周期压电 Timoshenko 梁的波传播及其局部化行为进行了研究。通过数值算例分析得到以下结论:对于本文周期压电梁而言,基梁长度随机失谐仅能轻微地改变结构的波动局部化特性;失谐度越大,波动局部化程度越强。不同基梁材料对结构的频带特性会有较明显影响;而压电材料参数变化,尤其是压电材料弹性刚度随机失谐对频带性质和局部化程度的影响则非常有限。因此,随机失谐并不能显著地改变本文周期压电梁的波动特性。

参考文献

[1] Thorp O, Ruzzene M, Baz A. Attenuation and localization of



(a)



(b)

图 5 压电参数变化下局部化因子随无量纲频率的变化

Fig. 5 Effects of different piezoelectric parameters on localization factors for disordered length of the purely elastic beam with $\delta=0.10$

wave propagation in rods with periodic shunted piezoelectric patches [J]. Smart Materials and Structures, 2001, 10 (5): 979 - 989.

[2] Baz A. Active control of periodic structures [J]. ASME, Journal of Vibration and Acoustics, 2001, 123 (4): 472 - 479.

[3] Li F M, Wang Y S. Study on wave localization in disordered periodic layered piezoelectric composite structures [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42 (24 - 25): 6457 - 6474.

[4] Wang Y Z, Li F M, Huang W H, et al. The propagation and localization of Rayleigh waves in disordered piezoelectric phononic crystals [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2008, 56 (4): 1578 - 1590.

[5] Spadoni A, Ruzzene M, Cunefare K. Vibration and wave propagation control of plates with periodic arrays of shunted piezoelectric patches [J]. Journal of Intelligent Material Systems and Structures, 2009, 20 (8): 979 - 990.

[6] Lin Y K, McDaniel T J. Dynamics of beam-type periodic structures [J]. Journal of Engineering for Industry, 1969, 91 (4): 1133 - 1141.

[7] Solaroli G, Gu Z, Baz A, et al. Wave propagation in periodic stiffened shells: spectral finite element modeling and experiments [J]. Journal of Vibration Control, 2003, 9 (9): 1057 - 1081.

- [8] Yeh J Y, Chen L W. Wave propagations of a periodic sandwich beam by FEM and the transfer matrix method [J]. *Composite Structures*, 2006, 73 (1): 53 – 60.
- [9] Lee U, Kim J. Dynamics of elastic piezoelectric two-layer beams using spectral element method [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2000, 37 (32): 4403 – 4417.
- [10] 诸葛荣, 陈全公. 框架振动的有限元分析 – Timoshenko 梁理论的应用 [J]. *上海海运学院学报*, 1982, 3 (4): 9 – 24.
ZHUGE Rong, CHEN Quan-gong. The finite element analysis for truss vibration-the application of Timoshenko beam theory [J]. *Journal of Shanghai Maritime University*, 1982, 3 (4): 9 – 24.
- [11] 陈阿丽, 李凤明, 汪越胜. 失谐压电周期结构中波动的局部化 [J]. *振动工程学报*, 2005, 18 (3): 272 – 275.
CHEN A-li, Li Feng-ming, Wang Yue-sheng. Wave localization in disordered periodic piezoelectric structures [J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2005, 18 (3): 272 – 275.
- [12] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. *Physica D*, 1985, 16 (3): 285 – 317.
- [13] Lee U, Kim J. Spectral element modeling for the beams treated with active constrained layer damping [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2001, 38 (32 – 33): 5679 – 5702.

.....

(上接第 82 页)

- [5] 徐龙河, 杨冬玲, 李忠献. 基于应变和比能双控的钢结构损伤模型 [J]. *振动与冲击*, 2011, 30(7): 218 – 222
XU Long-he, YANG Dong-ling, LI Zhong-xian. Strain and energy ratio-based damage model of a steel structure [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2011, 30(7): 218 – 222.
- [6] GB50011 – 2010. 建筑抗震设计规范 [S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2010.
- [7] FEMA 356. Prestandard and commentary for the seismic rehabilitation of buildings [S]. Washington D C, 2000.
- [8] Bojórquez E, Reyes-Salazar A, Terán-Gilmore A, et al. Energy-based damage index for steel structures [J]. *Steel and Composite Structures*, 2010, 10(4): 343 – 360.
- [9] Hancock J, Bommer J J. A state-of-knowledge review of the influence of strong-motion duration on structural damage [J]. *Earthquake Spectra*, 2006, 22(3): 827 – 845.
- [10] ATC-63. Quantification of building seismic performance factors [R]. ATC – 63 Project Report (90% Draft), FEMA P695/April 2008.
- [11] Cornell C A, Jalayer F, Hamburger R O, et al. Probabilistic basis for 2000 SAC Federal Emergency Management Agency steel moment frame guidelines [J]. *Struct. Eng.*, 2002, 128 (4): 526 – 533.
- [12] Sucuoglu H, Yüccemen S, Gezer A, et al. Statistical evaluation of the damage potential of earthquake ground motions [J]. *Structural Safety*, 1998, 20(4): 357 – 378.
- [13] HAZUS99, User's manual [S]. Washington D C: Federal Emergency Management Agency, 1999.

.....

(上接第 89 页)

- [17] 郭向勇, 方坤河, 冷发光. 混凝土断裂能的理论分析 [J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2005, 37(9): 1219 – 1222.
GUO Xiang-yong, FANG Kun-he, LENG Fa-guang. Analysis of the theory of fracture energy of concrete [J]. *Journal of Harbin Institute of Technology*, 2005, 37(9): 1219 – 1222.
- [18] 赵锦华. 仿真混凝土的力学性能研究及重力坝的动力模型数值分析 [D]. 大连: 大连理工大学, 2007.
- [19] 王铭明. 阿海碾压混凝土重力坝抗震加固措施的试验及数值研究 [D]. 呼和浩特: 内蒙古农业大学, 2010.
- [20] 李士军, 马大为, 朱孙科. 动力松弛方法中 Rayleigh 阻尼参数取值分析 [J]. *计算力学学报*, 2010, 27(1): 169 – 172.
LI Shi-jun, MA Da-wei, ZHU Sun-ke. Analysis of Rayleigh damp parameters in dynamic relaxation method [J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2010, 27(1): 169 – 172.