

SH波在界面上散射的远场解

陈志刚^{1,2}

(1. 暨南大学 力学与土木工程系, 广州 510632;

2. 暨南大学 重大工程灾害与控制教育部重点实验室, 广州 510632)

摘要: 采用 Green 函数和复变函数方法研究了界面上任意形柱状孔洞对 SH 波散射的远场解。取含有任意形凹陷的弹性半空间, 在其水平表面上任意一点承受时间谐和的反平面线源荷载作用时的位移解作为 Green 函数, 按“契合”的方式构造出两种不同介质交界面上任意形孔洞对 SH 波的散射模型, 利用 Green 函数建立求解问题的第一类 Fredholm 积分方程组, 求解散射波的远场位移模式和散射截面。通过算例, 分析了不同材料组合情况下界面椭圆孔和方孔对 SH 波散射的远场特性。

关键词: 界面孔; SH 波; 远场位移模式; 散射截面; Green 函数

中图分类号: O347.4

文献标志码: A

DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2014.12.024

Far field solution to SH-wave scattered by an interface cavity

CHEN Zhi-gang^{1,2}

(1. Department of Mechanics and Civil Engineering, Jinan University, Guangzhou 510632, China;

2. Key Laboratory of Disaster Forecast and Control in Engineering, Ministry of Education Jinan University, Guangzhou 510632, China)

Abstract: The far field solution to SH-wave scattered by an arbitrary shape cavity on an interface was investigated with the methods of Green's function and complex function. A suitable Green's function was constructed, it was the fundamental solution to displacement field for an elastic half space with any cavity under anti-plane harmonic line source loading exerted at an arbitrary point on its horizontal surface. The model of SH-wave scattered by a cavity on the interface of two different media could be built based on the idea of conjunction. Then a series of the first kind of Fredholm integral equations for determining the displacement mode of scattered wave in far field and scattering cross-section were set up using Green's function. The numerical examples were given and the far-field characteristics of SH wave scattered by an elliptical cavity and a quadrate one under different media combinations were analyzed.

Key words: interface cavity; SH-wave; displacement mode of scattered wave in far field; scattering cross-section; Green's function

界面缺陷对弹性波散射的研究与许多工程实际问题密切相关, 因此多年来一直倍受国内外学者关注^[1-7]。对于界面非裂纹型缺陷, 刘殿魁等^[3]首先用 Green 法求解了两种介质交界面上圆孔对 SH 波的散射, 此后刘殿魁等^[4-6]进一步研究了界面多圆孔、界面夹杂和界面衬砌对 SH 波的散射问题。何钟怡等^[7]则应用波函数展开法求解了界面孔对 SH 波的绕射问题。但以上的研究均着眼于界面孔附近动应力集中现象, 对界面孔远场特性的关注很少, 而已有关于远场特性的研究成果都是针对界面圆形缺陷的^[8-10]。弹性波在

界面孔附近产生的散射波场既能够引起局部的应力集中现象, 同时也携带有孔洞的形状、尺寸和位置等特征信息。由于弹性波散射场的远场信息中也可以提取出缺陷自身的一些特征信息, 对于材料和工程结构的无损检测有重要的意义, 是反问题研究中的基本课题之一。本文将研究 SH 波在两种介质交界面处的非圆形孔洞上散射的远场解, 考察不同形状的界面孔对波散射的远场特性的影响。

1 计算模型

在弹性介质 I 和 II 的界面处, 存在有边界为 S 的任意形状的孔洞, 直线 L 为两种介质的交界, 介质 I 的剪切模量为 μ_1 , 密度为 ρ_1 , 介质 II 的剪切模量为 μ_2 , 密度为 ρ_2 , 界面上任意形孔洞的 SH 波散射模型如图 1 所

示,图中 r 和 θ 为复平面 $z(xoy$ 坐标系)上的极坐标。

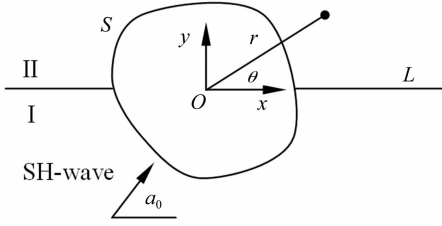


图 1 SH 波入射界面孔模型

Fig. 1 SH wave incident on an interface cavity

研究界面上孔洞对 SH 波的散射,可按“契合”问题进行处理,首先考虑由具有两种不同材料常数(μ_1, ρ_1)和(μ_2, ρ_2)的弹性半空间 I、II“契合”而成的无孔洞全空间中 SH 波的入射问题,稳态谐和的平面 SH 波入射于契合的全空间,入射波 $w^{(i)}$ 在复平面 z 上可写成

$$w^{(i)} = w_0 e^{\frac{ik_1}{2}[ze^{-i\alpha_0} + \bar{z}e^{i\alpha_0}]} \quad (1)$$

式中: w_0 为入射波幅值, α_0 为入射角, k_1 为介质 I 的入射波数, $k_1 = \omega/c_1$, ω 为圆频率, c_1 为介质 I 的剪切波速; $i = \sqrt{-1}$ 。

由于界面的存在,在介质 I、II 中分别存在反射波 $w^{(r)}$ 和折射波 $w^{(f)}$ 在复平面 z 上可写成

$$w^{(r)} = w_2 e^{\frac{ik_1}{2}[ze^{-i\alpha_0} + \bar{z}e^{i\alpha_0}]} \quad (2)$$

$$w^{(f)} = w_4 e^{\frac{ik_2}{2}[ze^{-i\alpha_4} + \bar{z}e^{i\alpha_4}]} \quad (3)$$

式中: $k_2 = \omega/c_2, c_2 = \sqrt{\mu_2/\rho_2}$ 为介质 II 的剪切波速, $\cos\alpha_4 = c_2/c_1 \cdot \cos\alpha_0$

$$w_2 = \frac{w_0 [\sin\alpha_0 - (\mu_2/\mu_1)(c_1/c_2)\sin\alpha_4]}{\sin\alpha_0 + (\mu_2/\mu_1)(c_1/c_2)\sin\alpha_4}$$

$$w_4 = \frac{2w_0 \sin\alpha_0}{\sin\alpha_0 + (\mu_2/\mu_1)(c_1/c_2)\sin\alpha_4}$$

把入射波 $w^{(i)}$ 、反射波 $w^{(r)}$ 和折射波 $w^{(f)}$ 分别作为入射波入射到含有任意形孔洞的全空间介质 I 和介质 II 中,因此,产生的散射波场在映射平面 η 上^[11],可分别表示为

$$w^{(is)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(is)} H_m^{(1)}(k_1 |\omega(\eta)|) \cdot \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m \quad (4)$$

$$w^{(rs)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(rs)} H_m^{(1)}(k_1 |\omega(\eta)|) \cdot \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m \quad (5)$$

$$w^{(fs)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(fs)} H_m^{(1)}(k_2 |\omega(\eta)|) \cdot \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m \quad (6)$$

式中: $A_m^{(is)}, A_m^{(rs)}, A_m^{(fs)}$ 为三组待定未知系数。

式(4)、(5)和(6)中未知系数分别应用孔边应力自由的边界条件确定。映射函数 $z = \omega(\eta)$ 将在复平面 z 中任意形孔洞的外域映射到复平面 η 上单位圆的外域。将映射函数 $z = \omega(\eta)$ 代入式(1),经整理入射波作用的含孔洞的全空间介质 I 边界条件可表示为

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m^{(is)} \varepsilon_m - \varepsilon = 0 \quad (7)$$

式中:

$$\varepsilon = iw_0 e^{\frac{ik_1}{2}[\omega(\eta)e^{-i\alpha_0} + \overline{\omega(\eta)}e^{i\alpha_0}]} \times \left[\frac{\eta\omega'(\eta)}{|\omega'(\eta)|} e^{-i\alpha_0} + \frac{\overline{\eta\omega'(\eta)}}{|\eta\omega'(\eta)|} e^{-i\alpha_0} \right]$$

$$\varepsilon_m = H_{m-1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{m-1} \frac{\eta\omega'(\eta)}{|\omega'(\eta)|} - H_{m+1}^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{m+1} \frac{\eta\omega'(\eta)}{|\omega'(\eta)|}$$

可按最小二乘法求解散射波系数 $A_m^{(is)}$

$$\int_0^\pi \varepsilon_n \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m A_m - \varepsilon \right) d\theta = 0 \quad n = 0, 1, 2, \dots, m \quad (8)$$

使边界上产生误差的绝对值最小,通过精度控制截取有限项,将式(8)化为求解未知系数 $A_m^{(is)}$ 的代数方程组。

反射波和折射波分别作用的含孔全空间介质 I 和介质 II 的散射波系数 $A_m^{(rs)}$ 和 $A_m^{(fs)}$ 的求解方法与 $A_m^{(is)}$ 相同。

2 Green 函数

为了求解界面孔洞在 SH 波作用下的散射场,需构造一个含任意形凹陷的弹性半空间在水平表面上任意一点承受时间谐和的反平面线源荷载作用时的位移解,该位移函数即为适合于求解本文问题 Green 函数。Green 函数的详细的推导过程见文献[12],其表达式为

$$G = \frac{1}{2\mu} H_0^{(1)}(k_1 |\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|) +$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(k|\omega(\eta)|) \left\{ \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m + \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-m} \right\} \quad (9)$$

式中: $k = \omega/c_s, c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ 为介质的剪切波速, ω 为位移函数的圆频率, ρ, μ 分别为介质的密度和剪切模量; $\omega(\eta)$ 为映射函数, η_0 为线源荷载作用点 z_0 在映射平面上的像, η 为观察点 z 在映射平面上的像; $H_0^{(1)}(\cdot)$ 为第一类 Hankel 函数, A_m 为半空间中任意形凹陷的散射波系数。

3 定解积分方程

根据已经得到入射波、反射波和折射波以及它们对在含孔洞的全空间介质中产生的散射波,利用前面得到的 Green 函数,按“契合”的方式构造出 SH 波对界面非圆孔的散射问题的解答。首先把入射波 $w^{(i)}$ 和反射波 $w^{(r)}$ 作用的含孔洞的全空间介质 I 沿 x 轴剖分为下半空间,在剖面 $\theta = 0, \pi$ 上的总位移 $w^{(t)}$ 和总应力 $\tau_{\theta z}^{(t)}$ 为

$$w^{(t)} = w^{(i)} + w^{(is)} + w^{(r)} + w^{(rs)} \quad (10)$$

$$\tau_{\theta z}^{(r1)} = \tau_{\theta z}^{(i)} + \tau_{\theta z}^{(is)} + \tau_{\theta z}^{(r)} + \tau_{\theta z}^{(rs)} \quad (11)$$

再将折射波 $w^{(f)}$ 作用的含非圆孔的全空间介质 II 沿 x 轴剖分为上半空间, 在剖面 $\theta = 0, \pi$ 上的总位移 $w^{(r2)}$ 和总应力 $\tau_{\theta z}^{(r2)}$ 为

$$w^{(r2)} = w^{(f)} + w^{(fs)} \quad (12)$$

$$\tau_{\theta z}^{(r2)} = \tau_{\theta z}^{(f)} + \tau_{\theta z}^{(fs)} \quad (13)$$

然后, 将介质 I 构成的下半空间和介质 II 构成的上半空间“契合”在一起, 构成界面孔模型, 如图 1 所示。为了满足剖面上的连续条件, 需分别在介质 I、II 的剖面上施加待定的外力系 $f_1(r_0, \theta_0), f_2(r_0, \theta_0)$, 在剖面上应满足应力连续条件

$$\tau_{\theta z}^{(r1)} + f_1(r_0, \theta_0) = \tau_{\theta z}^{(r2)} + f_2(r_0, \theta_0) \quad (14)$$

满足剖面上的位移连续条件, 得到求解外力系 $f_1(r_0, \theta_0)$ 的定解积分方程组

$$\begin{aligned} & \int_{R_0}^{\infty} \{f_1(r_0, \pi) [G_1(r, \pi, r_0, \pi) + G_2(r, \pi, r_0, \pi)] + \\ & f_1(r_0, 0) [G_1(r, \pi, r_0, 0) + G_2(r, \pi, r_0, 0)] = \\ & [w^{(fs)} - w^{(is)} - w^{(rs)}]_{\theta=\pi} + \int_{R_0}^{\infty} [\tau_{\theta z}^{(is)} + \tau_{\theta z}^{(rs)} - \tau_{\theta z}^{(fs)}]_{\theta=\pi} \\ & G_2(r, \pi, r_0, \pi) dr_0 - \\ & \int_{R_0}^{\infty} [\tau_{\theta z}^{(is)} + \tau_{\theta z}^{(rs)} - \tau_{\theta z}^{(fs)}]_{\theta=0} G_2(r, \pi, r_0, 0) dr_0 \\ & \int_{R_0}^{\infty} \{f_1(r_0, \pi) [G_1(r, \pi, r_0, \pi) + G_2(r, 0, r_0, \pi)] + \\ & f_1(r_0, 0) [G_1(r, 0, r_0, 0) + G_2(r, 0, r_0, 0)] dr_0 = \\ & [w^{(fs)} - w^{(is)} - w^{(rs)}]_{\theta=0} + \int_{R_0}^{\infty} [\tau_{\theta z}^{(is)} + \tau_{\theta z}^{(rs)} - \tau_{\theta z}^{(fs)}]_{\theta=\pi} \\ & G_2(r, 0, r_0, \pi) dr_0 - \\ & \int_{R_0}^{\infty} [\tau_{\theta z}^{(is)} + \tau_{\theta z}^{(rs)} - \tau_{\theta z}^{(fs)}]_{\theta=0} G_2(r, \pi, r_0, 0) dr_0 \quad (15) \end{aligned}$$

式中, G_1, G_2 分别为介质 I、II 中的 Green 函数, 由式 (9) 所定义。

定解积分方程属于半无限域上含弱奇异性的第一类 Fredholm 积分方程, 其奇异性表现为 Green 函数的像点与源点重合时, 被积核函数呈对数奇异性。可采用求解弱奇异积分方程组的直接离散法, 利用散射波的衰减特性, 将积分方程组转化为代数方程组, 求解出在一系列离散点上附加外力系的值, 使问题获得解答。

4 远场位移模式

散射波场的各个分量包括几何波场对孔产生的散射波 $w^{(is)}, w^{(rs)}$ 和 $w^{(fs)}$ 以及界面附加外力系产生的散射波 $w^{(f1)}$ 和 $w^{(f2)}$, 介质 I 中, 总的散射位移场为

$$\begin{aligned} w^{I s}(r, \theta) &= w^{(is)}(r, \theta) + w^{(rs)}(r, \theta) + w^{(f1)}(r, \theta) = \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} A_m^{(is)} H_m^{(1)}(k_1 |\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m + \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} A_m^{(rs)} H_m^{(1)}(k_1 |\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} f_1(r_0, \pi) G_1(r, \theta, r_0, \pi) dr_0 + \\ & \int_0^{\infty} f_1(r_0, 0) G_1(r, \theta, r_0, 0) dr_0 \quad (16) \end{aligned}$$

介质 II 中, 总的散射位移场为

$$\begin{aligned} w^{II s}(r, \theta) &= w^{(fs)}(r, \theta) + w^{(f2)}(r, \theta) = \\ & \sum_{-\infty}^{\infty} A_m^{(fs)} H_m^{(1)}(k_2 |\omega(\eta)|) \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m + \\ & \int_0^{\infty} f_2(r_0, \pi) G_2(r, \theta, r_0, \pi) dr_0 + \\ & \int_0^{\infty} f_2(r_0, 0) G_2(r, \theta, r_0, 0) dr_0 \quad (17) \end{aligned}$$

将式(9)表述的 Green 函数首项中的 Hankel 函数, 利用 Bessel 函数的 Graf 加法公式展开为

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(k |\omega(\eta) - \omega(\eta_0)|) &= \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{4} \varepsilon_m \left\{ \left[\frac{\omega(\eta_0)}{|\omega(\eta_0)|} \right]^m + \left[\frac{\omega(\eta_0)}{|\omega(\eta_0)|} \right]^{-m} \right\} \times \\ & \left\{ \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^m + \left[\frac{\omega(\eta)}{|\omega(\eta)|} \right]^{-m} \right\} \\ & \begin{cases} J_m(k_j |\omega(\eta_0)|) H_m^{(1)}(k_j |\omega(\eta)|), & |\eta| > |\eta_0| \\ J_m(k_j |\omega(\eta)|) H_m^{(1)}(k_j |\omega(\eta_0)|), & |\eta| < |\eta_0| \end{cases} \end{aligned}$$

因本文研究散射的远场问题, 此时总是像点极径大于源点极径, 所以上式中的 Green 函数取 $|\eta| > |\eta_0|$ 的情况, 并与介质 I、II 相适应。散射波一般表示成以 Hankel 函数为项的级数形式, 从式(14)和(15)中提取它们的通项 $H_m^{(1)}(k_j |\omega(\eta)|), j=1, 2$ 。Hankel 函数在宗量充分大时的渐近表达式为

$$H_n^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} + O(x^{-\frac{3}{2}}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

当 $|z| \rightarrow \infty$ 时, 则 $|\omega(\eta)| = |re^{i\theta}| \rightarrow \infty, r \rightarrow \infty$, 则远场位移模式写为:

$$\begin{aligned} w^{I s}(r, \theta) &= \sqrt{\frac{8\pi}{k_1 r}} e^{i(k_1 r - \pi/4)} F^{(I)}(\theta), \quad \pi \leq \theta < 2\pi \\ w^{II s}(r, \theta) &= \sqrt{\frac{8\pi}{k_2 r}} e^{i(k_2 r - \pi/4)} F^{(II)}(\theta), \quad 0 \leq \theta < \pi \end{aligned}$$

上述公式右边的 $F^{(I)}$ 和 $F^{(II)}$ 即分别为介质 I、II 的散射波远场位移模式

$$\begin{aligned} F^{(I)}(\theta) &= F^{(is)}(\theta) + F^{(rs)}(\theta) + F^{(f1)}(\theta) = \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{im\theta} (A_m^{(is)} + A_m^{(rs)}) + \\ & \frac{1}{2\pi} \times \frac{i}{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \varepsilon_m \cos m\theta \cdot [(-1)^m \\ & \int_a^s f_1(r_0, \pi) J_m(kr_0) dr_0 + \int_a^s f_1(r_0, 0) J_m(kr_0) dr_0] + \\ & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty} 2(-i)^m \cos m\theta \cdot \left[\int_a^s f_1(r_0, \pi) A_m^{(G1)}(r_0, \pi) dr_0 + \right. \\ & \left. \int_a^s f_1(r_0, 0) A_m^{(G1)}(r_0, 0) dr_0 \right] \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{(\text{II})}(\theta) &= F^{(fs)}(\theta) + F^{(f_2)}(\theta) = \\
&\frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} (-i)^m e^{im\theta} A_m^{(fs)} + \frac{1}{2\pi} \times \frac{i}{2\mu} \sum_{m=0}^{\infty} (-i)^m \varepsilon_m \cos m\theta \cdot \\
&[(-1)^m \int_a^s f_2(r_0, \pi) J_m(kr_0) dr_0 + \\
&\int_a^s f_2(r_0, 0) J_m(kr_0) dr_0] + \frac{1}{2\pi} \times \\
&\sum_{m=0}^{\infty} 2(-i)^m \cos m\theta \cdot [\int_a^s f_2(r_0, \pi) A_m^{(G_2)}(r_0, \pi) dr_0 + \\
&\int_a^s f_2(r_0, 0) A_m^{(G_2)}(r_0, 0) dr_0] \quad (19)
\end{aligned}$$

5 界面对 SH 波散射的散射截面

对于承受稳态波 SH 波作用的界面对, 在一个周期 $T = 2\pi/\omega$ 的时间间隔内, 能流通量的时间平均值为:

$$\begin{aligned}
Ave(\dot{E}) &= \frac{\omega}{2} \int_{\pi}^{2\pi} \text{Im}(\tau_{rz}^{1s} \cdot \bar{w}^{1s}) r d\theta + \\
&\frac{\omega}{2} \int_0^{\pi} \text{Im}(\tau_{rz}^{2s} \cdot \bar{w}^{2s}) r d\theta
\end{aligned}$$

式中 $\bar{w}^{(1s)}$ 和 $\bar{w}^{(2s)}$ 分别为 $w^{(1s)}$ 和 $w^{(2s)}$ 的共轭。

且当 $r \rightarrow \infty$ 时, $H_n^{(1)}(r) H_m^{(1)}(r) \approx \frac{2}{\pi r} e^{i\pi(m-n)/2}$, 则

$$Ave(\dot{E}) = \frac{\omega \mu_1}{\pi} \text{Im} \left[y^{(1s)} + \frac{\mu_2}{\mu_1} y^{(2s)} \right] \quad (20)$$

式中:

$$\begin{aligned}
y^{(1s)} &= \sum_{m=0}^{\infty} i\pi \varepsilon_m^1 \cdot \left\{ \varepsilon_m (A_m^{(is)} + A_m^{(rs)}) + \frac{i}{2\mu} \varepsilon_m \right. \\
&[(-1)^m \int_0^{\infty} f_1(r_0, \pi) J_m(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} f_1(r_0, 0) J_m(kr_0) dr_0] + \\
&2 \left[\int_0^{\infty} f_1(r_0, \pi) A_m^{G_1}(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} f_1(r_0, 0) A_m^{G_1}(kr_0) dr_0 \right] \times \\
&\left. \left\{ \varepsilon_m (\bar{A}_m^{is} + \bar{A}_m^{rs}) + \frac{i}{2\mu} \varepsilon_m \right. \right. \\
&[(-1)^m \int_0^{\infty} \bar{f}_1(r_0, \pi) J_m(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} \bar{f}_1(r_0, 0) J_m(kr_0) dr_0] + \\
&2 \left[\int_0^{\infty} \bar{f}_1(r_0, \pi) \bar{A}_m^{G_1}(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} \bar{f}_1(r_0, 0) \bar{A}_m^{G_1}(kr_0) dr_0 \right] \left. \right\} \\
y^{(2s)} &= \sum_{m=0}^{\infty} i\pi \varepsilon_m^1 \cdot \left\{ \varepsilon_m A_m^{(fs)} + \frac{i}{2\mu} \varepsilon_m \right. \\
&[(-1)^m \int_0^{\infty} f_2(r_0, \pi) J_m(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} f_2(r_0, 0) J_m(kr_0) dr_0] + \\
&2 \left[\int_0^{\infty} f_2(r_0, \pi) A_m^{(G_2)}(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} f_2(r_0, 0) A_m^{(G_2)}(kr_0) dr_0 \right] \times \\
&\left. \left\{ \varepsilon_m \bar{A}_m^{(fs)} + \frac{-i}{2\mu} \varepsilon_m \right. \right. \\
&[(-1)^m \int_0^{\infty} \bar{f}_2(r_0, \pi) J_m(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} \bar{f}_2(r_0, 0) J_m(kr_0) dr_0] + \\
&2 \left[\int_0^{\infty} \bar{f}_2(r_0, \pi) \bar{A}_m^{(G_2)}(kr_0) dr_0 + \int_0^{\infty} \bar{f}_2(r_0, 0) \bar{A}_m^{(G_2)}(kr_0) dr_0 \right] \left. \right\}
\end{aligned}$$

上式中, 当 $m=0$ 时, $\varepsilon_m = 1$, $\varepsilon_m^1 = 0.5$; 当 $m \neq 0$ 时, $\varepsilon_m = 2$, $\varepsilon_m^1 = 1$

散射界面是指散射波远场的总能量与入射波在单位面积上的时间平均能通量之比, 将上述总散射能量与入射波在单位面积上的时间平均能通量

$$Ave(\dot{e}) = \frac{1}{2} \mu_1 k_1 \omega w_0^2 = \frac{1}{2} \sigma_0 \omega w_0 \quad (21)$$

用 γ 表示这两个能量之比

$$\gamma = \frac{Ave(\dot{E})}{Ave(\dot{e})} = \frac{2}{\pi k_1 w_0^2} \text{Im} \left[y^{(1s)} + \frac{\mu_2}{\mu_1} y^{(2s)} \right] \quad (22)$$

6 算例和讨论

本文计算和分析界面上椭圆形和带有圆角的方形孔的散射远场, 映射函数 $\omega(\eta)$ 分别为

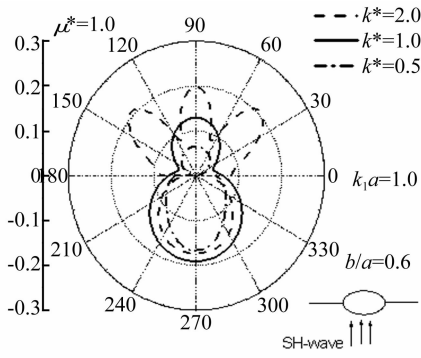
$$z = \omega(\eta) = R \left(\eta + \frac{m}{\eta} \right) \quad (23)$$

$$z = \omega(\eta) = 1.11c \left(\eta - \frac{1}{9\eta^3} \right) \quad (24)$$

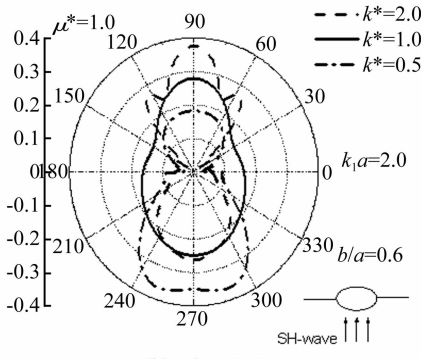
式中: a 和 b 分别为椭圆的长半轴和短半轴, $R = (a + b)/2$, $m = (a - b)/(a + b)$, c 为正方形边长的一半。按式(23)和(24)将含椭圆孔和方孔介质的外域映射为映射平面上单位圆外域, 给出了不同材料组合时界面对引起的散射波远场位移模式随角度的变化以及散射截面随入射波数的变化曲线。上下介质不同材料的组合用两个与材料常数有关的无量纲参数 $\mu^* = \mu_2/\mu_1$ 和 $k^* = k_2/k_1$ 表示。

图 2 给出了 SH 波垂直界面入射时, 界面椭圆孔引起的散射波场的远场位移模式的分布图。图 2 中 $\mu^* = 1.0$ 和 $k^* = 1.0$ 的参数组合对应于均匀介质中椭圆孔对 SH 波散射的远场位移模式, 与文献[13]中的远场位移模式的结果一致。由于两种介质交界面的存在, 界面椭圆孔引起的远场位移模式的幅值在某个方向上明显高于均匀介质情况, 随入射波数 $k_1 a$ 的增加, 远场位移模式幅值的空间分布趋于复杂, 并表现出很强的方向性。SH 波垂直界面入射时, 由于几何边界的对称性, 其远场位移模式幅值图像对称于 y 轴。在相同的介质参数 μ^* 和 k^* 组合下, 当垂直界面的入射波数 $k_1 a$ 相同时, 界面椭圆孔的远场位移幅值要高于界面圆孔^[8]的远场位移幅值, 这说明波垂直于椭圆孔的长轴, 在波传播方向上椭圆扁平, 引起了波在这个方向上更多的散射能量。从图 2 也可以看出, 在相同入射波数 $k_1 a$ 作用下, 在波传播速度小的一侧介质中散射波的远场位移幅值比波速大的一侧高, 这说明介质的软硬及其组合对散射波辐射有着显著地影响。

图 3 给出了 SH 波垂直界面入射时, 在 $\mu^* = 5.0$ 和不同的 k^* 时, 界面椭圆孔的远场位移模式分布。在剪切模量和密度大的一侧介质中远场位移的幅值明显偏小, 这说明散射波的远场位移受介质特性的影响很大, 界面对散射远场特性既受孔洞几何形状的影响, 也



(a) $k_1a=1.0$



(b) $k_1a=2.0$

图2 SH波垂直界面入射时界面椭圆孔散射的远场位移模式

Fig. 2 Displacement mode of scattered wave at far field while interface elliptic hole disturbed by SH-wave

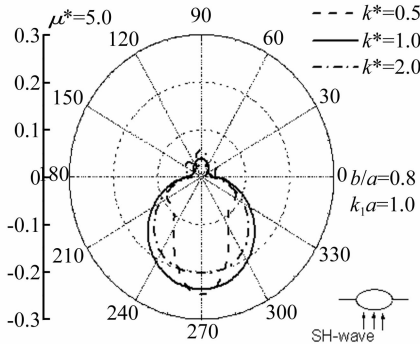


图3 SH波垂直界面入射时界面椭圆孔散射的远场位移模式($\mu^* = 5.0$)

Fig. 3 Displacement mode of scattered wave at far field while interface elliptic hole disturbed by SH-wave at ($\mu^* = 5.0$)

受到介质特性和两种介质组合参数特性的影响。

图4给出SH波与界面成45°角倾斜入射时,界面椭圆孔的远场位移分布。由于入射波传播方向不垂直于界面,界面椭圆孔的远场位移模式分布图形不再对称于y轴或其它方向,且远场位移模式分布图趋于复杂。

图5给出了SH波垂直界面入射时,界面方孔引起的散射波场的远场位移模式的分布。从图可以看出,在不同参数组合下,在正方四角方向上可能会出现更

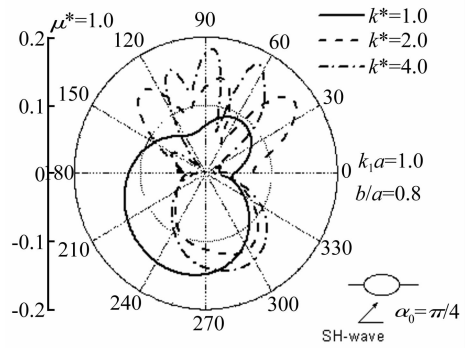
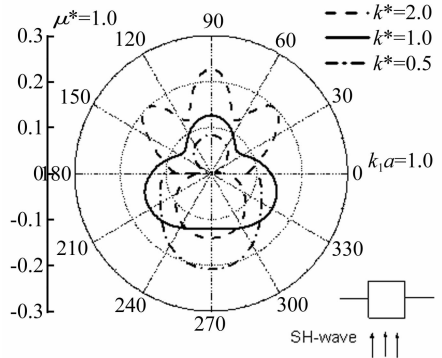


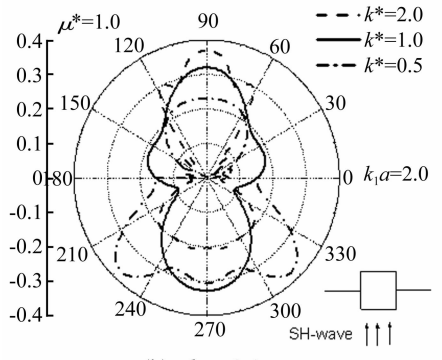
图4 SH波倾斜界面入射时界面椭圆孔的散射远场位移模式

Fig. 4 Displacement mode of scattered wave at far field while interface elliptic hole disturbed by SH-wave

高的远场位移幅值,与界面圆孔和椭圆孔相比,远场位移辐射方向发生了很大的变化。



(a) $k_1a=1.0$



(b) $k_1a=2.0$

图5 SH波垂直界面入射时界面方孔散射的远场位移模式

Fig. 5 Displacement mode of scattered wave at far field while interface square hole disturbed by SH-wave

图6和图7给出SH波垂直入射两种不同材料界面椭圆孔时,散射截面随入射波数 k_1a 的变化曲线。当 $\mu^* = 1.0$ 和 $k^* = 1.0$ 时,图中实线表示均匀介质中椭圆孔的散射截面值,从图中可以看出,界面椭圆孔散射产生的总散射能量明显有别于均匀介质的情况,随着入射波数 k_1a 的增大,在某些频段出现散射截面值会明显增大,且上下介质材料的性质相差越大,这种现象

越明显。当 $k^* = 1.0$, 而 μ^* 变化时, 界面椭圆孔的散射截面值随着入射波数的变化围绕着均匀介质时对应的散射截面值呈波动变化, 在 $\mu^* > 1$ 和 $\mu^* < 1$ 时, 散射截面曲线的波峰和波谷相互交替出现。在 $k^* = 1.0$ 的情

况下, 当材料组合参数 μ^* 变化时, 散射截面曲线交替变化点的位置基本不变, 与界面圆孔^[8]相比, 散射截面曲线交替变化点的位置发生移动。

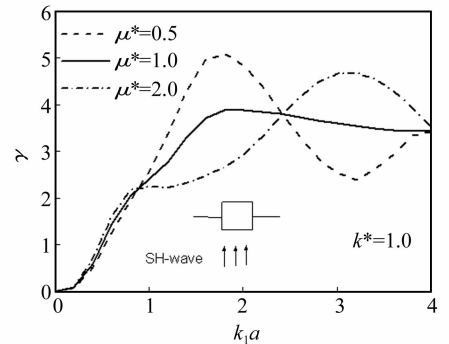
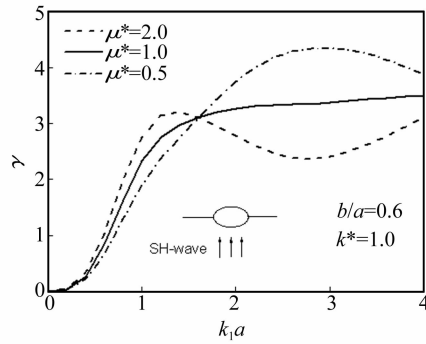
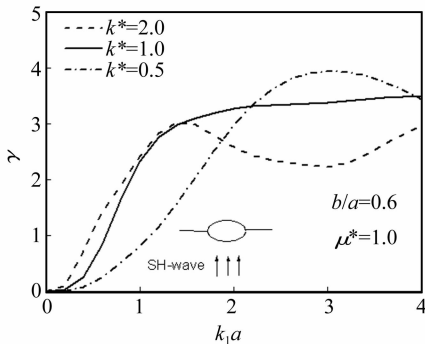


图 6 SH 波垂直界面椭圆孔入射在 k^* 不同时散射截面随入射波数的变化

图 7 SH 波垂直界面椭圆孔入射在 μ^* 不同时散射截面随入射波数的变化

图 8 SH 波垂直界面方孔入射在 μ^* 不同时散射截面随入射波数的变化

Fig. 6 Variation of scattering cross-section vs. normalized wave number while interface elliptic cavity disturbed by SH-wave with different k^*

Fig. 7 Variation of scattering cross-section vs. normalized wave number while interface elliptic cavity disturbed by SH-wave with different μ^*

Fig. 8 Variation of scattering cross-section vs. normalized wave number while interface square cavity disturbed by SH-wave with different μ^*

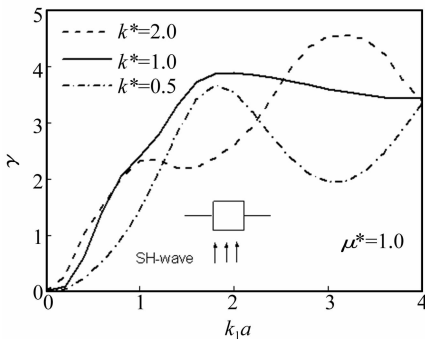


图 9 SH 波垂直界面方孔入射在 k^* 不同时散射截面随入射波数的变化

Fig. 9 Variation of scattering cross-section vs. normalized wave number while interface square cavity disturbed by SH-wave with different k^*

图 8 和图 9 给出 SH 垂直界面入射时, 界面方孔的散射截面值随入射波数 $k_1 c$ 的变化曲线。散射截面曲线的变化规律与界面椭圆的相似, 在某个频段内散射截面值明显增大, 但出现这种现象的频段与界面椭圆有很大的不同。当 $k^* = 1.0$, 而 μ^* 变化时, 散射截面曲线交替变化点的位置与界面椭圆时有很大差别, 说明这时孔洞的形状对散射截面值产生了很大的影响。

7 结论

采用 Green 函数和复变函数方法研究了平面 SH 波在界面孔上散射问题的远场解, 通过算例分析了界

面椭圆孔和方孔散射的远场位移模式和散射截面值随介质特性、入射方向和入射波数的变化规律, 从数据分析中可以得到以下结果:

(1) 界面孔对 SH 波散射, 其散射波的远场位移模式和散射截面的变化, 与无量纲入射波数、两种介质的剪切模量比 μ^* 、两种介质的波数比 k^* 和波的入射角度, 且孔的形状的影响非常显著。

(2) 对于界面孔的远场解答, 入射波数起重要作用, 随入射波数的增加, 远场位移模式的分布曲线变化趋于复杂, 且表现出很强的方向性。界面孔散射界面值的变化明显有别于均匀介质情况下的规律, 在某个频段内散射截面值会明显增大。

(3) 在界面处介质的性质发生急剧的变化, 界面孔的散射能量在某个频段内会出现明显增大的现象, 特别是在低频段能量异常增大, 应予以充分的重视。

参考文献

[1] 王铎, 汪越胜. 界面动力学研究近况[J]. 上海力学, 1993, 14(4): 1-15.
WANG Dou, WANG Yue-sheng. Recent progress in dynamic of interface[J]. Shanghai Journal of Mechanics, 1993, 14(4): 1-15.

[2] 邓庆田, 杨智春. 导波在多损伤板结构中的散射[J]. 振动与冲击, 2010, 29(4): 40-43.
DENG Qing-tian, YANG Zhi-chun. Scattering of guided wave in a plate-like structure with multiple damages[J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(4): 40-43.

[3] 刘殿魁, 刘宏伟. SH 波散射与圆孔附近的动应力集中[J]. 力学学报, 1998, 30(5): 597-604.
LIU Dian-kui, LIU Hong-wei. Scattering and dynamic stress concentration of SH-wave interface circular hole [J]. Acta

- Mechanica Sinica,1998,30(5):597-604.
- [4] 史守峡,刘殿魁. SH波与界面多圆孔的散射及动应力集中[J]. 力学学报,2001,33(1):60-70.
SHI Shou-xia, LIU Dian-kui. Dynamic stress concentration and scattering of SH-wave by interface multiple circle canyons [J]. Acta Mechanica Sinica, 2001, 33(1): 60-70.
- [5] 刘殿魁,田家勇. SH波对界面圆柱形弹性夹杂散射及动应力集中[J]. 爆炸与冲击,1999,19(2):115-123.
LIU Dian-kui, TIAN Jia-yong. Scattering and dynamic stress concentration [J]. Explosion and Shock Waves, 1999, 19(2): 115-123.
- [6] 刘殿魁,史守峡. 界面上圆形衬砌结构对平面SH波散射[J]. 力学学报,2002,34(5):798-803.
LIU Dian-kui, SHI Shou-xia. The scattering of plane SH-wave by circular interface cavity with lining [J]. Acta Mechanica Sinica, 2002, 34(5): 798-803.
- [7] 何钟怡,樊洪明,刘有军. SH波绕界面孔的散射[J]. 力学学报,2002,34(1):68-76.
HE Zhong-yi, FAN Hong-ming, LIU You-jun. Scattering of SH wave by interface cavity [J]. Acta mechanica sinica, 2002, 34(1):68-76.
- [8] 刘宏伟,刘殿魁. 界面圆孔对SH波散射的远场解[J]. 固体力学学报,1999,4(20):349-355.
LIU Hong-wei, LIU Dian-kui. Far field solution of SH wave scattered by interface circular hole [J]. Acta mechanica solida sinica, 1999, 4(20): 349-355.
- [9] 赵嘉喜,齐辉. 界面脱胶圆夹杂对SH波散射的远场解[J]. 力学与实践,2009,31(1):47-51.
ZHAO Jia-xi, QI Hui. Far field solution of SH wave scattered by an interface cylindrical inclusion with disconnected curve [J]. Mechanics in Engineering, 2009,31(1): 47-51.
- [10] 田家勇,刘殿魁,刘春旭. 界面固定圆形刚柱对SH波散射的远场解[J]. 哈尔滨工程大学学报,1999,20(4):90-97.
TIAN Jia-yong, LIU Dian-kui, LIU Chun-xu. Far field solution of SH wave scattered by an interface cylindrical rigid inclusion [J]. Journal of Harbin engineering university, 1999, 20(4): 90-97.
- [11] Liu D K, Gai B Z, Tao G Y. Applications of the method of complex function to dynamic stress concentration [J] Wave motion, 1982(4): 293-304.
- [12] 陈志刚. SH波作用下界面任意形状孔洞附近的动应力集中[J]. 固体力学学报,2006,27(4):408-414.
CHEN Zhi-gang. Dynamic stress concentration around an interface cavity of arbitrary shape by SH wave [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2006,27(4): 408-414.
- [13] 陈志刚,刘殿魁. SH波对椭圆孔散射的远场解[J]. 哈尔滨工程大学学报,2003,24(3):334-338.
CHEN Zhi-gang, LIU Dian-kui. Far field solution of SH wave scattering by elliptic cavity [J]. Journal of Harbin Engineering University, 2003,24(3):334-338.

(上接第125页)

- [6] 叶继红,侯信真. 大跨屋盖脉动风压得非高斯特性研究[J]. 振动与冲击, 2010, 29(7): 9-15.
YE Ji-hong, HOU Xin-zhen. Non-Gaussian features of fluctuating wind pressures on long span roofs [J]. Journal of Vibration and Shock, 2010, 29(7): 9-15.
- [7] Rouillard V. The synthesis of road vehicle vibrations based on the statistical distribution of segment lengths [C]//ACAM. Proceedings of 5th Australasian Congress on Applied Mechanics. Brisbane, Australia: ACAM, 2007:1-6.
- [8] Rouillard V. On the non-Gaussian nature of random vehicle vibrations [C]// WCE 2007. Proceedings of the World Congress on Engineering 2007. London, UK: WCE, 2007. 1219-1224.
- [9] Rychlik I, Johannesson P, Leadbetter M R. Modeling and statistical analysis of ocean-wave data using transformed Gaussian processes [J]. Marine Structures, 1997, 10(1): 13-47.
- [10] Podgórski K, Rychlik I, Machado U B. Exact distributions for apparent waves in irregular seas [J]. Ocean Engineering, 2000, 27(9): 979-1016. [11] Butler R W, Machado U B, Rychlik I. Distribution of wave crests in a non-Gaussian sea [J]. Applied Ocean Research, 2009, 31(1): 57-64.
- [12] Harremoës P. Maximum entropy and the Edgeworth expansion [C]// IEEE. Proceedings of the IEEE Information theory workshop. Awaji Island, Japan: IEEE, 2005. 68-71.
- [13] Winterstein S R. Nonlinear vibration models for extremes and fatigue [J]. Journal of Engineering Mechanics, 1988, 114(10): 1772-1790.
- [14] Steinwolf A. Approximation and simulation of probability distributions with a variable kurtosis value [J] Computational Statistics & Data Analysis, 1996, 21(2): 163-180.
- [15] Mendel J M. Tutorial on higher-order statistics (spectra) in signal processing and system theory: theoretical results and some applications [J]. Proceedings of the IEEE, 1991, 79(3): 278-305.
- [16] 蒋瑜,陶俊勇,王得志,等. 一种新的非高斯随机振动数值模拟方法[J]. 振动与冲击, 2012, 31(9): 169-173.
JIANG Yu, TAO Jun-yong, WANG De-zhi, et al. A novel approach for numerical simulation of a non-Gaussian random vibration [J]. Journal of Vibration and Shock, 2012, 31(9): 169-173.
- [17] Middleton D. Non-Gaussian noise models in signal processing for telecommunications: new methods and results for class A and class B noise models [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1999, 45(4): 1129-1149.