

文章编号: 1000-4750(2014)08-0032-09

基于 Copula 函数的并联结构系统可靠度分析

李典庆^{1,2}, 唐小松^{1,2}, 周创兵^{1,2}, 方国光^{1,2,3}

(1. 武汉大学水资源与水电工程科学国家重点实验室, 武汉 430072; 2. 武汉大学水工岩石力学教育部重点实验室, 武汉 430072;
3. 新加坡国立大学土木与环境工程系, 新加坡 117576)

摘 要: 不完备概率信息条件下变量联合分布函数的确定及其对结构系统可靠度的影响还缺少系统地研究, 该文目的在于研究表征变量间相关性的 Copula 函数对结构系统可靠度的影响规律。首先, 简要介绍了变量联合分布函数构造的 Copula 函数方法。其次, 提出了并联系统失效概率计算方法, 并推导了相应的计算公式。最后以几种典型 Copula 函数为例研究了 Copula 函数类型对结构并联系统可靠度的影响规律。结果表明: 表征变量间相关性的 Copula 函数类型对结构系统可靠度具有明显的影响, 不同 Copula 函数计算的系统失效概率存在明显的差别, 这种差别随构件失效概率的减小而增大。当并联系统的失效区域位于 Copula 函数尾部时, Copula 函数的尾部相关性对系统可靠度有明显的影响, 计算的失效概率比没有尾部相关性的 Copula 函数的失效概率大。当组成并联系统的两构件功能函数间正相关时, 系统失效概率随相关系数的增大而增加; 当构件功能函数间负相关时, 系统失效概率随相关系数的增大而减小。此外, 无论构件失效概率和变量间相关系数如何变化, Copula 函数计算的失效概率都位于系统失效概率的上下限内。

关键词: 联合概率分布函数; 不完备概率信息; 相关性; Copula; 系统失效概率

中图分类号: TU318 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.02.0144

PARALLEL STRUCTURAL SYSTEM RELIABILITY ANALYSIS FROM THE COPULA VIEWPOINT

LI Dian-qing^{1,2}, TANG Xiao-song^{1,2}, ZHOU Chuang-bing^{1,2}, PHOON Kok-kwang^{1,2,3}

(1. State Key Laboratory of Water Resources and Hydropower Engineering Science, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

2. Key Laboratory of Rock Mechanics in Hydraulic Structural Engineering, Ministry of Education, Wuhan University, Wuhan 430072, China;

3. Department of Civil and Environmental Engineering, National University of Singapore, 117576, Singapore)

Abstract: Structural system reliability can not be determined uniquely based on incomplete probability information of correlated variables. This paper aims to investigate the effect of copula choice on system reliability when probability information is incomplete. First, the method for constructing the joint probability distribution of correlated variables using copulas is introduced. Thereafter, a parallel system reliability model is formulated and the formulae for calculating the system probability of failure are derived. Finally, several typical copulas are selected to model the dependence structure between correlated variables. A parallel system with two components is presented to demonstrate the effect of copula choice on system reliability. The results indicate that the copula choice has a significant effect on the system reliability. The system probabilities of failure produced by different copulas can differ considerably, and the level of difference increases with decreasing component probability of failure. Tail dependence has a significant impact on the system probability of failure. When tail dependence

收稿日期: 2013-02-26; 修改日期: 2013-07-31

基金项目: 国家杰出青年科学基金项目(51225903); 国家自然科学基金项目(51329901); 高等学校博士学科点专项科研基金项目(20120141110009)

通讯作者: 李典庆(1975—), 男, 湖北竹溪人, 教授, 博士, 主要从事岩土工程可靠度分析与风险控制方面的研究(E-mail: dianqing@whu.edu.cn).

作者简介: 唐小松(1986—), 男, 广西桂林人, 博士生, 主要从事岩土工程可靠度和风险分析方面的研究(E-mail: xstang@whu.edu.cn);

周创兵(1962—), 男, 江苏南通人, 教授, 博士, 主要从事岩体多场耦合、岩体变形与稳定性方面的研究(E-mail: cbzhou@whu.edu.cn);

方国光(1963—), 男, 新加坡人, 教授, 博士, 主要从事岩土工程可靠度分析与风险控制方面的研究(E-mail: kkphoon@nus.edu.sg).

associated with a specified copula falls in a failure domain, the resulting system probability of failure will rise. The system probability of failure increases with increasing dependence between variables for positively correlated component performance functions, while it decreases with increasing correlation between variables for negatively correlated component performance functions. In addition, the system probabilities of failure associated with different copulas will be restricted within the upper bound and lower bound underlying the parallel system probability of failure for any given component probability of failure and correlation coefficient between variables.

Key words: joint probability distribution function; incomplete probability information; correlation; copula; system probability of failure

目前结构可靠度理论已被广泛应用于结构设计和安全评估,众所周知,结构可靠度分析中有关参数通常视为随机变量,而且变量间存在一定的相关性,如结构地震峰值位移和永久位移存在正相关性^[1]、焊缝疲劳损伤所受的各级应力存在正相关性^[2]、岩土体抗剪强度参数及基桩荷载-位移双曲线参数间都具有明显的负相关关系^[3-4]。研究表明参数间相关性对结构可靠度具有明显的影响^[1-4]。为了能够更加准确地评价结构安全度,可靠度计算中应该合理地考虑变量间相关性的影响。然而实际工程受各种条件限制一般只能获得变量的边缘分布函数和变量间相关系数等不完备概率信息^[5]。一般来说,基于这种不完备概率信息很难获得精确的变量联合概率密度函数,实际应用中通常采用多维正态分布^[6-9]构造相关变量的联合概率分布函数或利用 Nataf 变换^[10]将相关非正态变量变换为独立变量进行可靠度分析。虽然上述方法都可以模拟相关非正态变量,但是它们都隐含着变量间相关结构为 Gaussian 相关结构^[11-12],相应的联合概率分布函数是采用 Gaussian Copula 函数构造的。变量间存在多种相关结构,而且变量间相关结构并不总是服从 Gaussian 相关结构。因此,不完备概率信息条件下如何确定相关非正态变量的联合概率分布模型是结构可靠度分析中亟待解决的关键问题。

近年来,数学领域快速发展的 Copula 理论^[13]为不完备概率信息条件下相关变量联合分布函数的建立提供了一种新的途径。Copula 理论最早应用于金融领域数据分析^[14],目前在水文学^[15]和结构工程^[1-2]领域中也逐渐得到应用。由 Copula 理论知,有多种 Copula 函数可以用来构造变量的联合概率分布函数,如 Gaussian、Plackett、Frank、Clayton、CClayton Copula 函数等^[13]。不同 Copula 函数具有不同的相关结构,如 Gaussian、Plackett 和 Frank Copula 函数具有对称相关结构,Clayton Copula 函

数具有下尾相关性,而 CClayton Copula 函数具有上尾相关性。不同 Copula 函数在描述变量间相关结构方面的差别可能会对结构可靠度产生重要影响。为了分析这种影响,文献[16]研究了 Copula 函数类型对结构构件可靠度的影响,发现表征变量间相关性的 Copula 函数对结构构件可靠度具有明显的影响。然而实际工程结构都是很复杂的,通常由多个构件组成或包含多种失效模式^[9],相应的结构可靠度分析就涉及到系统可靠度问题。系统可靠度分析显然不同于构件可靠度,因此,有必要研究不同 Copula 函数构造的变量联合概率分布函数对结构系统可靠度的影响规律。

本文主要研究不完备概率信息条件下表征变量间相关性的 Copula 函数类型对结构系统可靠度的影响规律。为此,首先简要介绍了变量联合概率分布函数构造的 Copula 函数方法。其次,提出了并联系统失效概率计算方法,并推导了相应的计算公式。最后以几种典型 Copula 函数为例研究了 Copula 函数类型对结构并联系统可靠度的影响规律。

1 变量联合概率分布函数构造的 Copula 函数方法

传统方法构造变量联合概率分布函数隐含着变量间相关结构为 Gaussian 相关结构,该方法本质上是采用 Gaussian Copula 函数构造变量联合概率分布函数。然而实际变量间并非总是服从 Gaussian 相关结构,为此,本文采用 Copula 函数构造变量联合概率分布函数。下面简要介绍变量联合概率分布函数构造的 Copula 函数方法。由 Sklar 定理^[17]可知,任意一个多元联合分布函数都可以分解为相应的边缘分布函数和一个 Copula 函数,这个 Copula 函数唯一地描述了变量间的相关性,包括变量间相关系数的大小以及相关结构的类型。从本质上说,Copula 函数是将变量的联合分布与其边缘分布联

结起来的函数, 根据 Sklar 定理^[17]可将变量 X_1 和 X_2 的联合分布函数 $F(x_1, x_2)$ 表示为:

$$F(x_1, x_2) = C(F_1(x_1), F_2(x_2); \theta) = C(u_1, u_2; \theta) \quad (1)$$

式中: $u_1 = F_1(x_1)$ 和 $u_2 = F_2(x_2)$ 分别为 X_1 和 X_2 的边缘分布函数; C 为 Copula 函数; q 为 Copula 函数的相关参数。因此, 若已知变量 X_1 和 X_2 的边缘分布函数和 Copula 函数, 采用式(1)就可以建立 X_1 和 X_2 的二维分布模型。

由 Copula 理论知, 数学上存在多种 Copula 函数可以用来描述变量间相关性, 且不同 Copula 函数描述变量间相关性是不一样的, 即具有不同的相关结构。仅仅已知变量间相关系数不能唯一确定 Copula 函数, 相应的联合概率分布函数也是不唯一的。虽然 Copula 函数种类繁多, 但是大部分 Copula 函数只能模拟有限的相关系数范围, 如 FGM Copula 函数模拟的 Kendall 秩相关系数范围为 $[-2/9, 2/9]$ 。此外, 不少 Copula 函数严格意义上只能模拟变量间正相关性情况, 如 Clayton Copula 函数只有在联合分布函数值与零之间取较大值时才能模拟变量间负相关性情况。为了能够说明问题, 本文选取常用的 Gaussian、Plackett、Frank、Clayton 和 CClayton Copula 函数描述变量间相关结构, 上述 5 种 Copula 函数的分布函数及其参数取值范围详见文献[16]。在所选的 5 种 Copula 函数中, Gaussian Copula 函数为 Elliptical Copula 函数族中的一种, Plackett Copula 函数属于 Plackett Copula 函数族, 而 Frank、Clayton 和 CClayton Copula 函数则隶属于 Archimedean Copula 函数族。Gaussian、Plackett 和 Frank Copula 函数具有对称相关结构; Clayton Copula 函数具有下尾相关性, 它的下尾相关系数 λ_L 如下式所示^[13]:

$$\lambda_L = 2^{-1/q} \quad (2)$$

同理, CClayton Copula 函数具有上尾相关性, 它的上尾相关系数 λ_U 为^[13]:

$$\lambda_U = 2^{-1/q} \quad (3)$$

有关 Copula 函数尾部相关性的内容可参考文献[16], 这里不再赘述。从式(2)和式(3)可以看出, Clayton Copula 函数的下尾相关系数和 CClayton Copula 函数的上尾相关系数相同, 它们都随变量间相关性的增强而增大。Copula 函数的相关参数一般通过变量间的 Kendall 或 Spearman 秩相关系数直接求出, 本文采用变量间的 Kendall 秩相关系数 t (以下简称相关系数) 求出 Copula 函

数的相关参数 q 。变量 X_1 和 X_2 间相关系数 t 与 Copula 函数 $C(u_1, u_2; q)$ 有以下对应关系^[13]:

$$t = 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2; q) dC(u_1, u_2; q) - 1 \quad (4)$$

对于 Gaussian Copula 函数来说, t 与 q 有以下更简便的关系式:

$$t = \frac{2 \arcsin q}{\pi} \quad (5)$$

同理, Clayton 和 CClayton Copula 函数的相关参数 q 与 t 亦有如下简单关系式:

$$t = \frac{q}{2+q} \quad (6)$$

因此, 当 X_1 和 X_2 间相关系数 t 已知时, 通过求解积分方程式(4)或直接由式(5)和式(6)就可以得出参数 q 。上述 5 种 Copula 函数都能描述变量间的正相关性, 且相关系数范围可以达到 $[0, 1]$, 这些特点非常适合研究不完备概率信息条件下 Copula 函数的类型对结构系统可靠度的影响规律。不同 Copula 函数间的差别特别是尾部相关性可能会对结构系统可靠度产生重要的影响, 下面将主要分析变量间 Copula 函数对结构并联系统可靠度的影响。

2 并联系统可靠度模型及失效概率计算方法

2.1 并联系统可靠度分析模型

结构系统通常包含串联系统、并联系统和串并联系统 3 类。与串联系统相比, 并联系统失效概率具有较宽的上下限, 不同 Copula 函数计算的失效概率变化范围更大, 本文以并联系统可靠度问题为例研究不完备概率信息条件下 Copula 函数对系统可靠度的影响规律。考虑由两个构件组成的基本并联系统, 相应的系统失效概率 p_{fs} 计算公式为:

$$p_{fs} = P[g_1 \leq 0 \text{ 且 } g_2 \leq 0] \quad (7)$$

式中: P 为事件发生的概率; g_1 和 g_2 为构件的功能函数。鉴于所选 5 种 Copula 函数都关于变量取值空间的 45° 对角线平面对称, 为了能最大程度地反映不同 Copula 函数对结构系统可靠度的影响规律, 采用以下构件功能函数进行分析^[9]:

$$\begin{cases} g_1 = S_1 - x_1 \text{ 或 } g_1 = x_1 - S_3 \\ g_2 = S_2 - x_2 \text{ 或 } g_2 = x_2 - S_4 \end{cases} \quad (8)$$

式中: x_1 和 x_2 分别为变量 X_1 和 X_2 的取值; $S_1 \sim S_4$ 分别为 4 个常数, 通过改变常数数值就可以调整构件可靠度水平, 从而改变系统失效概率的大小。综

合式(7)和式(8)可以看出,并联系统失效概率存在以下4种组合:

$$p_{fs1} = P[S_1 - x_1 \gg 0 \mathbf{I} S_2 - x_2 \gg 0] \quad (9a)$$

$$p_{fs2} = P[x_1 - S_3 \gg 0 \mathbf{I} x_2 - S_4 \gg 0] \quad (9b)$$

$$p_{fs3} = P[x_1 - S_3 \gg 0 \mathbf{I} S_2 - x_2 \gg 0] \quad (9c)$$

$$p_{fs4} = P[S_1 - x_1 \gg 0 \mathbf{I} x_2 - S_4 \gg 0] \quad (9d)$$

本文将式 9(a)~式 9(d)所示的系统简称为并联系统 I、II、III、IV,相应的失效概率 $p_{fs1} \sim p_{fs4}$ 称为

并联系统 I、II、III、IV 的失效概率。为了能更加直观地观察系统的失效区域,图 1 给出了上述 4 个并联系统定义的失效区域示意图。可以看出,由式(9)定义的系统失效区域都为半无限空间,且失效区域的对角线都平行或垂直于 Copula 函数的对称面(45°对角线平面),这些失效区域非常适合研究不同 Copula 函数对结构系统可靠度的影响规律。

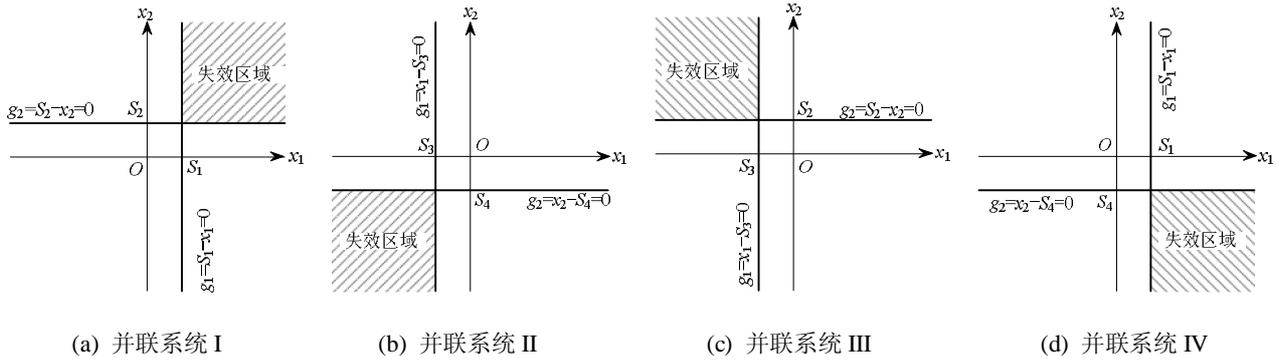


图 1 4 种并联系统及其失效区域示意图

Fig.1 Illustration of the analyzed four parallel systems and their failure domains

2.2 并联系统失效概率计算方法

由于本文研究的 4 种并联系统失效区域比较简单,因此可以直接基于概率论得出系统失效概率的计算公式。为此,首先给出构件失效概率的计算公式。构件失效概率 p_{fc1} 和 p_{fc2} 的计算公式为:

$$\begin{cases} p_{fc1} = P[g_1 \gg 0] \\ p_{fc2} = P[g_2 \gg 0] \end{cases} \quad (10)$$

为了简化计算,假定两构件的失效概率相等,简称为构件失效概率 p_{fc} , 即有:

$$p_{fc1} = p_{fc2} = p_{fc} \quad (11)$$

综合式(8)、式(10)和式(11)可得常数 $S_1 \sim S_4$ 与构件失效概率 p_{fc} 之间有如下关系:

$$\begin{cases} F_1(S_1) = 1 - p_{fc} \\ F_2(S_2) = 1 - p_{fc} \\ F_1(S_3) = p_{fc} \\ F_2(S_4) = p_{fc} \end{cases} \quad (12)$$

式中, $F_1(\cdot)$ 和 $F_2(\cdot)$ 分别为变量 X_1 和 X_2 的边缘分布函数。综合式(1)和式(12), 可得图 1 中 4 种并联系统的失效概率计算公式依次为:

$$p_{fs1} = 1 - F_1(S_1) - F_2(S_2) + F(S_1, S_2) = 2p_{fc} - 1 + C(1 - p_{fc}, 1 - p_{fc}; q) \quad (13a)$$

$$p_{fs2} = F(S_3, S_4) = C(p_{fc}, p_{fc}; q) \quad (13b)$$

$$p_{fs3} = F_1(S_3) - F(S_3, S_2) = p_{fc} - C(p_{fc}, 1 - p_{fc}; q) \quad (13c)$$

$$p_{fs4} = F_2(S_4) - F(S_1, S_4) = p_{fc} - C(1 - p_{fc}, p_{fc}; q) \quad (13d)$$

可以看出,并联系统的失效概率 $p_{fs1} \sim p_{fs4}$ 只与构件失效概率 p_{fc} 和 Copula 函数的相关参数 q 有关,而 q 由变量间相关系数 t 确定。因此,当 p_{fc} 和 t 中任一参数发生变化时,系统失效概率都将变化。由于构件失效概率 p_{fc} 涵盖了变量不同类型边缘分布的影响,本文以下分析无需指定具体的变量边缘分布类型。当不同 Copula 函数的相关参数 q 已知时,采用式(13)就可以计算出不同 Copula 函数对应的系统失效概率。Copula 函数的相关参数 q 可由 X_1 和 X_2 间相关系数 t 求解积分方程式(4)或直接由式(5)和式(6)得出。

由式(8)可以看出,对于并联系统 I 和 II 来说,两构件功能函数间相关系数与变量 X_1 和 X_2 间相关系数相等;而对于并联系统 III 和 IV 来说,两构件功能函数间相关系数与变量 X_1 和 X_2 间相关系数大小相等,符号相反。当构件功能函数间正相关时,并联系统失效概率上下限为^[9]:

$$p_{fc}^2 \gg p_{fs} \gg p_{fc} \quad (14)$$

当构件功能函数完全独立时, 并联系统的失效概率等于下限值; 当构件功能函数完全正相关时, 并联系统的失效概率等于上限值。同理, 当构件功能函数间负相关时, 并联系统失效概率上下限为^[9]:

$$0 \ll p_{fs} \ll p_{fc}^2 \quad (15)$$

可以看出, 相同构件失效概率 p_{fc} 时并联系统 III 和 IV 的失效概率明显小于并联系统 I 和 II 的失效概率。此外, 式(14)和式(15)都表明并联系统失效概率具有较宽的上下限, 这为不完备概率信息条件下 Copula 函数类型对结构系统可靠度的影响规律研究提供了有利的条件。

3 并联系统失效概率分析

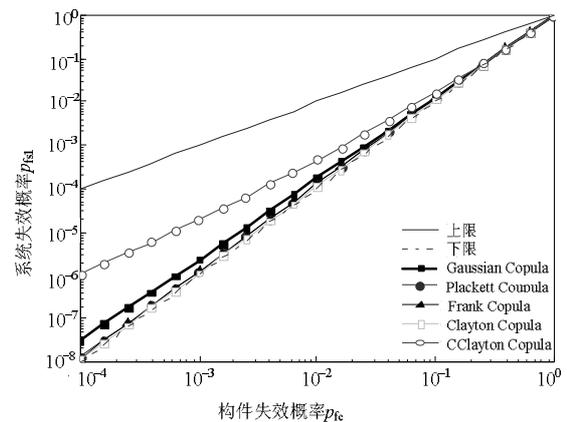
采用式(13)可得不同 Copula 函数对应的并联系统 I、II、III、IV 的失效概率。由于两构件失效概率相等且所选 5 种 Copula 函数都关于变量取值空间的 45° 对角线平面对称, 从而导致并联系统 III 和 IV 计算的失效概率相同。因此, 下面仅分析并联系统 I、II、III 的失效概率结果。

3.1 并联系统 I

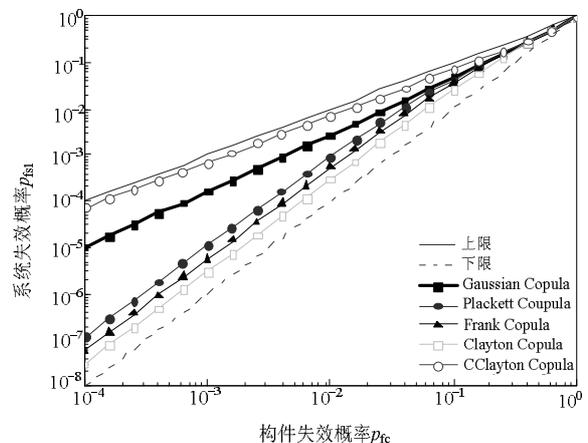
图 2 给出了并联系统 I 的失效概率随构件失效概率变化曲线。由于构件功能函数间正相关, 系统失效概率的上下限由式(14)计算, 如构件失效概率为 10^{-4} 时系统失效概率的上下限分别为 10^{-4} 和 10^{-8} 。可以看出, 不同 Copula 函数计算的系统失效概率存在明显的差别, 这说明不完备概率信息条件下系统失效概率具有不唯一性。当相关系数较小时, 不同 Copula 函数计算的失效概率集中于系统失效概率下限值附近, 当相关系数增大时, 不同 Copula 函数计算的失效概率则逐渐向系统失效概率上限值靠近。然而, 不管构件失效概率和变量间相关系数如何变化, 不同 Copula 函数计算的失效概率都处于系统失效概率的上下限之内。此外, 不同 Copula 函数计算的失效概率间差别随构件失效概率的减小而增大。以 $t=0.5$ 为例, 当构件失效概率从 1 减小到 10^{-4} 时, Clayton、Frank、Plackett、Gaussian 和 CClayton Copula 函数计算的失效概率与系统失效概率下限值的比值都从 1 分别增大到了 3.00、5.75、11.38、 1.03×10^3 和 7.07×10^3 。

图 3 给出了不同 Copula 函数计算的并联系统 I 失效概率随相关系数变化关系。图 3 中构件失效概率为 10^{-4} 。可以看出, 不同 Copula 函数计算的失效

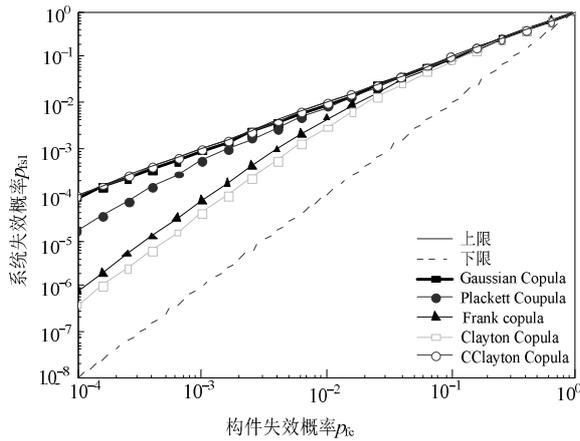
概率随相关系数的增加而增大。当 t 趋于 0 时, 不同 Copula 函数计算的失效概率等于系统失效概率的下限值 10^{-8} ; 而当 t 趋于 1 时, 不同 Copula 函数计算的失效概率收敛于系统失效概率的上限值 10^{-4} 。对于所选 5 种 Copula 函数来说, Clayton Copula 函数的失效概率最小, 其次为 Frank、Plackett 和 Gaussian Copula 函数, 而 CClayton Copula 函数的失效概率最大。可见 Copula 函数的尾部相关性对系统失效概率具有重要的影响。当系统失效区域位于 Copula 函数尾部时, 计算的失效概率明显比没有尾部相关性的 Copula 函数的失效概率大。图 4 为其他 Copula 函数计算的失效概率与 Gaussian Copula 函数失效概率的比值 r_1 。可以看出, r_1 随相关系数的增大先增大后减小。当相关系数趋于 0 和 1 时, r_1 等于 1, 此时其他 Copula 函数计算的失效概率与 Gaussian Copula 函数的失效概率相等。可见其他 Copula 函数计算的失效概率与 Gaussian Copula 函数失效概率间差别存在一极大值, 该差别并不是随着相关系数的增大而单调增加。



(a) $t=0.05$



(b) $t=0.50$



(c) $\tau = 0.95$

图2 不同 Copula 函数计算的并联系统 I 失效概率

Fig.2 Probabilities of failure produced by different copulas for parallel system I

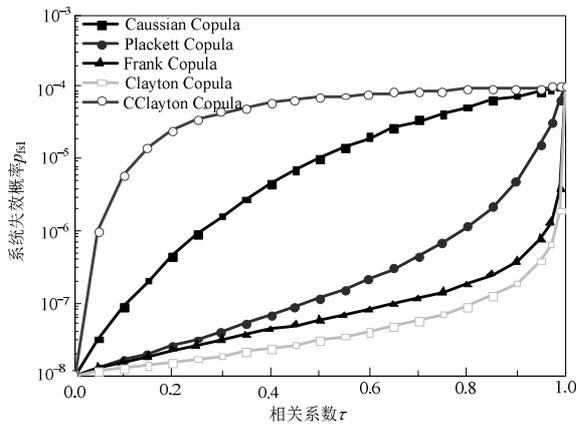


图3 相关系数对并联系统 I 失效概率的影响

Fig.3 Effect of τ on probabilities of failure associated with different copulas for parallel system I

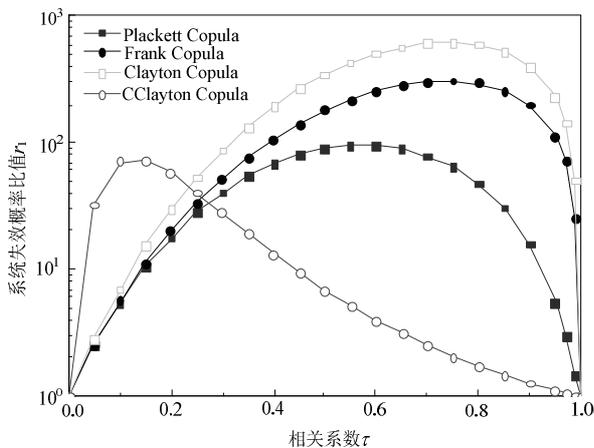


图4 并联系统 I 时不同 Copula 函数失效概率的比较

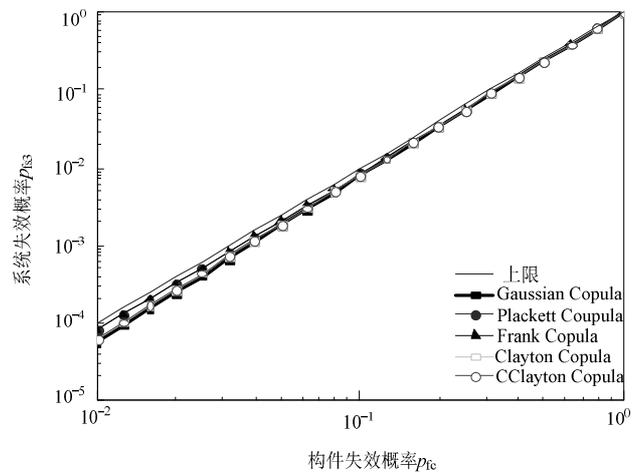
Fig.4 Comparison of probabilities of failure associated with different copulas for parallel system I

3.2 并联系统 II

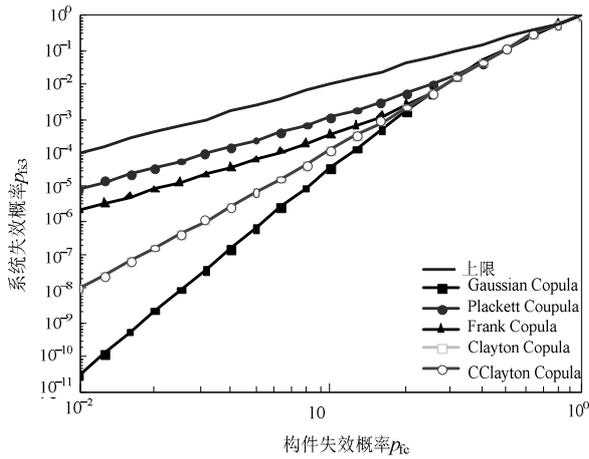
由于 Gaussian、Plackett 和 Frank Copula 函数都关于变量取值空间的 45° 和 135° 对角线平面对称，由它们计算的并联系统 II 失效概率与并联系统 I 相同。而 Clayton 和 CClayton Copula 函数只关于变量取值空间的 45° 对角线平面对称，且两者互为生存 Copula 函数，因此两者计算的并联系统 II 失效概率与并联系统 I 失效概率互相调换位置。简单起见，这里不再列出并联系统 II 的失效概率结果。

3.3 并联系统 III

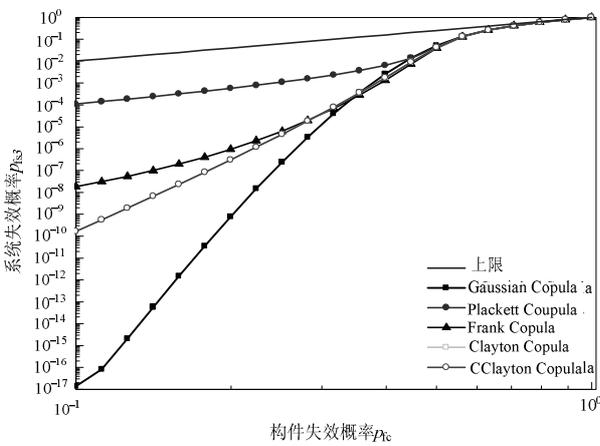
为了反映并联系统 III 对系统可靠度的影响，图 5 给出了并联系统 III 的失效概率随构件失效概率变化曲线。由于构件功能函数间负相关，系统失效概率的上下限采用式(15)计算，此时系统失效概率小于两构件失效概率的乘积。与并联系统 I 和 II 不同的是，并联系统 III 的失效概率对构件失效概率和相关系数的变化更加敏感，相同构件失效概率和相关系数时并联系统 III 的失效概率远远小于并联系统 I 和 II 的失效概率。为了保证计算精度，图 5(c)只给出了 $\tau=0.8$ 的结果。此外，由于 Clayton Copula 函数与 CClayton Copula 函数互为生存 Copula 函数，因此两者计算的失效概率相同。与并联系统 I 和 II 相同的是，不同 Copula 函数计算的失效概率具有非常明显的差别，这种差别随构件失效概率的减小而增大。不同 Copula 函数计算的失效概率随着相关系数的增大逐渐由系统失效概率的上限值向下限值靠近，不同 Copula 函数计算的失效概率亦处于系统失效概率的上下限之内。



(a) $\tau = 0.05$



(b) $\tau = 0.50$



(c) $\tau = 0.80$

图5 不同 Copula 函数计算的并联系统 III 失效概率

Fig.5 Probabilities of failure produced by different copulas for parallel system III

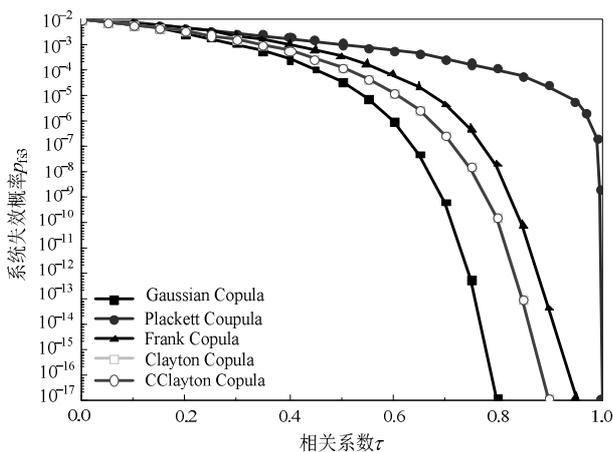


图6 相关系数对并联系统 III 失效概率的影响

Fig.6 Effect of τ on probabilities of failure associated with different copulas for parallel system III

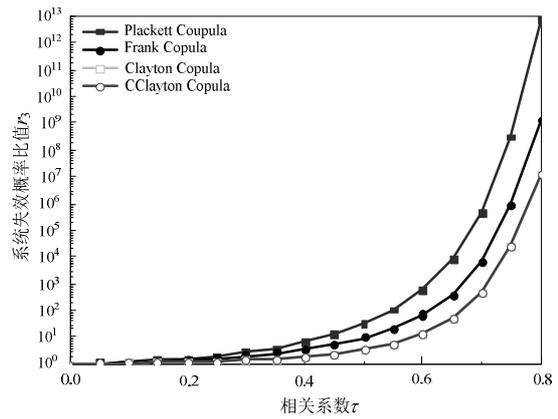


图7 并联系统 III 时不同 Copula 函数失效概率的比较
Fig.7 Comparison of probabilities of failure associated with different copulas for parallel system III

图 6 给出了构件失效概率为 0.1 时不同 Copula 计算的失效概率随相关系数变化关系。与并联系统 I 和 II 的结果相反，系统失效概率随相关系数的增大而降低，尤其是当相关系数大于 0.6 时。当 τ 趋近于 0 时，不同 Copula 函数计算的失效概率等于系统失效概率的上限值 10^{-2} ；而当 τ 趋近于 1 时，不同 Copula 函数计算的失效概率收敛于系统失效概率的下限值 0。同理，图 7 为其他 Copula 函数计算的失效概率与 Gaussian Copula 函数失效概率的比值 r_3 。由于计算机程序所能计算的失效概率最小值为 10^{-17} ，图中仅给出了相关系数最大为 0.8 的结果。可以看出，在该相关系数取值范围内， r_3 随相关系数的增大而增大，其他 Copula 函数计算的失效概率与 Gaussian Copula 函数失效概率间差别亦随相关系数的增大而增加。理论上说，当相关系数趋于 1 时，其他 Copula 函数与 Gaussian Copula 函数没有差别，相应的比值 r_3 亦收敛于 1。

3.4 讨论

由上述结果可以看出，不完备概率信息条件下系统失效概率不唯一，且不同 Copula 函数计算的系统失效概率存在明显的差别。因此，实际工程系统可靠度分析应该收集足够多的结构参数试验数据，从而采用 AIC 准则或 BIC 准则^[4]识别出拟合数据间相关结构最优的 Copula 函数，然后基于最优的 Copula 函数建立结构参数的联合概率分布函数进行可靠度分析，而不能为了计算简便盲目采用 Gaussian Copula 函数描述参数间的相关性。此外，无论构件失效概率和变量间相关系数如何变化，不同 Copula 函数计算的失效概率都位于系统失效概

率的上下限之内。因此,系统失效概率的上下限囊括了变量间不同相关结构对系统失效概率的影响。上述结论可由系统失效概率上下限的定义以及 Copula 函数的相关性质进行解释。当构件功能函数完全独立时,系统的失效概率等于两构件失效概率的乘积;当构件功能函数完全正相关时,系统的失效概率等于单个构件失效概率;而当构件功能函数完全负相关时,系统的失效概率则等于 0。可见系统失效概率的上下限是基于变量间相关系数趋于 0 和 1 得到的。由 Copula 理论可知,变量间相关系数趋于 0 时除少数 Copula 如 t 和 No.16 Copula 函数外,几乎大部分 Copula 函数都收敛于独立 Copula 函数,本文所选 5 种 Copula 就是这种类型的 Copula 函数。因此,变量间相关系数趋于 0 时不同 Copula 函数计算的失效概率都等于两构件失效概率的乘积。而当变量间相关系数趋于 1 时,不同 Copula 函数的等概率密度线都趋于变量取值空间的 45° 对角线,不同 Copula 函数间的差别逐渐减小,相应的失效概率趋于相同的数值。对于本文研究的并联系统 I 和 II 来说,该数值为单个构件的失效概率;而对于并联系统 III 和 IV 来说,该数值为 0。此外,随着构件失效概率的减小系统失效概率上下限的比值逐渐增大,不同 Copula 函数计算的失效概率间差别亦逐渐增加,即不同 Copula 函数失效概率间差别与系统失效概率上下限的比值成正比。综上所述,可以将系统失效概率上下限的比值作为定量评判变量间相关结构对系统失效概率影响大小的指标。

4 结论

本文介绍了变量联合概率分布函数构造的 Copula 函数方法,提出了并联系统失效概率计算方法,并推导了相应的计算公式,以并联系统可靠度问题为例研究了 Copula 函数的类型对结构系统可靠度的影响规律。主要结论如下:

(1) 基于变量的边缘分布函数和相关系数不能唯一确定变量的联合概率分布函数,它进一步导致了结构系统可靠度具有不唯一性。表征变量间相关性的 Copula 函数类型对结构系统可靠度具有重要的影响,不同 Copula 函数计算的系统失效概率存在非常明显的差别,这种差别随构件失效概率的减小而增大。

(2) 对于并联系统 I 和 II 来说, Copula 函数的尾部相关性对结构系统可靠度具有明显的影响。当

系统失效区域位于 Copula 函数尾部时,计算的失效概率明显比没有尾部相关性的 Copula 函数的失效概率大。不同 Copula 函数计算的失效概率随相关系数的增大而增大,其他 Copula 函数与 Gaussian Copula 函数失效概率间差别随相关系数的增大先增大后减小。

(3) 对于并联系统 III 和 IV 来说, Copula 函数的尾部相关性不会对结构系统可靠度产生明显的影响。不同 Copula 函数计算的失效概率随相关系数的增大而降低,尤其是当变量间强相关性时,系统失效概率将急剧降低为 0。当相关系数小于 0.8 时,其他 Copula 函数与 Gaussian Copula 函数计算的失效概率间差别随相关系数的增大而增大。

(4) 无论构件失效概率和变量间相关系数如何变化,本文所选 Copula 函数计算的失效概率都位于系统失效概率的上下限内。不同 Copula 函数计算的失效概率间差别与系统失效概率上下限比值成正比,可将系统失效概率上下限比值作为定量评判变量间相关结构对系统失效概率影响大小的指标。

参考文献:

- [1] Goda K. Statistical modeling of joint probability distribution using copula: Application to peak and permanent displacement seismic demands [J]. *Structural Safety*, 2010, 32(2): 112—123.
- [2] Leira B J. Probabilistic assessment of weld fatigue damage for a nonlinear combination of correlated stress components [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2011, 26(3): 492—500.
- [3] Tang X S, Li D Q, Chen Y F, et al. Improved knowledge-based clustered partitioning approach and its application to slope reliability analysis [J]. *Computers and Geotechnics*, 2012, 45: 34—43.
- [4] Li D Q, Tang X S, Phoon K K, et al. Bivariate simulation using copula and its application to probabilistic pile settlement analysis [J]. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 2013, 37(6): 597—617.
- [5] Der Kiureghian A, Liu P L. Structural reliability under incomplete probability information [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1986, 112(1): 85—104.
- [6] Ang A H-S, Tang W H. *Probability concepts in engineering: Emphasis on applications to civil and environmental engineering* [M]. New York: John Wiley and Sons, 2007: 138—140.
- [7] 吴帅兵,李典庆,周创兵. 二维联合分布函数构造方法及其对结构可靠度的影响分析[J]. *工程力学*, 2012, 29(7): 69—74.

- Wu Shuaibing, Li Dianqing, Zhou Chuangbing. Bivariate construction methods and its effect on structural reliability [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(7): 69—74. (in Chinese)
- [8] 吴帅兵, 李典庆, 周创兵. 联合分布函数蒙特卡罗模拟及结构可靠度分析[J]. *工程力学*, 2012, 29(9): 68—74.
- Wu Shuaibing, Li Dianqing, Zhou Chuangbing. Monte Carlo simulation of multivariate distribution and its application to structural reliability analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(9): 68—74. (in Chinese)
- [9] 李典庆, 吴帅兵, 周创兵, 等. 二维联合概率密度函数构造方法及结构并联系统可靠度分析[J]. *工程力学*, 2013, 30(3): 37—45.
- Li Dianqing, Wu Shuaibing, Zhou Chuangbing, et al. Bivariate distribution construction method and its application to structural parallel system reliability analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(3): 37—45. (in Chinese)
- [10] 吴帅兵, 李典庆, 周创兵. 结构可靠度分析中变量相关时三种变换方法的比较[J]. *工程力学*, 2011, 28(5): 41—48.
- Wu Shuaibing, Li Dianqing, Zhou Chuangbing. Comparison among three transformation methods for structural reliability analysis with correlated variables [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(5): 41—48. (in Chinese)
- [11] Lebrun R, Dutfoy A. A generalization of the Nataf transformation to distributions with elliptical copula [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24(2): 172—178.
- [12] Lebrun R, Dutfoy A. An innovating analysis of the Nataf transformation from the copula viewpoint [J]. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 2009, 24(3): 312—320.
- [13] Nelsen R B. An introduction to Copulas [M]. New York: Springer, 2006: 214—216.
- [14] Cherubini U, Luciano E, Vecchiato W. Copula methods in finance [M]. Chichester: John Wiley and Sons, 2004: 49—93.
- [15] Ghosh S. Modelling bivariate rainfall distribution and generating bivariate correlated rainfall data in neighbouring meteorological subdivisions using copula [J]. *Hydrological Processes*, 2010, 24(24): 3558—3567.
- [16] 唐小松, 李典庆, 周创兵, 等. 联合分布函数构造的 Copula 函数方法及结构可靠度分析[J]. *工程力学*, 2013, 30(12): 8—17, 42.
- Tang Xiaosong, Li Dianqing, Zhou Chuangbing, et al. Modeling bivariate distribution using copulas and its application to component reliability analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2013, 30(12): 8—17, 42. (in Chinese)
- [17] Sklar A. Fonctions de répartition à dimensions et leurs marges [J]. *Publications de l'Institut de Statistique de l'Université de Paris*, 1959, 8: 229—231.