

文章编号: 1000-4750(2014)08-0014-10

有限元实时耦联动力试验的时滞稳定性研究

周孟夏¹, 王进廷¹, 迟福东², 桂耀¹, 金峰¹

(1. 清华大学水沙科学与水利水电工程国家重点实验室, 北京 100084; 2. 华能澜沧江水电有限公司, 昆明 650214)

摘 要: 该文针对数值子结构使用有限元模型的实时耦联动力试验(FE-RTDHT)系统, 建立了考虑加载体系时滞及其补偿的动力分析模型。采用根轨迹方法, 进行了 FE-RTDHT 算例的时滞稳定特性分析, 并对稳定性分析结果进行了数值仿真验证。研究表明: 时滞明显改变了 FE-RTDHT 系统固有模态的动力特性, 使得试验子结构质量必须小于某一临界值才能保证试验系统的稳定; 三阶多项式预测补偿可以明显改善系统固有模态的动力特性, 但是对系统稳定性的影响与系统失稳机理相关。

关键词: 结构试验技术; 实时耦联动力试验; 有限元; 时滞; 稳定性; 根轨迹方法

中图分类号: TU317; O327 文献标志码: A doi: 10.6052/j.issn.1000-4750.2013.03.0210

STABILITY ANALYSIS OF THE REAL-TIME DYNAMIC HYBRID TESTING WITH FINITE-ELEMENT BASED NUMERICAL SUBSTRUCTURE

ZHOU Meng-xia¹, WANG Jin-ting¹, CHI Fu-dong², GUI Yao¹, JIN Feng¹

(1. State Key Laboratory of Hydrosience and Hydraulic Engineering, Tsinghua University, Beijing 100084, China

2. Huaneng Lancang River Hydropower Co., Ltd, Kunming 650214, China)

Abstract: A dynamic analysis model considering actuator response delay and compensation strategy is established for a real-time dynamic hybrid testing system with finite-elements based numerical substructure. The delay-dependent stability conditions of several examples are investigated using the root locus technique and further verified by numerical simulations. The results show that the delay obviously affects the performance of inherent modes. A test can be guaranteed to be stable only if the mass of the physical substructure is smaller than the critical value. The third-order polynomial prediction compensation may significantly improve the performance of inherent modes, but its influence on the system stability conditions is related to the instability mechanism.

Key words: seismic testing; real-time dynamic hybrid testing; finite element; delay; stability; root locus technique

实时耦联动力试验(Real-Time Dynamic Hybrid Testing, RTDHT)是一种全新的结构动力试验方法^[1-3]。它基于子结构试验概念, 将研究对象拆分为两部分, 其中本构关系复杂的部分作为试验子结构进行试验加载, 其余部分作为数值子结构采用计算机模拟。两个子结构之间通过实时数据交换, 以

同时满足交界面力平衡和变形协调, 从而分析整体结构的动力响应。由于 RTDHT 可以大大减小试验模型规模, 有利于进行大比尺甚至足尺试验, 同时能有效考虑试验结构所使用材料的率相关效应, 因而具有独特的优越性和良好的发展前景。

RTDHT 一般采用液压伺服作动器或振动台作

收稿日期: 2013-03-15; 修改日期: 2013-08-23

基金项目: 国家自然科学基金项目(51179093, 41274106); 教育部“新世纪优秀人才支持计划”项目(NCET-10-0531)

通讯作者: 金峰(1966—), 男, 贵州人, 教授, 博士, 博导, 从事水工结构及防震减灾方面的科研与教学工作(E-mail: jinfeng@tsinghua.edu.cn).

作者简介: 周孟夏(1984—), 男, 重庆人, 工程师, 博士, 从事水利水电工程建设方面的技术工作(E-mail: zhoulengxia@gmail.com);

王进廷(1973—), 男, 山西人, 教授, 博士, 从事结构抗震及动力试验方面的科研与教学工作(E-mail: wangjt@tsinghua.edu.cn);

迟福东(1982—), 男, 云南人, 高工, 博士, 从事水电能源科技管理及科技研发工作(E-mail: chifudong@gmail.com);

桂耀(1986—), 男, 湖北人, 博士生, 从事结构动力试验方面的科研工作(E-mail: guiy08@mails.tsinghua.edu.cn).

为加载体系，不可避免地存在时滞问题。Horiuchi 等^[2]最早采用能量平衡法进行分析，表明时滞相当于给系统增加一个负阻尼。此后，吴斌等^[3]采用谱半径方法，Wallace 等^[4]通过分析时滞微分方程，Chen 等^[5]采用离散传递函数模型，Mercan 等^[6]结合拟时滞技术和劳斯稳定判据，分别对单自由度 RTDHT 的稳定特性和失稳条件进行了研究。Mercan 等^[7]还研究了考虑多源时滞的若干两自由度和三自由度算例的稳定性。迟福东等^[8-11]建立了考虑时滞及其补偿的 RTDHT 动力分析模型，采用根轨迹方法分别研究了时滞对单自由度、多自由度和数值子结构为集总参数模型模拟的无限地基的 RTDHT 稳定性的影响，得到了 RTDHT 的时滞稳定条件，并研究了三阶多项式预测补偿的效果。

上述研究都是针对一些简单的数值子结构问题。近年来，RTDHT 逐渐从只能使用单自由度的数值子结构，发展为可以使用较为复杂的数值子结构模拟复杂工程问题^[12-16]。2012 年，Chen 等^[17]、Saouma 等^[18]、Wang 等^[19]分别将有限元程序引入了 RTDHT 的数值子结构中，发展了有限元实时耦联动力试验(FE-RTDHT)方法，极大地提高了 RTDHT 解决实际工程问题的能力。而目前尚未见到对于 FE-RTDHT 时滞稳定性的研究成果。

已有的一系列 RTDHT 时滞稳定性研究成果表明，对于不同物理模型的 RTDHT 试验，其时滞稳定特性有很大差别，不能简单的互相套用。因此，对于 FE-RTDHT 的时滞稳定特性需要进行专门研究。本文首先建立了考虑加载系统时滞及其补偿的 FE-RTDHT 动力分析模型；在此基础上，采用根轨迹方法研究了 FE-RTDHT 系统的时滞稳定性及三阶多项式补偿对稳定性的影响；最后，利用 Simulink 数值仿真对稳定性分析结果进行了验证。

1 动力分析模型的建立

1.1 FE-RTDHT 系统的运动方程

考虑如图 1 所示的 FE-RTDHT 整体系统。上部结构为刚架结构，作为 FE-RTDHT 的试验子结构，以弹簧-质量-阻尼体系表示。下部为有限元模拟的地基模型，作为 FE-RTDHT 的数值子结构，与上部结构通过一个结点相连接。RTDHT 的具体试验方法和流程可参考文献[15,19]。

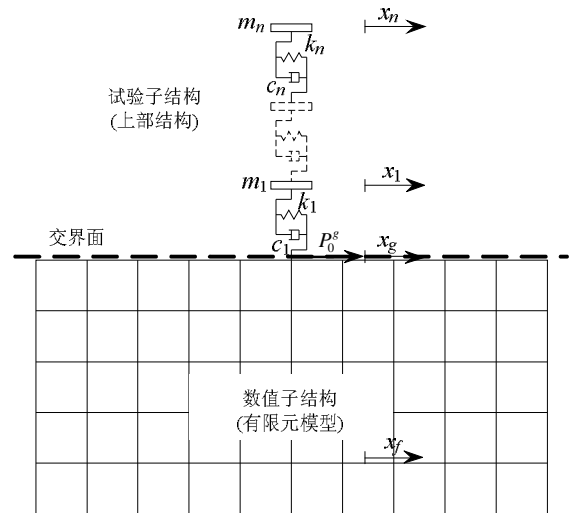


图 1 FE-RTDHT 系统整体模型
Fig.1 Integral model of FE-RTDHT system

FE-RTDHT 整体模型的运动方程为：

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f_{eff} \quad (1)$$

式中： M 、 C 、 K 分别为整体系统的质量、阻尼和刚度矩阵； $x = \{x_f, x_g, x_1, \dots, x_n\}^T$ 为整体系统各自由度位移向量(绝对位移)； $f_{eff} = \{0, P_0^s, 0, \dots, 0\}^T$ 为等效荷载， P_0^s 为有效驱动力。

将物理子结构的质量、阻尼、刚度分别记为 m_i 、 c_i 、 k_i ($i=1, \dots, n$)，数值子结构有限元模型的质量、阻尼、刚度矩阵分别记为：

$$\begin{aligned} M_{FE} &= \begin{bmatrix} M_f & M_{fg} \\ M_{fg}^T & M_g \end{bmatrix} \\ C_{FE} &= \begin{bmatrix} C_f & C_{fg} \\ C_{fg}^T & C_g \end{bmatrix} \\ K_{FE} &= \begin{bmatrix} K_f & K_{fg} \\ K_{fg}^T & K_g \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2)$$

各矩阵元素中，下标 f 表示有限元模型中不与上部结构相连接的结点自由度，下标 g 表示两个子结构交界面的自由度，下标 fg 表示二者的交叉项。则整体系统质量、阻尼、刚度矩阵可以分别表示为：

$$M = \begin{bmatrix} M_f & M_{fg} & & & & & \\ M_{fg}^T & M_g & & & & & \\ & & m_1 & & & & \\ & & & O & & & \\ & & & & m_{n-1} & & \\ & & & & & m_n & \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{fg} & & & & \\ \mathbf{C}_{fg}^T & \mathbf{C}_g + \boxed{c_1} & -c_1 & & & \\ & \boxed{-c_1} & c_1 + c_2 & -c_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ & & & & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{K}_{fg} & & & & \\ \mathbf{K}_{fg}^T & \mathbf{K}_g + \boxed{k_1} & -k_1 & & & \\ & \boxed{-k_1} & k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (5)$$

式中, 加“ $\boxed{\quad}$ ”的元素为与两个子结构界面自由度对应的阻尼矩阵系数和刚度矩阵系数, 这些系数与计算两个子结构之间的相互作用力相关。

由于时滞的影响, 加载使用的作动器或振动台难以在瞬时达到数值子结构计算得到的目标位移 x_g , 将实际达到的位移量记为 x_g'' 。由于两个子结构之间的相互作用力与界面处的位移值相关, 界面处的实际达到的位移与数值计算得到的 FE-RTDHT 整体系统准确值之间的误差也将使得两个子结构间的相互作用力与准确值存在误差。因此, 计算界面相互作用力时也需要将 x_g 替换为 x_g'' 。

按照是否与计算两个子结构相互作用力相关, 将阻尼矩阵和刚度矩阵拆分为两部分:

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_f & \mathbf{C}_{fg} & & & & \\ \mathbf{C}_{fg}^T & \mathbf{C}_g & -c_1 & & & \\ & 0 & c_1 + c_2 & -c_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & -c_{n-1} & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ & & & & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & c_1 & 0 & & & \\ & -c_1 & 0 & 0 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{K}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_f & \mathbf{K}_{fg} & & & & \\ \mathbf{K}_{fg}^T & \mathbf{K}_g & -k_1 & & & \\ & 0 & k_1 + k_2 & -k_2 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & -k_{n-1} & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ & & & & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\mathbf{K}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & & & & \\ 0 & k_1 & 0 & & & \\ & -k_1 & 0 & 0 & & \\ & & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

则考虑了时滞影响的 FE-RTDHT 整体系统运动方程变为:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_1\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_2\dot{\mathbf{x}}'' + \mathbf{K}_1\mathbf{x} + \mathbf{K}_2\mathbf{x}'' = \mathbf{f}_{\text{eff}} \quad (10)$$

其中, $\mathbf{x}'' = \{x_f'', x_g'', x_1'', \mathbf{L}, x_n''\}^T$, 为在加载体系时滞影响下各自由度的实际位移(绝对位移)。矩阵运算中, \mathbf{C}_2 和 \mathbf{K}_2 除了与 x_g'' 相乘的元素外其余元素均为 0, 因此, 其他位移变量不参与计算, 无需进行专门求解。

设 x_g 与 x_g'' 之间的传递函数为 H , 将 H 记为位移传递函数。并设 \mathbf{x} 和 \mathbf{x}'' 的 Laplace 变换分别为 $\mathbf{X}(s)$ 和 $\mathbf{X}''(s)$ 。由于其他位移变量不参与计算, 则有 $\mathbf{X}''(s) = H\mathbf{X}(s)$ 。同时设等效荷载 \mathbf{f}_{eff} 的 Laplace 变换为 $\mathbf{F}(s)$ 。对式(10)进行 Laplace 变换得:

$$[s^2\mathbf{M} + s(\mathbf{C}_1 + H\mathbf{C}_2) + (\mathbf{K}_1 + H\mathbf{K}_2)]\mathbf{X}(s) = \mathbf{F}(s) \quad (11)$$

FE-RTDHT 整体系统的传递函数为:

$$\frac{\mathbf{F}(s)}{\mathbf{X}(s)} = \frac{1}{s^2\mathbf{M} + s(\mathbf{C}_1 + H\mathbf{C}_2) + (\mathbf{K}_1 + H\mathbf{K}_2)} \quad (12)$$

其中:

$$\det[s^2\mathbf{M} + s(\mathbf{C}_1 + H\mathbf{C}_2) + (\mathbf{K}_1 + H\mathbf{K}_2)] = 0 \quad (13)$$

即为 FE-RTDHT 整体系统传递函数的特征方程。

1.2 位移传递函数 H 的确定

在无时滞时, 作动器或振动台实际达到的位移量 x_g'' 就是目标位移 x_g , 因此位移传递函数 H 为:

$$H = 1 \quad (14)$$

当只考虑系统时滞, 不考虑补偿时, 将作动器或振动台视为一个纯时滞体系, 则其实际达到的位移量 x_g'' 和目标位移 x_g 之间的关系为:

$$x_g'' = x_g(t-t) \quad (15)$$

式中, t 为振动台或作动器的时滞。对式(15)进行 Laplace 变换, 得:

$$X_g''(s) = e^{-ts} X_g(s) \quad (16)$$

在只考虑系统时滞的情况下, 位移传递函数 H 为:

$$H = e^{-ts} \quad (17)$$

当使用三阶多项式预测补偿方法^[20]对系统时滞进行补偿时, 根据补偿算法, 在计算时刻 t , 考虑系统迟滞时间 t , 则 $t+t$ 时刻的预测位移 x_g' 为:

$$x_g' = \sum_{i=0}^3 a_i x_g(t-it) \quad (18)$$

式中, 预测系数 a_i 的值为: $a_0 = 4$, $a_1 = -6$, $a_2 = 4$, $a_3 = -1$ 。

再考虑迟滞影响, 则作动器或振动台实际达到的位移为:

$$x_g'' = \sum_{i=0}^3 a_i x_g[t-(i+1)t] \quad (19)$$

对式(19)进行 Laplace 变换, 可得到使用三阶多项式预测补偿方法对系统时滞进行补偿情况下, 位移传递函数 H 为:

$$H = \sum_{i=0}^3 a_i e^{-(i+1)ts} \quad (20)$$

1.3 根轨迹分析方法

根轨迹分析方法^[21]是研究控制系统稳定性的常用方法, 其研究对象是系统传递函数的特征方程。

首先将 FE-RTDHT 整体系统传递函数的特征方程式(13)改写为根轨迹形式:

$$1+q \frac{\text{num}(s)}{\text{den}(s)} = 0 \quad (21)$$

其中: q 为进行稳定性分析时的变化参数, $q > 0$; $\text{num}(s)$ 和 $\text{den}(s)$ 均为 Laplace 算子 s 的多项式, 是质量矩阵 \mathbf{M} 、阻尼矩阵 \mathbf{C}_1 和 \mathbf{C}_2 、刚度矩阵 \mathbf{K}_1 和 \mathbf{K}_2 、位移传递函数 H 等的函数。

然后分别计算出参数 q 从零增加到正无穷大的过程中根轨迹方程式(21)的所有特征根, 并在复平面内将其画出, 每一个特征根随着参数 q 的变化轨迹称为一个根轨迹分支。

根据控制理论, 所有的根轨迹分支都出发于开环极点 ($q=0$), 终止于开环零点或无穷远处 ($q=+\infty$); 根轨迹分支总是以共轭的形式成对出

现, 每一条共轭的根轨迹分支对应控制系统的—个模态; 同时, 根轨迹分支上的点到原点的距离等于相应模态的无阻尼自振频率, 低阻尼情况下根轨迹上的点与原点的连线和负实轴夹角的余弦等于相应模态的阻尼比。控制系统稳定的充要条件是特征根位于复平面的左半平面。因此, 分析根轨迹分支穿越虚轴的过程即可得到系统稳定的临界参数 q , 还可以得到失稳频率。

在位移传递函数 H 中, 迟滞项经过 Laplace 变换后含有指数项 e^{-ts} , 在根轨迹方程中需对其进行近似处理改写为多项式形式。本文采用 Padé 逼近方法^[21]处理:

$$e^{-ts} = \frac{\sum_{i=0}^p \frac{(p+q-i)!p!}{(p+q)!i!(p-i)!} (-ts)^i}{\sum_{i=0}^q \frac{(p+q-i)!q!}{(p+q)!i!(q-i)!} (ts)^i} \quad (22)$$

研究表明, 取逼近阶次 $p=q=9$ 时, 可以很好的兼顾逼近算法的精度、收敛性和计算效率; 同时, 使用 Padé 逼近处理时滞项在整个复平面都有较高的精度, 还可以根据各阶模态的根轨迹形状判断时滞和三阶多项式预测补偿方法对系统动力特性的影响。

2 稳定性分析实例

本文使用 Matlab^[22]提供的根轨迹分析功能求解根轨迹方程。由于计算时需要运用符号运算工具箱求解矩阵行列式, 计算量非常大。综合计算效率的考虑, 本文研究中, FE-RTDHT 系统的数值子结构有限元模型取 9 结点, 试验子结构取 1 层。

2.1 分析算例 1

取试验子结构的质量 m 为变化参数 q , 分析试验子结构的质量对 FE-RTDHT 系统稳定性的影响。FE-RTDHT 系统的其他参数取为: 数值子结构有限元地基模型为 $20\text{m} \times 10\text{m}$ 区域的平面应力网格, 弹性模量 $E = 200\text{MPa}$, 泊松比 $\mu = 0.2$, 密度 $\rho = 2000\text{kg/m}^3$; 试验子结构频率 $f = 4.6\text{Hz}$, 圆频率 $\omega = 2\pi f = 28.9\text{rad/s}$, 阻尼比 $\zeta = 5\%$; 取模型的质量相似比尺 $c_m = 10^4$, 频率相似比尺 $c_f = 1$, 阻尼比相似比尺 $c_x = 1$, 加速度相似比尺 $c_a = 1$; 系统时滞 $t = 0.01\text{s}$ 。

图 2 分别给出了当试验子结构质量 m 从零变化到无穷大的过程中, 算例系统在无时滞、有时滞无补偿、有时滞和三阶多项式预测补偿情况下的根轨

迹图。由于根轨迹分支是共轭的，这里仅给出复平面的上半平面图。

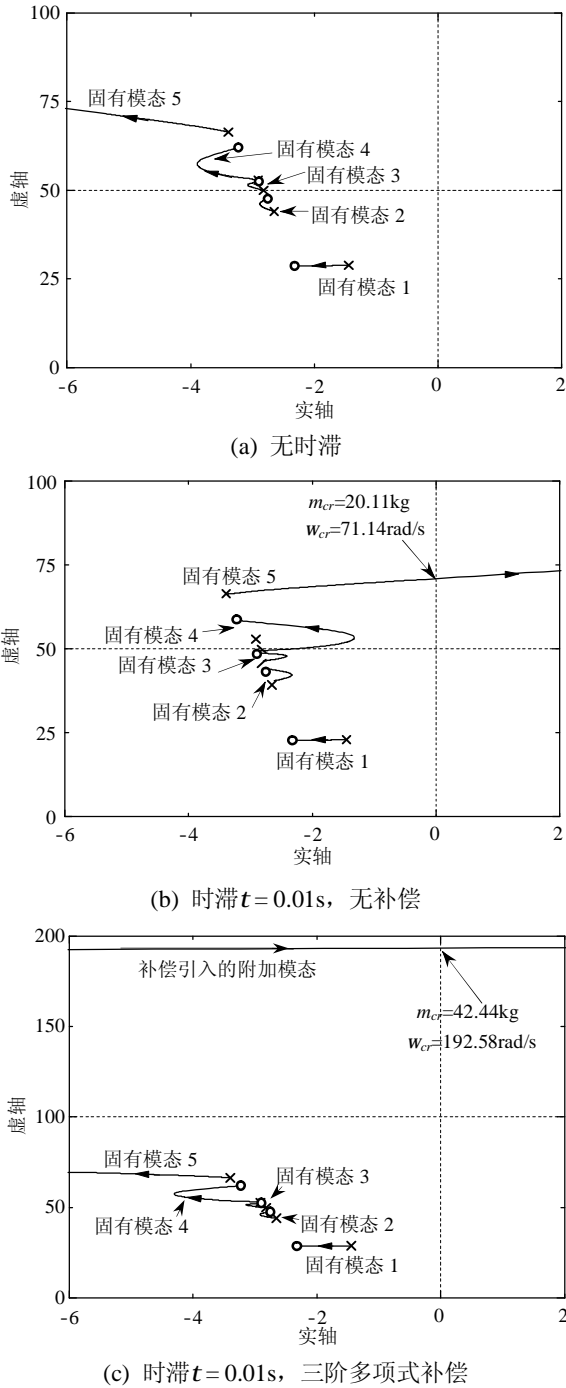


图2 FE-RTDHT系统根轨迹分析算例

Fig.2 Example of root locus plot of FE-RTDHT

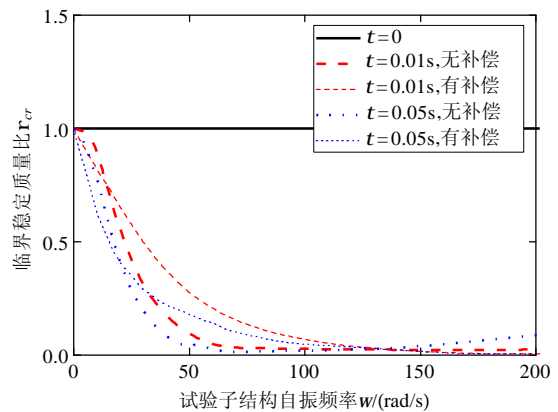
从图 2(a)可以看出，在无时滞的情况下，系统的各阶模态的特征根始终位于复平面的左半平面，系统是无条件稳定的；从图 2(b)可以看出，由于时滞的影响，系统的各阶模态都发生了畸变，其中固有模态5的特征根随着 m 的增大逐渐靠近虚轴并进入右半平面造成系统失稳，临界稳定质量 $m_{cr} =$

20.11kg，失稳频率 $w_{cr} = 71.14\text{rad/s}$ ；从图 2(c)中可以看出，经过三阶多项式预测补偿后，系统的各阶固有模态的根轨迹与无时滞情况下基本相同，都始终位于左半平面，系统的失稳是由补偿算法引入的附加模态引起的，临界稳定质量 $m_{cr} = 42.44\text{kg}$ ，失稳频率 $w_{cr} = 192.58\text{rad/s}$ 。由此可以看出，三阶多项式预测补偿不但可以消除时滞引起系统动力特性的畸变，提高试验精度，同时还能增加系统的失稳临界质量，使得试验中可以使用更大比尺的模型，对试验的稳定性也是非常有利的。

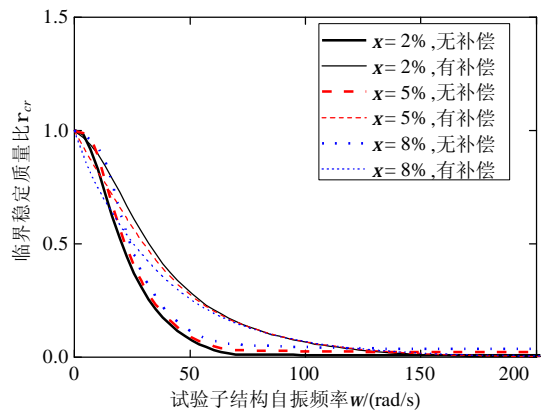
图 3 分别给出 FE-RTDHT 系统其他参数变化时，临界稳定质量 m_{cr} 和试验子结构自振频率 w 之间的关系。由于在系统无条件稳定时，临界稳定质量 m_{cr} 趋于无穷大，为了表述方便，定义系统的临界稳定质量比为：

$$r_{cr} = \frac{m_{cr}}{M_{FE} + m_{cr}} \quad (23)$$

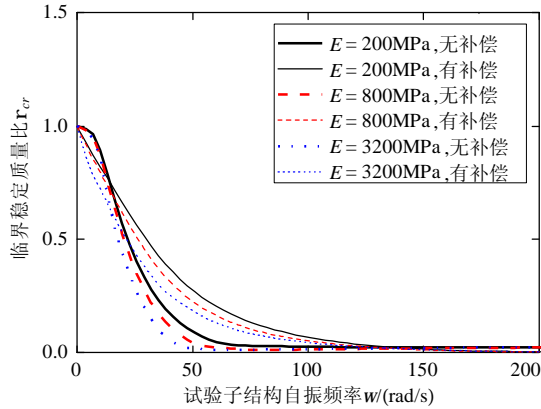
即：将稳定条件表示为试验子结构临界稳定质量占系统总质量的百分比($r_{cr} \in [0,1]$)。 M_{FE} 为数值子结构有限元模型的单元质量。



(a) 不同滞量($x=5\%$, $E=200\text{MPa}$)



(b) 不同试验子结构阻尼比($t=0.01\text{s}$, $E=200\text{MPa}$)



(c) 不同数值子结构弹模($t=0.01s$, $x=5\%$)

图 3 临界稳定质量比随参数变化的影响

Fig.3 Parameter study on critical stability of mass ratio

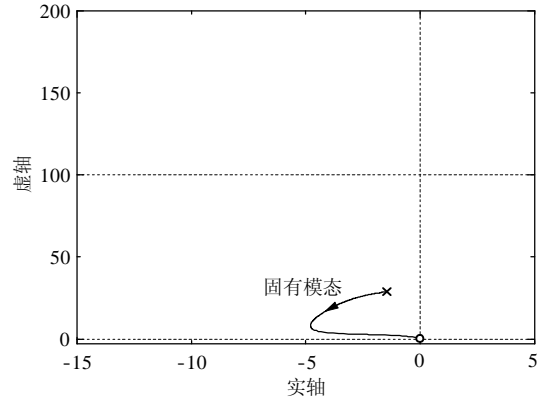
图 3(a)为时滞量不同对临界稳定质量比 r_{cr} 的影响, 可以看出在系统无时滞时临界稳定质量比 r_{cr} 始终为 1, 即系统在无时滞的情况下是无条件稳定的; 总体上看, 其他参数一定时, 临界稳定质量比 r_{cr} 随着时滞量 t 的增大而减小, 说明系统的时滞稳定性随着时滞量的增加而变差。图 3(b)为试验子结构阻尼比不同对临界稳定质量比 r_{cr} 的影响, 在有时滞无补偿的情况下, 系统的稳定性随着试验子结构阻尼比 x 增大略有提高; 在有三阶多项式补偿的情况下, 系统的稳定性随着试验子结构阻尼比 x 增大略有降低; 总体上看, 试验子结构阻尼比 x 对系统稳定性的影响不明显。图 3(c)为数值子结构弹性模量不同对临界稳定质量比 r_{cr} 的影响, 系统的稳定性随着数值子结构模型的弹性模量 E 的增大而降低。同时图 3 还显示出 FE-RTDHT 系统的时滞稳定性的共同规律: 总体上系统的稳定性随着试验子结构自振频率 w 的增大而降低, 同时在结构动力试验常用的中低频段($10rad/s < w < 100rad/s$)内, 三阶多项式补偿能显著提高系统的稳定性。

2.2 分析算例 2

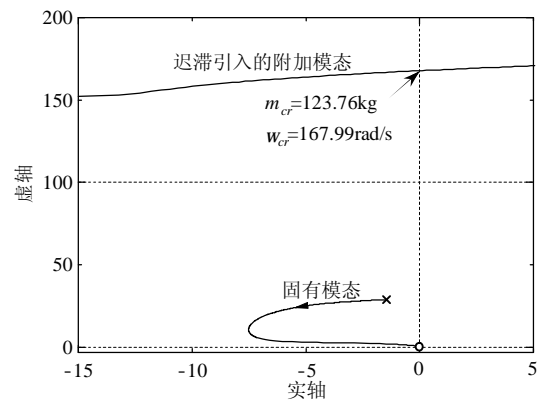
在 2.1 节实例的数值子结构有限元地基模型中增加人工粘弹性边界^[23], 考虑无限地基辐射阻尼的影响, 构建一个考虑结构-地基相互作用(SSD)的 SSI FE-RTDHT 系统。以同样的方法分析试验子结构的质量对 SSI FE-RTDHT 系统稳定性的影响。

图 4 给出了 SSI FE-RTDHT 系统的根轨迹分析结果(仅画出了和判断系统稳定性密切相关的主要模态的根轨迹分支)。在无时滞情况下, 系统各阶模态的特征根始终位于左半平面, 系统是无条件稳定的; 有时滞无补偿的情况下, 系统的各阶固有模态

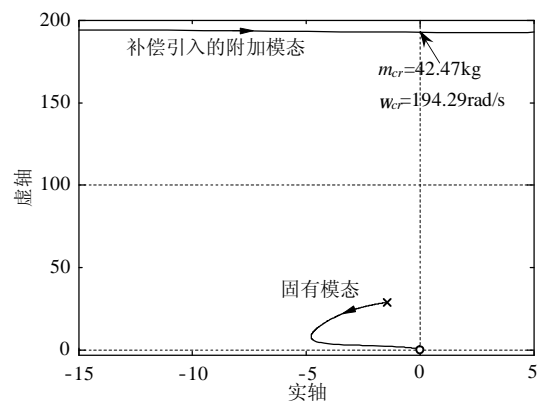
发生畸变, 但是其特征根仍然始终位于左半平面, 固有模态不引起系统失稳, 时滞引入的附加模态的特征根进入右半平面造成系统失稳, 临界稳定质量 $m_{cr} = 123.76kg$, 失稳频率 $w_{cr} = 167.99rad/s$; 引入三阶多项式预测补偿后, 系统的主要固有模态与无时滞时基本相同, 补偿算法引入的附加模态引起系统失稳, 临界稳定质量 $m_{cr} = 42.47kg$, 失稳频率 $w_{cr} = 194.29rad/s$ 。



(a) 无时滞



(b) 时滞 $t=0.01s$, 无补偿



(c) 时滞 $t=0.01s$, 三阶多项式补偿

图 4 SSI FE-RTDHT 系统根轨迹分析算例

Fig.4 Example of root locus plot of SSI FE-RTDHT

从上面的分析结构可以看出, 由于考虑了无限地基的影响, SSI FE-RTDHT 系统的固有模态并不会因为时滞的影响而失稳, 有时滞无补偿时的系统稳定特性要好于普通 FE-RTDHT 系统; 三阶多项式预测补偿会在一定程度上降低 SSI FE-RTDHT 系统的稳定性, 但是可以明显改善系统固有模态的动力特性, 提高试验精度, 因此三阶多项式预测补偿仍然是非常必要的。

图 5 给出了 SSI FE-RTDHT 系统数值子结构地基模型弹性模量 E 变化时, 临界稳定质量 m_{cr} 和试验子结构自振频率 ω 之间的关系。可以看出, 系统的稳定特性与普通 FE-RTDHT 系统是有较大区别的。在有时滞无补偿的情况下, 由于无限地基的影响, 系统的临界稳定质量比 r_{cr} 明显大于普通 FE-RTDHT 系统, 稳定性较好, 并且系统的稳定性随着数值子结构地基模型弹性模量的增大而提高; 三阶多项式补偿在所有频段内都会降低系统的稳定性, 补偿后系统的临界稳定质量比 r_{cr} 与普通 FE-RTDHT 系统经过三阶多项式补偿后的结果相近, 同时补偿后系统的稳定性随着数值子结构地基模型弹性模量的增大而降低。

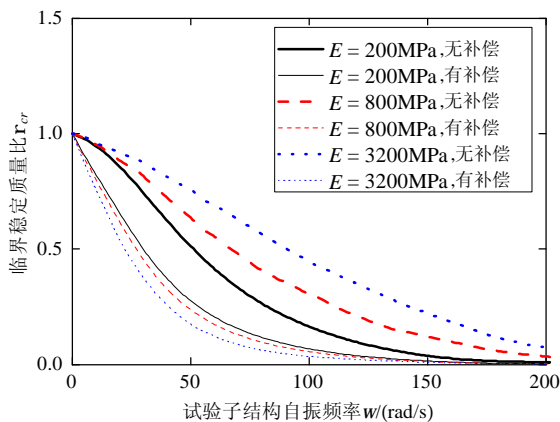


图 5 临界稳定质量比随参数变化的影响
($t = 0.01s$, $\alpha = 5\%$)

Fig.5 Parameter study on critical stability of mass ratio

2.3 小结

综合 2.1 节和 2.2 节根轨迹分析实例的结果, 考虑 SSI FE-RTDHT 系统在有时滞无补偿情况下系统的固有模态不会引起失稳, 失稳是由时滞引入的附加模态造成的, 其失稳机理与不考虑无限地基影响时不同, 造成两种 FE-RTDHT 系统的稳定特性有显著差别; 增加三阶多项式补偿后, 两者的失稳机理相同, 均是由补偿引入的附加模态造成失稳, 因此补偿后两种 FE-RTDHT 系统的稳定特性相近, 系

统临界稳定质量比 r_{cr} 的值也比较接近。

2.1 节分析实例的模型与文献[10]中的双自由度 RTDHT 模型有一定相似之处, 二者的物理子结构相同, 数值子结构一个离散为一片有限单元, 一个集中到一个自由度上。二者的时滞稳定性分析结果也有一定的相似性: 有时滞无补偿情况下系统的固有模态畸变导致失稳; 三阶多项式预测补偿使得系统稳定性大幅提升, 同时消除固有模态的畸变, 失稳由补偿引起的附加模态造成。

2.2 节分析实例的模型与文献[11]中考虑结构-地基相互作用的 RTDHT 模型也有一定相似之处, 分别通过人工粘弹性边界和集总参数模型模拟了无限地基的影响。二者的时滞稳定性分析结果同样具有一定的相似性: 有时滞无补偿情况下系统的固有模态发生畸变, 但是失稳由时滞产生的附加模态引起; 三阶多项式预测补偿虽然在一定程度上降低了系统的稳定性, 但是能够消除固有模态的畸变, 提高试验精度。

因此可以看出, 虽然本文的两个分析实例都使用了有限元数值子结构模型, 甚至有限元模型动力方程中的矩阵形式也相同, 但是它们对应的不同物理模型导致了两个分析实例有着不同的时滞稳定特性。RTDHT 的时滞稳定性是与试验所反映的物理模型的性质相关的, 表示同一物理模型的 RTDHT 时滞稳定特性和失稳机理是相似的。

3 数值验证

本节通过 Simulink 仿真计算, 对 2.1 节根轨迹分析实例的稳定性计算结论进行数值验证。数值验证中使用幅值 $0.1g$ 、频率 $4Hz(25.1rad/s)$ 的正弦波作为系统输入, 验证工况分别为:

工况 1: 有时滞无补偿, 试验子结构质量 $m = 20.0kg$;

工况 2: 有时滞无补偿, 试验子结构质量 $m = 20.2kg$;

工况 3: 使用三阶多项式预测补偿方法, 试验子结构质量 $m = 42.4kg$;

工况 4: 使用三阶多项式预测补偿方法, 试验子结构质量 $m = 42.5kg$ 。

对比图 6 和图 7 所示的有时滞无补偿情况下的试验子结构加速度响应可以看到: 当试验子结构质量为 $m = 20.0kg$ 时, 系统的响应是稳定的, 对后 10s 的稳态加速度响应做傅里叶幅值谱分析也表明系

统仅有和输入频率相同的稳态响应；当试验子结构质量取 $m = 20.2\text{kg}$ 时，系统失稳，试验子结构加速度响应的频域分析结果表明，此时系统不但有输入频率，还有根轨迹分析得到的失稳频率 $\omega_{cr} = 71.1\text{rad/s}$ 。

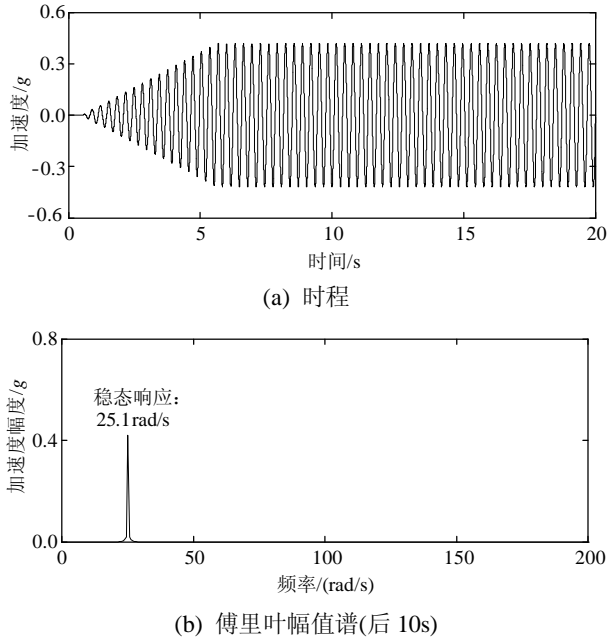


图6 试验子结构加速度响应(工况 1)

Fig.6 Acceleration of physical substructure (working condition 1)

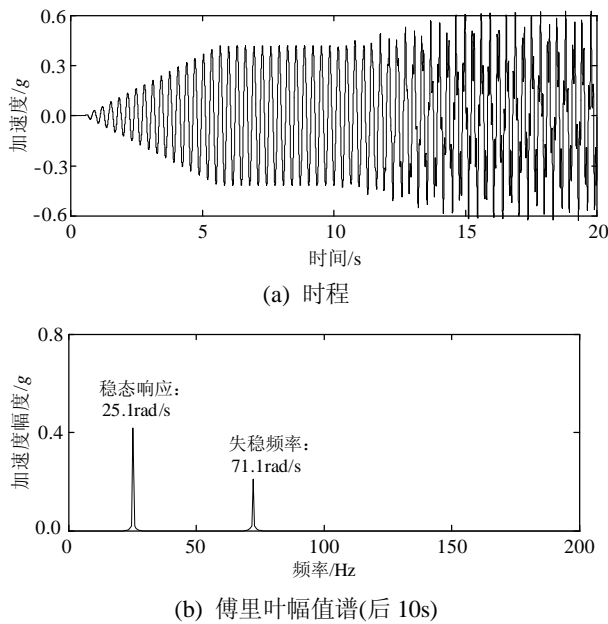


图7 试验子结构加速度响应(工况 2)

Fig.7 Acceleration of physical substructure (working condition 2)

图8和图9给出了对时滞进行三阶多项式补偿情况下的试验子结构加速度响应。同样，当试验子

结构质量为 $m = 42.4\text{kg}$ 时，系统的响应是稳定的；当试验子结构质量取 $m = 42.5\text{kg}$ 时，系统失稳，试验子结构的加速度响应不但有输入频率，还有根轨迹分析得到的失稳频率 $\omega_{cr} = 192.6\text{rad/s}$ 。

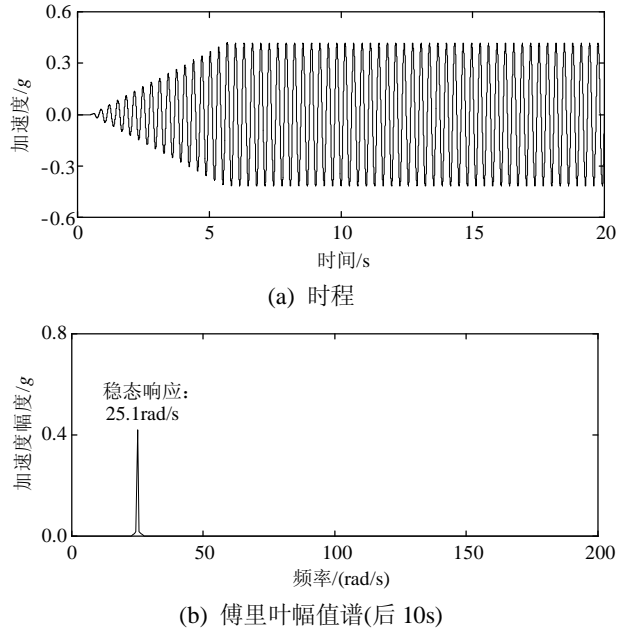


图8 试验子结构加速度响应(工况 3)

Fig.8 Acceleration of physical substructure (working condition 3)

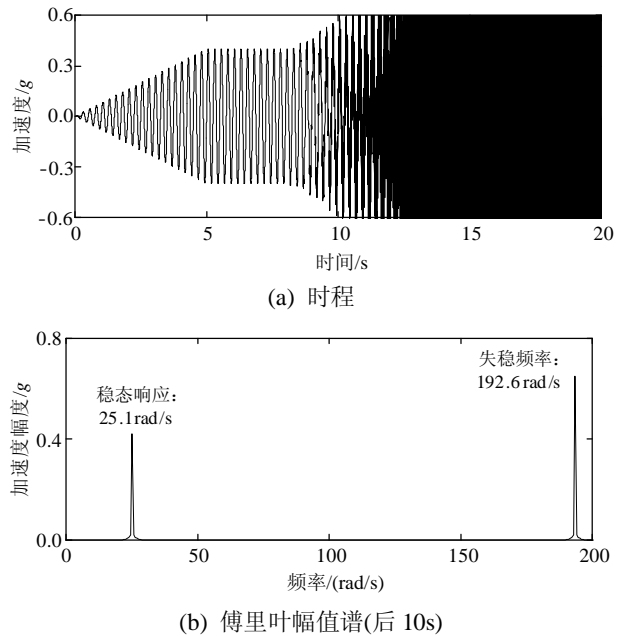


图9 试验子结构加速度响应(工况 4)

Fig.9 Acceleration of physical substructure (working condition 4)

数值验证得到的系统临界稳定质量及失稳频率与根轨迹分析得到的结果基本一致，很好的支持了根轨迹分析的结论。

4 结论

本文构建了考虑加载系统时滞及其补偿的 FE-RTDHT 的动力分析模型, 并采用根轨迹分析方法对其时滞稳定性进行了研究。根据算例分析的结果得到以下结论:

(1) 在无时滞时, FE-RTDHT 系统是无条件稳定的; 而一旦有时滞存在, FE-RTDHT 系统试验子结构的质量需小于临界稳定质量才能保证试验系统的稳定。

(2) 对于数值子结构为普通有限元模型的 FE-RTDHT 系统, 总体上看系统的稳定性随着试验子结构自振频率 w 的增大而降低, 在结构动力试验常用的中低频段 ($10\text{rad/s} < w < 100\text{rad/s}$) 内, 三阶多项式补偿能显著的提高系统的稳定性。补偿后系统的稳定性随时滞量的增加而降低, 随试验子结构阻尼比的增大而略为降低, 随着数值子结构弹性模量的增大而降低。

(3) 对于数值子结构为考虑无限地基影响的 SSI FE-RTDHT 系统, 其稳定特性与不考虑无限地基时明显不同, 三阶多项式补偿在一定程度上降低了系统的稳定性。但是三阶多项式补偿可以明显改善系统固有模态的动力特性, 提高试验精度, 因此三阶多项式预测补偿仍然是非常必要的。

需要说明的是, 上述结论只是根据本文的算例得到的。对于不同的数值和物理子结构模型, FE-RTDHT 系统的稳定特性和失稳机理可能明显不同。因此, 在设计试验时, 需针对具体的试验方案的参数进行分析计算, 评估试验系统的稳定性。

参考文献:

- [1] Nakashima M, Takaoka H K E. Development of real-time pseudo dynamic testing [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 1992, 21(1): 79–92.
- [2] Horiuchi T, Nakagawa M, Sugano M, Konno T. Development of a real-time hybrid experimental system with actuator delay compensation [C]. *Acapulco Mexico, Proceedings of the 11th World Conference on Earthquake Engineering*, 1996: Paper No. 660.
- [3] 王倩颖, 吴斌, 欧进萍. 考虑作动器时滞及其补偿的实时子结构实验稳定性分析[J]. *工程力学*, 2007, 24(2): 9–14, 8.
Wang Qianying, Wu Bin, Ou Jinping. Stability analysis of real-time substructure testing considering actuator delay and compensation [J]. *Engineering Mechanics*, 2007, 24(2): 9–14, 8. (in Chinese)
- [4] Wallace M I, Sieber J, Neild S A, Wagg D J, Krauskopf B. Stability analysis of real-time dynamic substructure using delay differential equation models [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2005, 34(15): 1817–1832.
- [5] Chen C, Ricles J M. Stability analysis of SDOF real-time hybrid testing systems with explicit integration algorithms and actuator delay [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2008, 37(4): 597–613.
- [6] Mercan O, Ricles J M. Stability and accuracy analysis of outer loop dynamics in real-time pseudodynamic testing of SDOF systems [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2007, 36(11): 1523–1543.
- [7] Mercan O, Ricles J M. Stability analysis for real-time pseudodynamic and hybrid pseudodynamic testing with multiple sources of delay [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2008, 37(10): 1269–1293.
- [8] Chi Fudong, Wang Jinting, Jin Feng. Delay-dependent stability and added damping of SDOF real-time dynamic hybrid testing [J]. *Earthquake Engineering & Engineering Vibration*, 2010, 9(3): 425–438.
- [9] 迟福东, 王进廷, 金峰. 实时耦联动力试验的时滞稳定性分析[J]. *工程力学*, 2010, 27(9): 12–16, 54.
Chi Fudong, Wang Jinting, Jin Feng. Delay-dependent stability analysis of real-time dynamic hybrid testing [J]. *Engineering Mechanics*, 2010, 27(9): 12–16, 54. (in Chinese)
- [10] 迟福东, 王进廷, 汪强, 金峰. 考虑补偿的多自由度实时耦联动力试验时滞稳定性分析[J]. *工程力学*, 2011, 28(4): 200–207.
Chi Fudong, Wang Jinting, Wang Qiang, Jin Feng. Delay-dependent stability analysis of MDOF real-time dynamic hybrid testing considering compensation [J]. *Engineering Mechanics*, 2011, 28(4): 200–207. (in Chinese)
- [11] 迟福东, 王进廷, 金峰, 徐艳杰. 土-结构动力相互作用的实时耦联动力试验的时滞稳定性[J]. *工程力学*, 2012, 29(8): 1–7.
Chi Fudong, Wang Jinting, Jin Feng, Xu Yanjie. Delay-dependent stability of real-time dynamic hybrid testing for soil-structure interaction analysis [J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(8): 1–7. (in Chinese)
- [12] Nakashima M, Masaoka N. Real-time on-line test for MDOF systems [J]. *Earthquake Engineering and Structure Dynamics*, 1999, 28(4): 393–420.
- [13] Bonnet P A, Lim C N, Williams M S. Real-time hybrid experiments with Newmark integration, MCSmd outer-loop control and multi-tasking strategies [J]. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 2007, 36(1): 119–141.
- [14] Mosqueda I G, Ahmadizadeh M. Iterative implicit integration procedure for hybrid simulation of large nonlinear structures [J]. *Earthquake Engineering &*

- Structural Dynamics, 2010, 40(9): 945—960.
- [15] Wang Qiang, Wang Jinting, Jin Feng, Chi Fudong, Zhang Chuhan. Real-time dynamic hybrid testing for soil-structure interaction analysis [J]. Soil Dynamics and Earthquake Engineering, 2011, 31(12): 1690—1702.
- [16] 迟福东, 王进廷, 金峰, 汪强. 土-结构-流体动力相互作用的实时耦联动力试验[J]. 岩土力学, 2010, 31(12): 3765—3770.
Chi Fudong, Wang Jinting, Jin Feng, Wang Qiang. Real-time dynamic hybrid testing for soil-structure-fluid interaction analysis [J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31(12): 3765—3770. (in Chinese)
- [17] Chen C, Ricles J M. Large scale real-time hybrid simulation involving multiple experimental substructures and adaptive actuator delay compensation [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2012, 41(3): 549—569.
- [18] Saouma V, Kang D H, Haussmann G. A computational finite-element program for hybrid simulation [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 2012, 41(3): 375—389.
- [19] Wang Jinting, Zhou Mengxia, Jin Feng. Real-time dynamic hybrid testing including finite element numerical substructure [C]. Lisbon Portugal, Proceedings of the 15th World Conference on Earthquake Engineering, 2012: Paper No. 0179.
- [20] Horiuchi T, Inoue M, Konno T, Namita Y. Real-time hybrid experimental system with actuator delay compensation and its application to a piping system with energy absorber [J]. Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 1999, 28(10): 1121—1141.
- [21] Franklin G F, Powell J D, Naeini A E. Feedback control of dynamic systems [M]. N.J. US: Prentice-Hall, 2002: 270—341.
- [22] The Mathworks, Inc. Matlab software: User's guides (2006b) [CP]. Natick MA US: The Mathworks, Inc, 2006.
- [23] Liu Jingbo, Li Bin. A unified viscous-spring artificial boundary for 3-D static and dynamic applications [J]. Science in China Series E: Engineering & Materials Science, 2005, 48(5): 570—584.

(上接第 7 页)

- [22] 罗尧治, 董石麟. 含可动机构的杆系结构非线性力法分析[J]. 固体力学学报, 2002, 23(3): 288—294.
Luo Yaozhi, Dong Shilin. Nonlinear force method analysis for space truss with mobile mechanisms [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2002, 23(3): 288—294. (in Chinese)
- [23] Mansfield E H. Tension field theory [Z]. USA: Standford University, 1968, 305—320.
- [24] Wong Y W, Pellegrino S. Wrinkled membranes. Part I : experiments; part II : analytical models; part III : numerical simulations [J]. Journal of Mechanics of Materials and Structures. 2006, 1(1): 1—93.
- [25] Luo Y, Lu J. Geometrically non-linear force method for assemblies with infinitesimal mechanisms [J]. Computers & Structures, 2006, 84(31): 2194—2199.
- [26] Yu Y, Luo Y Z. Motion analysis of deployable structures based on the rod hinge element by the finite particle method [J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers Part G-Journal of Aerospace Engineering, 2009, 223(G7): 955—964.
- [27] Oldenburg M, Nilsson L. The position code algorithm for contact searching [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1994, 37(3): 359—386.
- [28] Zhong Z H, Nilsson L. Lagrange multiplier approach for evaluation of friction in explicit finite-element analysis [J]. Communications in Numerical Methods in Engineering, 1994, 10(3): 249—255.
- [29] Sukumar N, Moës N, Moran B, et al. Extended finite element method for three - dimensional crack modelling [J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2000, 48(11): 1549—1570.