

文章编号: 1001-0920(2009)11-1707-06

## 基于 ISS 的非线性纯反馈系统的自适应动态面控制

张天平, 文 慧

(扬州大学 信息工程学院, 江苏 扬州 225009)

**摘 要:** 研究一类具有未知死区的非线性纯反馈系统的自适应控制问题. 基于输入状态稳定理论和小增益定理, 提出一种自适应动态面控制方案. 该方案有效地减少了可调参数的数目, 避免了传统后推设计中由于需要对虚拟控制反复求导而导致的计算复杂性. 理论分析证明了闭环系统是半全局一致终结有界的.

**关键词:** 自适应控制; 动态面控制; 纯反馈系统; 输入状态稳定; 小增益定理

**中图分类号:** TP273 **文献标识码:** A

## Adaptive dynamic surface control for nonlinear pure feedback systems via input-to-state stability

ZHANG Tian-ping, WEN Hui

(College of Information Engineering, Yangzhou University, Yangzhou 225009, China. Correspondent: ZHANG Tian-ping, E-mail: tpzhang@yzu.edu.cn)

**Abstract:** The problem of adaptive control for a class of nonlinear systems in pure-feedback form with unknown dead zone is studied. Based on input-to-state stability (ISS) and small gain theorem, an adaptive dynamic surface control scheme is proposed. The number of adjustable parameters is reduced effectively by using the approach. And the explosion of complexity in traditional backstepping design caused by repeated differentiations of virtual control is avoided. Theoretical analysis shows that the closed-loop system is semi-globally uniformly ultimately bounded.

**Key words:** Adaptive control; Dynamic surface control; Pure feedback systems; Input-to-state stability; Small gain theorem

### 1 引 言

Sontag<sup>[1]</sup>于 1989 年提出了输入状态稳定 (ISS) 理论, 这是继 Lyapunov 稳定性之后自动控制系统稳定性理论的新发展, 现已成为非线性反馈分析和设计中的一个基本概念. 将该稳定性概念与工程中采用的非线性增益相结合, Jiang<sup>[2]</sup>给出了基于输入状态稳定的非线性小增益定理. 近年来, 人们将小增益思想有效地应用到非线性系统的控制设计中, 并取得了不少成果<sup>[3-7]</sup>. 文献[4]结合 Backstepping 和小增益定理, 对一类含动态不确定性的非线性系统提出了一种自适应输出反馈控制; [5]针对一类带扰动的严格反馈动态系统, 提出了一种基于小增益定理的自适应模糊控制方案; [6]基于输入状态稳定理论, 研究了一类非仿射非线性系统的自适应神经网络控制方案.

非线性系统的自适应控制一直是国内外学者的研究热点之一. 近几年来, 针对传统后推设计中反复对虚拟控制求导而导致的计算复杂性问题, 动态面控制技术得到了广泛的应用<sup>[8-12]</sup>. 文献[10]基于动态面技术, 对一类虚拟控制系数为 1 的严格反馈非线性系统, 提出一种自适应神经网络控制策略; [11]针对一类带摄动的严格反馈动态系统, 利用积分型 Lyapunov 函数, 提出一种直接自适应神经网络控制方案; [12]采用动态面控制技术, 对一类不确定非线性纯反馈系统, 基于 Lyapunov 方法提出一种神经网络控制方案.

本文针对一类具有非线性死区输入的不确定纯反馈系统, 利用 T-S 模糊系统的逼近能力和动态面技术, 提出一种基于 ISS 理论和小增益定理的自适应模糊控制方案. 本文所提方案具有以下优点: 1)

收稿日期: 2008-11-30; 修回日期: 2009-03-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874045, 60774017).

作者简介: 张天平(1964—), 男, 江苏泰兴人, 教授, 博士生导师, 从事自适应控制、非线性控制等研究; 文慧(1984—), 女, 武汉人, 硕士生, 从事自适应控制、模糊控制等研究.

将一阶滤波器引入后推设计,避免了对虚拟控制反复求导,与文献[13,14]相比,逼近函数中建模变量的个数减少了  $n-1$  个;2) 与文献[12]相比,本文的设计方案只有较少的学习参数需要在线调节,从而降低了算法的复杂度;3) 与文献[12]采用传统的 Lyapunov 稳定性分析方法不同,本文利用 T-S 模糊逻辑系统的逼近能力和特殊结构,将非线性闭环系统表示成两个耦合的互联子系统,利用 ISS 理论和小增益定理分析证明了闭环控制系统是半全局一致终结有界的。

## 2 问题描述及基本假设

考虑如下一类带摄动的非线性纯反馈系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + d_i(t, x), 1 \leq i \leq n-1; \\ \dot{x}_n = f_n(x) + g_n(x)v + d_n(t, x); \\ y = x_1. \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$  为系统状态向量;  $\bar{x}_i = [x_1, x_2, \dots, x_i]^T \in R^i, i = 1, 2, \dots, n; v$  为具有输入  $u$  的非线性死区输出;  $y \in R$  为系统输出;  $f_1(x_1), f_2(\bar{x}_2), \dots, f_n(x)$  为未知光滑非线性函数;  $d_i(t, x)$  为外来干扰或未建模动态,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

非线性输入的死区模型<sup>[14,15]</sup>描述如下:

$$v = D(u) = \begin{cases} g_r(u), & u \geq b_r; \\ 0, & b_l < u < b_r; \\ g_l(u), & u \leq b_l. \end{cases} \quad (2)$$

**假设 1** 死区输出  $v$  是不可测量的。

**假设 2** 死区参数  $b_r$  和  $b_l$  是未知有界常数,但符号已知,即  $b_r > 0, b_l < 0$ 。

**假设 3**  $g_r$  和  $g_l$  是光滑非线性函数,且存在未知正常数  $k_{r1}, k_{r0}, k_{l0}, k_{l1}$ ,使得

$$0 < k_{r0} \leq g'_r(u) \leq k_{r1}, \forall u \in [b_r, +\infty); \quad (3)$$

$$0 < k_{l0} \leq g'_l(u) \leq k_{l1}, \forall u \in (-\infty, b_l]; \quad (4)$$

且  $\beta_0 \leq \min\{k_{r0}, k_{l0}\}$  为已知正常数。其中:  $g'_r(u) = dg_r(u)/du, g'_l(u) = dg_l(u)/du$ 。

对函数  $g_r$  和  $g_l$  进行解析延拓,使得当  $\forall u \in [b_l, +\infty)$  时,式(3)成立;当  $\forall u \in (-\infty, b_r]$  时,式(4)成立。基于以上假设,死区模型可表示如下:

$$v = D(u) = H^T(t)\Phi(t)u + d(u). \quad (5)$$

其中:  $|d(u)| \leq \rho^*, \rho^* = (k_{r1} + k_{l1})\max\{b_r, -b_l\}$  是未知正常数;  $d(u), H(t)$  和  $\Phi(t)$  的表达式见文献[15]。

控制目标:设计自适应模糊控制器  $u$ ,使系统输出  $y$  尽可能好地跟踪一个指定的期望轨迹  $y_d$ ,闭环系统半全局一致终结有界,跟踪误差收敛到一个小的残差集内。

对于纯反馈系统式(1),定义

$$\begin{aligned} g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) &= \partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})/\partial x_{i+1}, \\ i &= 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (6)$$

**假设 4** 函数  $g_i(\bar{x}_i, x_{i+1}), i = 1, 2, \dots, n-1, g_n(x)$  的符号已知,且存在常数  $g_{i0}$  和  $g_{i1}$ ,使得

$$0 < g_{i0} \leq |g_i(\cdot)| \leq g_{i1} < \infty,$$

$$\forall (\bar{x}_i^T, x_{i+1})^T \in \Omega_{\bar{x}_{i+1}} \subset R^{i+1};$$

$$0 < g_{n0} \leq |g_n(x)| \leq g_{n1} < \infty, \forall x \in R^n.$$

其中  $\Omega_{\bar{x}_{i+1}}$  是紧集。不失一般性,令  $g_i(\cdot) \geq 0, i = 1, 2, \dots, n$ 。

**假设 5** 令

$$\begin{aligned} |d_i(t, x)| &\leq p_i^* \phi_i(\bar{x}_i), \forall (t, x) \in R_+ \times R^n, \\ i &= 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

其中:  $\phi_i(\bar{x}_i)$  是已知非负光滑函数,  $p_i^*$  是未知正常数。

**假设 6** 参考输入向量  $x_d = [y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d]^T$  光滑可测,且  $x_d \in \Omega_d \subset R^3, \Omega_d$  为已知有界闭集,  $B_0$  为已知正常数,  $\Omega_d = \{[y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d]^T : y_d^2 + \dot{y}_d^2 + \ddot{y}_d^2 \leq B_0\}$ 。

关于 ISS 理论和小增益定理的相关概念及性质见文献[1-3]。本文采用 T-S 模糊逻辑系统逼近未知连续函数  $y = f(x)$ , Takagi-Sugeno 模糊系统由以下规则  $L^{(i)}$  表示:

if  $x_1$  is  $M_1^i$ , and  $x_2$  is  $M_2^i, \dots$ , and  $x_n$  is  $M_n^i$ ;

then  $y_i = a_0^i + a_1^i x_1 + a_2^i x_2 + \dots + a_n^i x_n$ 。

其中:  $M_j^i$  为模糊集合,  $j = 1, 2, \dots, n; a_0^i, a_1^i, \dots, a_n^i$  为模糊规则结论部分的常系数;  $y_i$  为系统根据规则  $L^{(i)}$  所得到的输出,  $i = 1, 2, \dots, q, q$  为模糊规则的个数。采用单点模糊化、乘积推理和重心清晰化推理方法,模糊逻辑系统的数学表达式为

$$y = f(x) = \sum_{i=1}^q y_i \xi_i(x) = \xi(x) \mathbf{A}_f^* \bar{x}. \quad (7)$$

其中

$$\bar{x} = [1, x^T]^T;$$

$$\xi(x) = [\xi_1(x), \xi_2(x), \dots, \xi_q(x)]$$

称为模糊基函数向量;

$$\xi_i(x) = \frac{\prod_{j=1}^n \mu_{M_j^i}(x_j)}{\sum_{i=1}^q \left( \prod_{j=1}^n \mu_{M_j^i}(x_j) \right)},$$

这里  $\mu_{M_j^i}(x_j) = \exp\left[-\left(\frac{x_j - b_j^i}{h_j}\right)^2\right], b_j^i \in R, h_j > 0, i = 1, 2, \dots, q, j = 1, 2, \dots, n$ ; 而

$$\mathbf{A}_f^* = \begin{bmatrix} a_0^1 & a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_0^q & a_1^q & \dots & a_n^q \end{bmatrix}.$$

**引理 1**<sup>[16]</sup> 对于任意定义在紧集  $U \subset R^n$  上的连续函数  $g(x), \forall \epsilon > 0$ , 一定存在形如式(7)的模糊逻辑系统  $y$ , 使

$$\sup_{x \in U} \|y - g(x)\| \leq \epsilon. \quad (8)$$

本文采用如下记号： $R^n$  和  $R^{m \times n}$  分别表示实数域上的  $n$  维向量空间与  $m \times n$  矩阵空间； $0$  表示具有适当维数的零矩阵； $\|x\|$  表示向量  $x$  的欧氏范数，即  $\|x\| = (x^T x)^{1/2}$ ,  $x \in R^n$ ； $\|A\|_F$  表示矩阵  $A$  的 Frobenius 范数，即

$$\|A\|_F = \left( \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right)^{1/2}, A \in R^{m \times n},$$

且矩阵 Frobenius 范数与向量欧氏范数是相容的，即

$$\forall A \in R^{m \times n}, x \in R^n, \|Ax\| \leq \|A\|_F \|x\|.$$

### 3 控制器设计及稳定性分析

本文采用动态面控制与后推技术相结合，类似于传统的后推设计，其过程包含  $n$  步。基于等式变换： $z_1 = x_1 - y_d, z_i = x_i - s_i (i = 2, 3, \dots, n)$ ，其中  $s_i$  是以  $\alpha_{i-1}$  为输入的一阶滤波器的输出，在前  $n-1$  步中设计虚拟控制  $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ ，最后在第  $n$  步中设计自适应控制器  $u$ 。其步骤如下：

**Step1** ( $i = 1$ ) 令  $s_1 = y_d, z_1 = x_1 - s_1$ 。将  $z_1$  对时间  $t$  求导，并利用式(1)的第 1 个方程可得

$$\dot{z}_1 = f_1(x_1, x_2) + d_1(t, x) - \dot{s}_1. \quad (9)$$

由假设 4 可知， $\partial f_1(x_1, x_2)/\partial x_2 \geq g_{10} > 0, \forall (x_1, x_2)^T \in R^2$ 。定义  $v_1 = -\dot{s}_1$ ，由  $\partial v_1/\partial x_2 = 0$ ，有  $\partial[f_1 + v_1]/\partial x_2 \geq g_{10}$ 。由引理 1<sup>[13]</sup> 可知，存在  $x_2 = \alpha_1^*(x_1, v_1)$  满足  $f_1(x_1, \alpha_1^*) + v_1 = 0$ 。利用中值定理，存在  $\eta_1 (0 < \eta_1 < 1)$  满足

$$f_1(x_1, x_2) = f_1(x_1, \alpha_1^*) + g_{\eta_1}(x_2 - \alpha_1^*). \quad (10)$$

其中： $g_{\eta_1} = g_1(x_1, x_{\eta_1}), x_{\eta_1} = \eta_1 x_2 + (1 - \eta_1)\alpha_1^*$ ，且假设 4 对于  $g_{\eta_1}$  仍成立，即  $0 < g_{10} \leq g_1(x_1, x_{\eta_1}) \leq g_{11}$ 。

采用 T-S 模糊逻辑系统来逼近未知连续函数  $\alpha_1^*(x_1, v_1)$ ，根据引理 1 和式(7) 可得

$$\alpha_1^* = \xi_1 A_1^0 [1, \dot{s}_1]^T + c_1 \xi_1 \omega_1 + \xi_1 A_1^1 s_1 + \delta_1(\chi_1). \quad (11)$$

其中

$$\begin{aligned} \chi_1 &= [x_1, \dot{s}_1], A_1^1 = [a_{11}^1, a_{12}^1, \dots, a_{1q}^1]^T, \\ \omega_1 &= A_1^m z_1, A_1^m = c_1^{-1} A_1^1, c_1 = n \|A_1^1\|_F, \\ \xi_1 &= [\xi_{11}, \xi_{12}, \dots, \xi_{1q}], A_1^0 = \begin{bmatrix} a_{10}^0 & \dots & a_{10}^q \\ a_{12}^0 & \dots & a_{12}^q \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

由此易知  $\|A_1^m\|_F \leq 1/n$ ，且对于充分大的紧集  $U_{x_1}$ ，逼近误差  $|\delta_1(\chi_1)| \leq \epsilon_1, \epsilon_1$  是未知有界正常数。

取虚拟控制  $\alpha_1$  和自适应律分别为

$$\alpha_1 = -k_1 z_1 - \frac{1}{4\gamma_1^2} \hat{\lambda}_{11} \|\xi_1\|^2 z_1 - \frac{1}{4\rho_1^2} \hat{\lambda}_{12} \varphi_1^2 z_1, \quad (12)$$

$$\dot{\hat{\lambda}}_{i1} = \Gamma_{i1} \left[ \frac{1}{4\gamma_i^2} \|\xi_i\|^2 z_i^2 - \sigma_{i1} (\hat{\lambda}_{i1} - \lambda_{i10}) \right], \quad (13)$$

$$\dot{\hat{\lambda}}_{i2} = \Gamma_{i2} \left[ \frac{1}{4\rho_i^2} \varphi_i^2 z_i^2 - \sigma_{i2} (\hat{\lambda}_{i2} - \lambda_{i20}) \right]. \quad (14)$$

其中： $i = 1; \hat{\lambda}_{i1}, \hat{\lambda}_{i2}$  分别为  $\lambda_{i1} = g_{i0}^{-1} (g_{i1} c_i)^2$  与  $\lambda_{i2} = g_{i0}^{-1} \theta_i^2$  的估计值； $\theta_i = g_{i1} \max\{g_{i1}^{-1} p_i^*, \|A_i^0\|_F, \|A_i^1\|_F, \epsilon_i\}$ ； $\varphi_1 = \phi_1(x_1) + \|\xi_1\| (\|[1, \dot{s}_1]^T\| + |s_1|) + 1; k_i, \gamma_i, \rho_i, \Gamma_{i1}, \Gamma_{i2}, \sigma_{i1}, \sigma_{i2}, \lambda_{i10}, \lambda_{i20}$  均为正的设计常数。

以  $\alpha_1$  为输入，引入新的状态变量  $s_2$ ，定义如下—阶滤波器：

$$\tau_2 \dot{s}_2 + s_2 = \alpha_1, s_2(0) = \alpha_1(0), \quad (15)$$

其中  $\tau_2$  为时间常数。令  $y_2 = s_2 - \alpha_1$ ，则有  $\dot{s}_2 = -y_2/\tau_2$ 。将式(10) 和(11) 代入(9)，并利用  $x_2 = z_2 + s_2$  可得

$$\dot{z}_1 = g_{\eta_1}(z_2 + s_2) - g_{\eta_1} \alpha_1^* + d_1(t, x). \quad (16)$$

令  $\Delta_1 = -g_{\eta_1} \{\xi_1 A_1^0 [1, \dot{s}_1]^T + \xi_1 A_1^1 s_1 + \delta_1(\chi_1)\} + d_1(t, x)$ ，则有

$$\dot{z}_1 = g_{\eta_1}(z_2 + s_2) - g_{\eta_1} c_1 \xi_1 \omega_1 + \Delta_1, \quad (17)$$

$$|\Delta_1| \leq \theta_1 \varphi_1. \quad (18)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V_1 = \frac{1}{2} z_1^2 + \frac{1}{2} g_{10} \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\lambda}_{11}^2 + \frac{1}{2} g_{10} \Gamma_{12}^{-1} \tilde{\lambda}_{12}^2. \quad (19)$$

其中： $\tilde{\lambda}_{11} = \lambda_{11} - \hat{\lambda}_{11}, \tilde{\lambda}_{12} = \lambda_{12} - \hat{\lambda}_{12}$ 。对时间  $t$  求导可得

$$\dot{V}_1 = z_1 \dot{z}_1 - g_{10} \Gamma_{11}^{-1} \tilde{\lambda}_{11} \dot{\tilde{\lambda}}_{11} - g_{10} \Gamma_{12}^{-1} \tilde{\lambda}_{12} \dot{\tilde{\lambda}}_{12}. \quad (20)$$

由于

$$-g_{\eta_1} c_1 \xi_1(x_1) \omega_1 z_1 \leq |-g_{\eta_1} c_1 \xi_1(x_1) \omega_1 z_1| \leq$$

$$\frac{g_{10} \tilde{\lambda}_{11}}{4\gamma_1^2} \|\xi_1\|^2 z_1^2 + \frac{g_{10} \tilde{\lambda}_{11}}{4\gamma_1^2} \|\xi_1\|^2 z_1^2 + \gamma_1^2 \|\omega_1\|^2, \quad (21)$$

$$\Delta_1 z_1 \leq \frac{g_{10} \tilde{\lambda}_{12}}{4\rho_1^2} \varphi_1^2 z_1^2 + \frac{g_{10} \tilde{\lambda}_{12}}{4\rho_1^2} \varphi_1^2 z_1^2 + \rho_1^2, \quad (22)$$

将式(12) ~ (14)，(21)，(22) 代入(20)，整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &\leq g_{\eta_1} z_1 z_2 + g_{11} y_2^2 + \left(\frac{1}{4} g_{11} - k_1 g_{10}\right) z_1^2 - \\ &\frac{1}{2} g_{10} \sigma_{11} \tilde{\lambda}_{11}^2 - \frac{1}{2} g_{10} \sigma_{12} \tilde{\lambda}_{12}^2 + \gamma_1^2 \|\omega_1\|^2 + \mu_1, \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \rho_1^2 + \frac{1}{2} g_{10} [\sigma_{11} (\lambda_{11} - \lambda_{110})^2 + \\ &\sigma_{12} (\lambda_{12} - \lambda_{120})^2]. \end{aligned}$$

**Step i** ( $2 \leq i \leq n-1$ ) 令  $z_i = x_i - s_i$ ，将  $z_i$  对时间  $t$  求导可得

$$\dot{z}_i = f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + d_i(t, x) - \dot{s}_i. \quad (24)$$

由假设 4 可知

$$\begin{aligned} \partial f_i(\bar{x}_i, x_{i+1})/\partial x_{i+1} &\geq g_{i0} > 0, \\ \forall (\bar{x}_i^T, x_{i+1})^T &\in R^{i+1}. \end{aligned}$$

定义  $v_i = -\dot{s}_i$ , 由  $\partial v_i / \partial x_{i+1} = 0$ , 有

$$\partial[f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) + v_i] / \partial x_{i+1} \geq g_{i0} > 0.$$

由引理 1<sup>[13]</sup> 可知, 存在  $x_{i+1} = \alpha_i^*(\bar{x}_i, v_i)$ , 使  $f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) + v_i = 0$ . 利用中值定理, 存在  $\eta_i (0 < \eta_i < 1)$  满足

$$f_i(\bar{x}_i, x_{i+1}) = f_i(\bar{x}_i, \alpha_i^*) + g_{\eta_i}(x_{i+1} - \alpha_i^*). \quad (25)$$

其中:  $g_{\eta_i} = g_i(\bar{x}_i, x_{\eta_i})$ ,  $x_{\eta_i} = \eta_i x_{i+1} + (1 - \eta_i)\alpha_i^*$ , 且假设 4 对于  $g_{\eta_i}$  仍然成立.

采用 T-S 模糊逻辑系统来逼近未知连续函数  $\alpha_i^*(\bar{x}_i, v_i)$ , 根据引理 1 和式(7) 可得

$$\alpha_i^* = \xi_i A_i^0 [1, s_1, \dots, s_{i-1}, \dot{s}_i]^T + c_i \xi_i \omega_i + \xi_i A_i^1 [0, s_i]^T + \delta_i(\chi_i). \quad (26)$$

其中

$$\chi_i = [\bar{z}_{i-1}^T, x_i, s_1, \dots, s_{i-1}, \dot{s}_i],$$

$$\xi_i = [\xi_{i1}, \xi_{i2}, \dots, \xi_{iq}],$$

$$A_i^0 = \begin{bmatrix} a_{i0}^1 & a_{i,i+1}^1 & \dots & a_{i,2i}^1 \\ a_{i0}^2 & a_{i,i+1}^2 & \dots & a_{i,2i}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i0}^q & a_{i,i+1}^q & \dots & a_{i,2i}^q \end{bmatrix},$$

$$A_i^1 = \begin{bmatrix} a_{i1}^1 & a_{i2}^1 & \dots & a_{ii}^1 \\ a_{i1}^2 & a_{i2}^2 & \dots & a_{ii}^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}^q & a_{i2}^q & \dots & a_{ii}^q \end{bmatrix},$$

$$\bar{z}_i = [z_1, z_2, \dots, z_i]^T \in R^i, \omega_i = A_i^m \bar{z}_i,$$

$$c_i = n \|A_i^1\|_F, A_i^m = c_i^{-1} A_i^1.$$

由此易知  $\|A_i^m\|_F \leq 1/n$ , 对于充分大的紧集  $U_{\chi_i}$ , 逼近误差  $|\delta_i(\chi_i)| \leq \epsilon_i$ ,  $\epsilon_i$  是未知有界正常数.

取虚拟控制

$$\alpha_i = -z_{i-1} - k_i z_i - \hat{\lambda}_{i1} \frac{\|\xi_i\|^2 z_i}{4\gamma_i^2} - \hat{\lambda}_{i2} \frac{\varphi_i^2 z_i}{4\rho_i^2}. \quad (27)$$

其中:  $k_i > 0$ ;  $\hat{\lambda}_{i1}$  和  $\hat{\lambda}_{i2}$  的自适应律由式(13) 和(14) 确定;  $\varphi_i = \phi_i(\bar{x}_i) + \|\xi_i\| (\| [1, s_1, \dots, s_{i-1}, \dot{s}_i]^T \| + \| [0, s_i]^T \|) + 1$ ;  $\theta_i = \max\{p_i^*, g_{i1} \|A_i^0\|_F, g_{i1} \|A_i^1\|_F, g_{i1} \epsilon_i\}$ .

以  $\alpha_i$  为输入, 定义如下一阶滤波器:

$$\tau_{i+1} \dot{s}_{i+1} + s_{i+1} = \alpha_i, s_{i+1}(0) = \alpha_{i+1}(0), \quad (28)$$

其中  $\tau_{i+1}$  为时间常数. 令  $y_{i+1} = s_{i+1} - \alpha_i$ , 有  $\dot{s}_{i+1} = -y_{i+1}/\tau_{i+1}$ . 将式(25) 和(26) 代入(24) 可得

$$\dot{z}_i = g_{\eta_i}(z_{i+1} + s_{i+1}) - g_{\eta_i} \alpha_i^* + d_i(t, x). \quad (29)$$

令  $\Delta_i = -g_{\eta_i} \{\xi_i A_i^0 [1, s_1, \dots, s_{i-1}, \dot{s}_i]^T + \xi_i A_i^1 [0, s_i]^T + \delta_i(\chi_i)\} + d_i(t, x)$ , 则有

$$\dot{z}_i = g_{\eta_i}(z_{i+1} + s_{i+1}) - g_{\eta_i} c_i \xi_i \omega_i + \Delta_i, \quad (30)$$

$$|\Delta_i| \leq \theta_i \varphi_i. \quad (31)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V_i = V_{i-1} + \frac{1}{2} z_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 g_{i0} \Gamma_{ik}^{-1} \tilde{\lambda}_{ik}^2 + \frac{1}{2} y_i^2. \quad (32)$$

其中:  $\tilde{\lambda}_{i1} = \lambda_{i1} - \hat{\lambda}_{i1}$ ,  $\tilde{\lambda}_{i2} = \lambda_{i2} - \hat{\lambda}_{i2}$ . 将  $V_i$  对时间  $t$  求导可得

$$\dot{V}_i = \dot{V}_{i-1} + z_i \dot{z}_i - g_{i0} \Gamma_{i1}^{-1} \tilde{\lambda}_{i1} \dot{\tilde{\lambda}}_{i1} - g_{i0} \Gamma_{i2}^{-1} \tilde{\lambda}_{i2} \dot{\tilde{\lambda}}_{i2} + y_i \dot{y}_i. \quad (33)$$

$y_i$  关于时间  $t$  的导数为

$$\dot{y}_i = \dot{s}_i - \dot{\alpha}_{i-1} = -y_i/\tau_i + B_i,$$

其中  $B_i(\bar{z}_i, y_2, \dots, y_i, \hat{\lambda}_{11}, \dots, \hat{\lambda}_{i-1,1}, \hat{\lambda}_{12}, \dots, \hat{\lambda}_{i-1,2}, y_d, \dot{y}_d, \ddot{y}_d)$  为某一连续函数. 由 Young's 不等式可得

$$y_i \dot{y}_i = -\frac{y_i^2}{\tau_i} + y_i B_i \leq -\frac{y_i^2}{\tau_i} + y_i^2 + \frac{1}{4} B_i^2, \quad (34)$$

则式(33) 可转化为

$$\begin{aligned} \dot{V}_i \leq & g_{\eta_i} z_i z_{i+1} + \sum_{j=1}^{i-1} (g_{\eta_j} - g_{\eta_{j+1}}) z_j z_{j+1} + \sum_{j=1}^i g_{j1} y_{j+1}^2 + \\ & \sum_{j=1}^i (\frac{1}{4} g_{j1} - k_j g_{j0}) z_j^2 + \sum_{j=2}^i (-\frac{y_j^2}{\tau_j} + y_j^2 + \frac{1}{4} B_j^2) + \\ & \sum_{j=1}^i \gamma_j^2 \|\omega_j\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^2 g_{j0} \sigma_{jk} \tilde{\lambda}_{jk}^2 + \mu_i, \end{aligned} \quad (35)$$

其中  $\mu_i = \sum_{j=1}^i \rho_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^2 g_{j0} \sigma_{jk} (\lambda_{jk} - \lambda_{jk0})^2$ .

**Step  $n (i = n)$**  令  $z_n = x_n - s_n$ , 将  $z_n$  对时间  $t$

求导可得

$$\begin{aligned} \dot{z}_n = & \bar{f}_n(x, \dot{s}_n) + g_n H^T(t) \Phi(t) u + \\ & g_n d(u) + d_n(t, x), \end{aligned} \quad (36)$$

其中  $\bar{f}_n(x, \dot{s}_n) = f_n(x) - \dot{s}_n$ . 采用 T-S 模糊逻辑系统逼近未知连续函数  $\bar{f}_n(x, \dot{s}_n)$ , 类似于式(26) 可得

$$\begin{aligned} \bar{f}_n = & \xi_n A_n^0 [1, s_1, \dots, s_{n-1}, \dot{s}_n]^T + c_n \xi_n \omega_n + \\ & \xi_n A_n^1 [0, s_n]^T + \delta_n(\chi_n). \end{aligned} \quad (37)$$

其中:  $\chi_n$  和  $A_n^0, A_n^1, \xi_n, \delta_i(\chi_i), c_n, \omega_n$  与 Step  $i$  相应的记号相同 ( $i = n$ ). 将式(37) 代入(36) 可得

$$\dot{z}_n = g_n(x) H^T(t) \Phi(t) u + c_n \xi_n \omega_n + \Delta_n, \quad (38)$$

其中  $\Delta_n = \xi_n A_n^0 [1, s_1, \dots, s_{n-1}, \dot{s}_n]^T + \xi_n A_n^1 [0, s_n]^T + \delta_n(\chi_n) + g_n d(u) + d_n(t, x)$ .

选择如下控制律:

$$u = -\frac{1}{\beta_0} [k_n z_n + \frac{\|\xi_n\|^2 \hat{\lambda}_{n1} z_n}{4\gamma_n^2} + \frac{\varphi_n^2 \hat{\lambda}_{n2} z_n}{4\rho_n^2}]. \quad (39)$$

其中:  $\hat{\lambda}_{n1}, \hat{\lambda}_{n2}$  的自适应律由式(13) 和(14) ( $i = n$ ) 确定;  $k_n > 0$ ;  $\theta_n = \max\{p_n^*, \|A_n^0\|_F, \|A_n^1\|_F, \epsilon_n + g_{n1} \rho_n^*\}$ ;  $\lambda_{n1} = g_{n0}^{-1} c_n^2, \lambda_{n1} = g_{n0}^{-1} \theta_n^2$ .  $y_n$  关于时间  $t$  的导数为  $\dot{y}_n = \dot{s}_n - \dot{\alpha}_{n-1} = -y_n/\tau_n + B_n$ , 其中  $B_n$  为某一

连续函数. 根据 Young's 不等式可得

$$y_n \dot{y}_n = -\frac{y_n^2}{\tau_n} + y_n B_n \leq -\frac{y_n^2}{\tau_n} + y_n^2 + \frac{1}{4} B_n^2. \quad (40)$$

Lyapunov 函数  $V_n$  由式(32) ( $i = n$ ) 确定, 则  $V_n$  对时间  $t$  求导可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_n \leq & \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{4} g_{j1} - k_j g_{j0} \right) z_j^2 + \sum_{j=1}^{n-2} (g_{\eta_j} - \\ & g_{\eta_{j+1}}) z_j z_{j+1} + \sum_{j=1}^{n-1} \left( g_{j1} + 1 - \frac{1}{\tau_{j+1}} \right) y_{j+1}^2 + \\ & g_{\eta_{n-1}} z_{n-1} z_n + \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 \|\omega_j\|^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} B_{j+1}^2 - \\ & k_n g_{n0} z_n^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 g_{j0} \sigma_{jk} \tilde{\lambda}_{jk}^2 + \mu_n, \end{aligned} \quad (41)$$

其中  $\mu_n = \mu_i$  ( $i = n$ ).

定义如下有界闭集:

$$\Omega_i = \{ [\bar{z}_i, y_2, \dots, y_i, \hat{\lambda}_{11}, \dots, \hat{\lambda}_{i,1}, \hat{\lambda}_{12}, \dots, \hat{\lambda}_{i,2}]^T : V_i \leq q \} \subset R^{q_i}. \quad (42)$$

其中:  $q_i = 4i - 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $q$  为正常数, 由设计者给定;  $V_1$  和  $V_i$  分别由式(19) 和(32) 确定. 由此易知, 因为  $\Omega_d \times \Omega_{i+1}$  为  $R^{q_{i+1}}$  上的有界闭集, 所以  $\Omega_1 \times R^{q_n - q_1} \supset \dots \supset \Omega_{n-1} \times R^{q_n - q_{n-1}} \supset \Omega_n$ . 令连续函数  $B_{i+1}$  在有界闭集  $\Omega_d \times \Omega_{i+1}$  上的最大值为  $\theta_{i+1}$ .

**定理 1** 考虑非线性纯反馈系统 (1), 其控制律由式(39) 确定, 自适应律由式(13) 和(14) 确定, 并满足假设 1 ~ 假设 6. 则对于有界初始条件满足  $V_n(0) \leq q$ , 选取子系统  $\Sigma_{z_\omega}$  的增益  $0 < \gamma < 1, \gamma = (\sum_{i=1}^n \gamma_i^2)^{1/2}$ , 以及满足式(43) 的正常数  $k_i, \tau_{i+1}, \lambda_0$ , 可使闭环系统半全局一致终结有界, 即

$$\begin{cases} k_1 \geq g_{10}^{-1} (g_{11}/4 + \zeta_1/2 + 1); \\ k_i \geq g_{i0}^{-1} (g_{i1}/4 + (\zeta_{i-1} + \zeta_i)/2 + 1); \\ k_n \geq g_{n0}^{-1} (\zeta_{n-1}/2 + 1); \\ 1/\tau_{i+1} \geq 2 + g_{i1}, \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \lambda_0 = \min \{ 2(1 - \gamma^2), \Gamma_{11} \sigma_{11}, \dots, \Gamma_{n1} \sigma_{n1}, \\ \Gamma_{12} \sigma_{12}, \dots, \Gamma_{n2} \sigma_{n2} \}. \end{cases} \quad (43)$$

**证明** 将闭环系统(1) 改写成由子系统  $\Sigma_{\bar{z}}$  和子系统  $\Sigma_{z_\omega}$  构成的耦合系统. 考虑如下子系统  $\Sigma_{\bar{z}}$ :

$$\begin{cases} \omega_1 = A_1^m z_1, \\ \omega_2 = A_2^m \bar{z}_2 = A_2^m [z_1, z_2]^T, \\ \omega_i = A_i^m \bar{z}_i = A_i^m [z_1, z_2, \dots, z_i]^T, \\ \omega_n = A_n^m \bar{z}_n = A_n^m [z_1, z_2, \dots, z_n]^T, \\ \omega = A z = \bar{A} \bar{Z}. \end{cases} \Rightarrow \quad (44)$$

其中: 子系统  $\Sigma_{\bar{z}}$  的输入  $\bar{Z} = Z = [z^T, y^T, \tilde{\lambda}_1^T, \tilde{\lambda}_2^T]^T$ ,  $z = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T, y = [y_2, y_3, \dots, y_n]^T, \tilde{\lambda}_1 = [\tilde{\lambda}_{11}, \tilde{\lambda}_{21}, \dots, \tilde{\lambda}_{n1}]^T, \tilde{\lambda}_2 = [\tilde{\lambda}_{12}, \tilde{\lambda}_{22}, \dots, \tilde{\lambda}_{n2}]^T$ ; 输出  $\omega =$

$[\omega_1^T, \omega_2^T, \dots, \omega_n^T]^T; A_i^m = [A_i^{m1}, A_i^{m2}, \dots, A_i^{mi}], i = 2, \dots, n$ ; 而

$$A = \begin{bmatrix} A_1^m & 0 & \dots & 0 \\ A_2^{m1} & A_2^{m2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_n^{m1} & A_n^{m2} & \dots & A_n^{mi} \end{bmatrix}, \bar{A} = [A, 0].$$

因为  $\|A_i^m\|_F \leq 1/n, i = 1, 2, \dots, n$ , 所以  $\|\bar{A}\|_F = (\|A_1^m\|_F^2 + \dots + \|A_n^m\|_F^2)^{1/2} \leq 1$ . 令  $\|\bar{A}\|_F = \gamma'$ , 则有

$$\|\omega\| \leq \|\bar{A}\|_F \|Z\| = \gamma' \|\bar{Z}\|, \quad (45)$$

其中  $\gamma' \leq 1$ . 故子系统  $\Sigma_{\omega \bar{z}}$  的增益为  $\gamma_\omega = \gamma' \leq 1$ . 考虑如下子系统  $\Sigma_{z_\omega}$ :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = g_{\eta_i} (z_{i+1} + s_{i+1}) - g_{\eta_i} c_i \xi_i \omega_i + \Delta_i, \\ \quad i = 1, 2, \dots, n-1; \\ \dot{z}_n = g_n(x) H^T(t) \Phi(t) u(t) + c_n \xi_n \omega_n + \Delta_n; \\ \dot{y}_i = -y_i/\tau_i + B_i, \quad i = 2, 3, \dots, n; \\ \dot{\lambda}_{i1} = -\Gamma_{i1} [\|\xi_i\|^2 z_i^2/4\gamma_i^2 - \sigma_{i1} (\hat{\lambda}_{i1} - \lambda_{i0,1})]; \\ \dot{\lambda}_{i2} = -\Gamma_{i2} [\varphi_i^2 z_i^2/4\rho_i^2 - \sigma_{i2} (\hat{\lambda}_{i2} - \lambda_{i0,2})]; \\ \tilde{Z} = E(Z) = Z. \end{cases} \quad (46)$$

其中: 子系统  $\Sigma_{z_\omega}$  的输入  $\omega = [\omega_1^T, \omega_2^T, \dots, \omega_n^T]^T$ , 输出  $\bar{Z} = [z^T, y^T, \tilde{\lambda}_1^T, \tilde{\lambda}_2^T]^T$ , 令  $V = V_n$ , 由 Young' 不等式可得  $z_j z_{j+1} \leq (z_j^2 + z_{j+1}^2)/2, j = 1, 2, \dots, n-1$ . 将这些不等式代入式(41), 整理可得

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \sum_{j=1}^{n-1} \left( \frac{1}{4} g_{j1} - k_j g_{j0} \right) z_j^2 + \sum_{j=1}^{n-1} \left( g_{j1} + 1 - \frac{1}{\tau_{j+1}} \right) y_{j+1}^2 - \\ & k_n g_{n0} z_n^2 + \sum_{j=2}^{n-2} \left( \frac{|g_{\eta_{j-1}} - g_{\eta_j}|}{2} + \frac{|g_{\eta_j} - g_{\eta_{j+1}}|}{2} \right) z_j^2 + \frac{|g_{\eta_1} - g_{\eta_2}|}{2} z_1^2 + \frac{g_{\eta_{n-1}}}{2} z_n^2 + \\ & \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} B_{j+1}^2 + \left( \frac{|g_{\eta_{n-2}} - g_{\eta_{n-1}}|}{2} + \frac{g_{\eta_{n-1}}}{2} \right) z_{n-1}^2 - \\ & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 g_{j0} \sigma_{jk} \tilde{\lambda}_{jk}^2 + \sum_{j=1}^n \gamma_j^2 \|\omega_j\|^2 + \mu_n. \end{aligned} \quad (47)$$

令  $\zeta_j = \max\{g_{j1}, g_{j+1,1}\} - \min\{g_{j0}, g_{j+1,0}\}$ , 则  $|g_{\eta_j} - g_{\eta_{j+1}}| \leq \zeta_{j-1}, j = 1, 2, \dots, n-2$ . 令  $\zeta_{n-1} = g_{n-1,j}$ , 则式(47) 可转化为

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & \left( \frac{1}{4} g_{11} - k_1 g_{10} + \frac{1}{2} \zeta_1 \right) z_1^2 + (-k_n g_{n0} + \frac{1}{2} \zeta_{n-1}) z_n^2 + \\ & \sum_{j=2}^{n-1} \left( \frac{1}{4} g_{j1} - k_j g_{j0} + \frac{1}{2} (\zeta_{j-1} + \zeta_j) \right) z_j^2 + \\ & \sum_{j=1}^{n-1} \left( g_{j1} + 1 - \frac{1}{\tau_{j+1}} \right) y_{j+1}^2 + \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n-1} B_{j+1}^2 + \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n \gamma_j^2 \|\omega_j\|^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^2 g_{j0} \sigma_{jk} \tilde{\lambda}_{jk}^2 + \mu_n. \quad (48)$$

当  $V = q$  时, 有  $B_{i+1}^2 \leq \Theta_{i+1}^2, i = 1, 2, \dots, n-1$ , 且将式(43)和(45)代入(48)可得

$$\dot{V} \leq -\lambda_0 V + \mu_0, \quad (49)$$

其中  $\mu_0 = \mu_n + \sum_{i=1}^{n-1} \Theta_{i+1}^2/4$ . 于是在  $V(0) = q$  的初始条件下, 适当选取设计常数, 使  $\lambda_0 \geq \mu_0/q$ , 则  $\dot{V}(t) \leq 0$ . 因此, 当  $V(0) \leq q$  时,  $V(t) \leq q, \forall t \geq 0$ .

将式(43)代入(48)可得

$$\dot{V} \leq -\|Z\|^2 + \gamma^2 \|\omega\|^2 + \mu_0. \quad (50)$$

由 ISS 定义可知, 此时子系统  $\Sigma_{z\omega}$  满足输入状态实际稳定 (ISpS), 且  $\alpha_3(s) = s^2, \alpha_4(s) = \gamma^2 s^2$ . 由式(32) ( $i = n$ ) 可知, 存在  $K_\infty$  类函数  $\alpha_1(s)$  和  $\alpha_2(s)$ , 使

$$\alpha_1(\|Z\|) \leq V(Z) \leq \alpha_2(\|Z\|). \quad (51)$$

则子系统  $\Sigma_{z\omega}$  的增益为

$$\gamma_z(s) = \alpha_1^{-1} \circ \alpha_2 \circ \alpha_3^{-1} \circ \alpha_4(s), \quad \forall s > 0.$$

由小增益定理可知,  $\forall s > 0, \gamma_z(s) < s$  等价于  $0 < \gamma < 1$ , 于是闭环系统满足 ISpS 稳定条件. 因此, 存在一个 KL 类函数  $\beta$  和常数  $\delta_0 > 0$ , 使

$$\begin{aligned} & \|\left[ z^T, y^T, \tilde{\lambda}_1^T, \tilde{\lambda}_2^T \right]^T\| \leq \\ & \beta(\|z^T(0), y^T(0), \tilde{\lambda}_1^T(0), \tilde{\lambda}_2^T(0)\|^T, t) + \delta_0. \end{aligned} \quad (52)$$

由此可知  $z, y, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2 \in L_\infty$ , 从而  $x(t)$  有界, 即闭环系统半全局一致终结有界.  $\square$

限于篇幅, 仿真略.

## 4 结 论

本文将 ISS 理论和动态面控制技术相结合, 对一类具有未知死区和摄动的非线性纯反馈系统提出一种自适应跟踪控制策略. 将动态面技术融入自适应 Backstepping 设计中, 从而避免了对虚拟控制反复求导数. 本文所设计的控制器结构简单, 只有较少的学习参数需要在线调节.

## 参考文献 (References)

- [1] Sontag E D. Smooth stabilization implies coprime factorization[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1989, 34(4): 435-443.
- [2] Jiang Z P, Teel A R, Praly L. Small-gain theorem for ISS systems and applications [J]. Mathematics of Control Signals and Systems, 1994, 7(1): 95-120.
- [3] Jiang Z P, Iven M Y. A small-gain control method for nonlinear cascaded systems with dynamic uncertainties [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1997, 42(3): 292-308.
- [4] Jiang Z P. A combined backstepping and small-gain approach to adaptive output feedback control [J]. Automatica, 1999, 35(6): 1131-1139.
- [5] Yang Y S, Zhou C J. Robust adaptive fuzzy tracking control for a class of perturbed strict feedback nonlinear systems via small-gain approach [J]. Information Sciences, 2005, 170(2-4): 211-234.
- [6] Wang C, Hill D J, Ge S S, et al. An ISS modular approach for adaptive neural control of pure feedback systems[J]. Automatica, 2006, 42(5): 723-731.
- [7] Yan X H, Xie X J, Liu H K. Decentralized adaptive regulation for nonlinear systems with ISS inverse dynamics[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(2): 167-171.
- [8] Yip P P, Hedrick J K. Adaptive dynamic surface control: A simplified algorithm for adaptive backstepping control of nonlinear systems[J]. Int J of Control, 1998, 71(5): 959-979.
- [9] Swaroop D, Hedrick J K, Yip P P, et al. Dynamic surface control for a class of nonlinear systems [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2000, 45(10): 1893-1899.
- [10] Wang D, Huang J. Neural network-based adaptive dynamic surface control for a class of uncertain nonlinear systems in strict-feedback form [J]. IEEE Trans on Neural Networks, 2005, 16(1): 195-202.
- [11] Zhang T P, Ge S S. Direct adaptive NN control of nonlinear systems in strict-feedback form using dynamic surface control[C]. IEEE Int Symposium on Intelligent Control. Singapore, 2007: 315-320.
- [12] Zhang T P, Ge S S. Adaptive dynamic surface control of nonlinear systems with unknown dead zone in pure feedback form [J]. Automatica, 2008, 44(7): 1895-1903.
- [13] Ge S S, Wang C. Adaptive NN control of uncertain nonlinear pure-feedback systems [J]. Automatica, 2002, 38(4): 671-682.
- [14] Zhang T P, Ge S S. Robust adaptive neural control of SISO nonlinear systems with unknown dead-zone and completely unknown control gain [C]. IEEE Int Symposium on Intelligent Control. Munich, 2006: 88-93.
- [15] Zhang T P, Ge S S. Adaptive neural control of MIMO nonlinear state time-varying delay systems with unknown dead-zone and gain signs [J]. Automatica, 2007, 43(6): 1021-1033.
- [16] Wang L X. A course in fuzzy systems and control[M]. New York: Prentice-Hall, 1997.