文章编号：1001-0920(2009)12-1877-04

基于集对分析的区间概率随机多准则决策方法

王坚强，龚　岚
（中南大学 商学院，长沙 410083）

摘　要：定义了区间概率空间以及区间概率随机变量.针对准则权重确知且准则值为区间概率随机变量的多准则决策问题,提出一种基于集对分析的决策方法.该方法首先根据离差最大化,确定各随机变量的概率,将区间型概率问题转化为经典的确定型概率问题;然后利用集对分析建立规划模型,将区间状态值用联系数表示,并根据集对势序准则对方案进行排序;最后通过实例说明该方法的有效性和可行性.

关键词：区间概率随机变量；集对分析；离差最大化；多准则决策
中图分类号：C934　　　**文献标识码**：A

Interval probability stochastic multi-criteria decision-making approach based on set pair analysis

WANG Jian-qiang, *GONG Lan*
(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: WANG Jian-qiang, E-mail: jqwang@csu.edu.cn)

Abstract: Interval probability space and random variable with interval probability and interval status value, called interval probability interval random variable, are defined. For a kind of multi-criteria decision-making problem, in which the criteria weights are precisely known and the criteria values are interval probability interval random variable, an approach based on set pair analysis is proposed. In this approach, the algorithm of maximizing deviation is adopted to get the exact probability. The problem of interval probability can be transfer to the classic problem of exact probability. Then the set pair analysis is used to rank the alternatives. Finally, an example is used to show the feasibility and effectiveness of the method.

Key words: Interval probability interval random variable; Set pair analysis; Algorithm of maximizing deviation; Multi-criteria decision-making

1 引　　言

多准则决策广泛存在于社会、经济、管理等多个领域,如投资决策、项目评估、质量评估、方案选优、经济效益综合评价等问题.由于客观事物的复杂性以及决策者认识的模糊性,不确定型多准则决策问题已成为现代决策科学的一个研究热点.不确定性主要表现为模糊性和随机性.关于模糊或随机多准则决策问题已取得了很多研究成果[1-4].但仅仅模糊性或随机性还不能完全模拟现实不确定的决策环境.在决策过程中,常常还会面临一种混合的不确定环境,即模糊性和随机性同时存在.模糊随机问题主要分为 3 类,即模糊事件-精确概率、清晰事件-模糊概率和模糊事件-模糊概率.目前对于模糊随机问题的研究主要集中在第 1 类[5-9].对于第 2,第 3 类的模糊随机问题研究,还只见于对其变量的数学特征的探讨[10,11],而针对其在多准则决策领域方面的研究则较少.后两类模糊随机问题研究的关键在于对概率不确定性的探讨.随机多准则决策中的概率是指在理想条件下,可足够多次重复实验的某随机事件发生的频度,它刻画了事件发生可能性的大小.但在现实生活中,由于环境的复杂性和不确定性,事件的发生都会受许多不可知因素的影响,任何事件都不可能在完全一致的条件下多次重复,因此理想实验条件下概率的精确性在现实生活中失去了意义.

收稿日期：2009-01-31；**修回日期**：2009-05-07.
基金项目：国家自然科学基金重点项目(70631004)；国家自然科学基金项目(70771115)；湖南省科学计划项目(2008FJ3128).
作者简介：王坚强(1963—),男,湖南湘潭人,教授,博士,从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究；龚岚(1984—),女,湖南邵阳人,硕士,从事决策理论与应用、信息管理等研究.

事实上,对复杂和不确定环境的适应,使得人们更习惯于在判断和决策过程中采用模糊的思维方式.人们在评估一个事件的概率时,通常会对概率进行一个主观直觉上的估计,因此用不确定性变量代替精确数来表示事件的概率更符合现实需求.

本文针对准则权重确知且准则值为区间概率随机变量的模糊随机多准则决策问题,提出一种基于集对分析的决策方法.集对分析采取了与某些不确定性理论不同的处理方法.它将不确定性与确定性作为一个系统加以研究.借助对系统中确定性与不确定性相互依存、相互联系、相互渗透和在一定条件下相互转化过程的描述、分析、处理,研究不确定性在具体条件下的取值规律[12].

2 区间概率及区间概率随机变量

本文仅考虑离散概率空间的情况,若无特别说明,则文中所提到的概率空间均为离散概率空间.

定义 1 设 Ω 为样本空间,A 为事件域,对于任意随机事件 $\omega \in A$,定义函数 $\mathrm{Pr}:\omega \to I$,其中 I 是 $[0,1]$ 上所有闭区间构成的集合.记 $\mathrm{Pr}(\omega)=[\mathrm{Pr}^-(\omega),\mathrm{Pr}^+(\omega)]$.若 $\mathrm{Pr}(\omega)$ 满足 $0\leqslant \mathrm{Pr}^-(\omega)<\mathrm{Pr}^+(\omega)\leqslant 1$,$\mathrm{Pr}^-(\Omega)\leqslant 1$,$\mathrm{Pr}^+(\Omega)\geqslant 1$,则称 $\mathrm{Pr}(\omega)$ 为随机事件 ω 的区间概率,Pr 为 (Ω,A) 上的概率,(Ω,A,Pr) 为区间概率空间.

定义 2 设 ξ 是一个从区间概率空间 (Ω,A,Pr) 到区间数集合的函数,并且对 R 上的任何 Borel 集 B,$\mathrm{Pos}\{\xi(\omega)\in B\}$ 和 $\mathrm{Pos}\{\mathrm{Pr}(\omega)\in B\}$ 都是 ω 的可测函数,则称 ξ 为一个区间概率随机变量.

例如,下式为一个区间概率随机变量:

$$\xi=\begin{cases}[\xi^-(\omega_1),\xi^+(\omega_1)],\ [\mathrm{Pr}^-(\omega_1),\ \mathrm{Pr}^+(\omega_1)];\\ [\xi^-(\omega_2),\ \xi^+(\omega_2)],\ [\mathrm{Pr}^-(\omega_2),\ \mathrm{Pr}^+(\omega_2)];\\ \qquad\vdots\\ [\xi^-(\omega_n),\xi^+(\omega_n)],\ [\mathrm{Pr}^-(\omega_n),\ \mathrm{Pr}^+(\omega_n)].\end{cases} \tag{1}$$

其中:$[\xi^-(\omega_i),\xi^+(\omega_i)]$ 表示第 i 个状态的值,$[\mathrm{Pr}^-(\omega_i),\mathrm{Pr}^+(\omega_i)]$ 表示第 i 个状态的概率.

定义 3 设 ξ 为一个区间概率随机变量,$\mathrm{Pr}(\omega)$ 表示其区间概率,若:

1) $0\leqslant \sum \mathrm{Pr}^-(\omega_k)\leqslant \sum \mathrm{Pr}^+(\omega_k)\leqslant 1$,则称 ξ 的信息量不完全;

2) $0\leqslant \sum \mathrm{Pr}^-(\omega_k)\leqslant 1\leqslant \sum \mathrm{Pr}^+(\omega_k)$,则称 ξ 的信息量完全;

3) $1\leqslant \sum \mathrm{Pr}^-(\omega_k)\leqslant \sum \mathrm{Pr}^+(\omega_k)$,则称 ξ 的概率 $\mathrm{Pr}(\omega)$ 是不合理的.

3 一种区间概率随机多准则决策方法

设某多准则决策问题,其方案集为 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_s\}$,准则集为 $U=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$,且各准则相互独立,准则权重向量为 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_m)^{\mathrm{T}}$.由于决策环境的不确定性,该决策问题存在 r 种自然状态,状态集为 $\Theta=(\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_r)$,第 k 种状态的概率为 $p_k\in[p_k^-,p_k^+]$.方案 a_i 的准则 u_j 在第 k 种状态下的值为 $y_{ijk}\in[y_{ijk}^-,y_{ijk}^+]$,从而可得决策矩阵 $D=(y_{ijk})_{s\times m\times r}$.现欲确定方案集的一个排序.

上述决策问题的求解步骤如下:

Step1 对状态值进行规范化处理.为了消除各准则的不同物理量纲对决策结果的影响,需要对决策信息中的状态值进行规范化处理.采用比重变换法[13],将决策矩阵 $D=(y_{ijk})_{s\times m\times r}$ 转化为规范决策矩阵 $D'=(x_{ijk})_{s\times m\times r}$.

对于效益型准则

$$x_{ijk}^-=y_{ijk}^-\Big/\sum_{i=1}^{s}y_{ijk}^+,\ x_{ijk}^+=y_{ijk}^+\Big/\sum_{i=1}^{s}y_{ijk}^-; \tag{2}$$

对于成本型准则

$$x_{ijk}^-=\frac{1}{y_{ijk}^+}\Big/\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{y_{ijk}^-},\ x_{ijk}^+=\frac{1}{y_{ijk}^-}\Big/\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{y_{ijk}^+}. \tag{3}$$

Step2 将区间概率转化为精确概率.本文将采用离差最大化方法[14]来获得确定概率.其基本思想是:若所有决策方案在状态 θ_k 下的所有准则值差异越小,则说明该状态对方案优劣比较的作用越小;反之,如果在某状态下所有决策方案的准则值有较大的偏差,则说明该状态对方案优劣比较将起重要作用.因此从决策角度看,偏差越大,则应在可能的概率区间中取越大的概率;偏差越小,则应在可能的概率区间中取越小的概率.

对于状态 θ_k,决策方案 a_i 与其他所有决策方案的偏差为

$$L_i(\theta_k)=\sum_{h=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}d(x_{ijk},x_{hjk})\cdot\omega_j. \tag{4}$$

其中 $d(x_{ijk},x_{hjk})=\{\max[(x_{ijk}^- - x_{hjk}^-)^2,(x_{ijk}^+ - x_{hjk}^+)^2]\}^{1/2}$ 为欧氏距离.

对于状态 θ_k,各决策方案准则值的偏差为

$$L(\theta_k)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{h=1}^{s}\sum_{j=1}^{m}d(x_{ijk},x_{hjk})\cdot\omega_j. \tag{5}$$

根据离差最大化的思想,状态概率 p_k 应使所有决策方案在各属性下的总偏差之和最大.因此,构造优化模型为

$$\begin{aligned}&\max L(\theta)=\sum_{k=1}^{r}L(\theta_k)\cdot p_k;\\ &\mathrm{s.t.}\ \sum_{k=1}^{r}p_k=1,\\ &\qquad p_k^-\leqslant p_k\leqslant p_k^+.\end{aligned} \tag{6}$$

通过求解式(6),可得状态的精确概率值 p_k.

Step3　根据集对分析[10]的思想，计算每个方案的加权联系数. 设规范化后的区间概率随机变量 ξ 的某状态值为 $[x_{ijk}^-, x_{ijk}^+]$，且 $0 \leqslant x_{ijk}^- \leqslant x_{ijk}^+ \leqslant 1$，则基于集对分析的思想，区间数 $[x_{ijk}^-, x_{ijk}^+]$ 和"1"的关系便可用集对联系数表示

$$\mu([x_{ijk}^-, x_{ijk}^+], 1) = a_{ijk} + b_{ijk}\hat{i} + c_{ijk}\hat{j},$$
$$\hat{i} \in (0,1),\ \hat{j} = 0.$$

其中

$$a_{ijk} = \frac{x_{ijk}^- - 0}{1-0} = x_{ijk}^-,$$
$$b_{ijk} = \frac{x_{ijk}^+ - x_{ijk}^-}{1-0} = x_{ijk}^+ - x_{ijk}^-,$$
$$c_{ijk} = \frac{1 - x_{ijk}^+}{1-0} = 1 - x_{ijk}^+.$$

则各方案的加权联系数可表示为

$$\mu(a_i, U) = \sum_{j=1}^{m}\omega_j \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} \cdot p_k + \sum_{j=1}^{m}\omega_j \sum_{k=1}^{r} b_{ijk} \cdot p_k\hat{i} + \sum_{j=1}^{m}\omega_j \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} \cdot p_k\hat{j},$$

其中 $U = (1,1,\cdots,1)_{1\times m}$ 为每个准则值都为 1 的"完美"方案.

Step4　根据集对势序准则对方案进行排序，即

$$\mathrm{shi}(\mu(a_i, U)) = \frac{\sum_{j=1}^{m}\omega_j \sum_{k=1}^{r} a_{ijk} \cdot p_k}{\sum_{j=1}^{m}\omega_j \sum_{k=1}^{r} c_{ijk} \cdot p_k}. \qquad (7)$$

$\mathrm{shi}(\mu(a_i, U))$ 越大，则方案越优. 根据 $\mathrm{shi}(\mu(a_i, U))$ 的大小可得到方案集的排序.

4　实例分析

设某公司将进行新产品开发，有 4 种方案供选择，分别记为 $a_i(1 \leqslant i \leqslant 4)$. 选择 3 个准则对产品开发前景进行评价：$e_1$ 为开发成本，e_2 为产品销售量，e_3 为产品利润. 准则权重分别为 $\omega_1 = 0.2, \omega_2 = \omega_3 = 0.4$. 由于受宏观经济环境的影响，各准则在不同的环境下呈现出不同的状态. 为便于研究，将未来宏观经济环境分为3种，分别为好、一般和坏. 公司决策者估计其概率分别为[0.3, 0.5]，[0.2, 0.4]，[0.2, 0.3]. 表 1 ～ 表 3 分别给出了在不同宏观经济环境下的评价信息.

表 1　宏观经济环境差时的决策信息

环境差	e_1	e_2	e_3
a_1	[3,4]	[35,47]	[5,6]
a_2	[6,7]	[78,83]	[9,10]
a_3	[9,10]	[66,74]	[7,8]
a_4	[5,6]	[43,57]	[2,3]

表 2　宏观经济环境一般时的决策信息

环境一般	e_1	e_2	e_3
a_1	[4,5]	[55,67]	[8,9]
a_2	[7,8]	[89,103]	[12,14]
a_3	[10,11]	[77,94]	[7,8]
a_4	[6,7]	[62,71]	[5,6]

表 3　宏观经济环境好时的决策信息

环境好	e_1	e_2	e_3
a_1	[6,8]	[75,89]	[8,9]
a_2	[10,11]	[89,103]	[13,15]
a_3	[9,10]	[80,90]	[10,13]
a_4	[6,7]	[65,75]	[9,10]

1）对初始决策信息进行规范化处理

对表 1 ～ 表 3 中的初始决策信息进行规范化处理，处理后的决策信息如表 4 ～ 表 6 所示.

表 4　宏观经济环境差时的规范化决策信息

环境差	e_1	e_2	e_3
a_1	[0.308,0.505]	[0.134,0.212]	[0.185,0.261]
a_2	[0.168,0.253]	[0.298,0.374]	[0.333,0.434]
a_3	[0.123,0.168]	[0.253,0.333]	[0.259,0.348]
a_4	[0.205,0.303]	[0.164,0.257]	[0.074,0.130]

表 5　宏观经济环境一般时的规范化决策信息

环境一般	e_1	e_2	e_3
a_1	[0.303,0.447]	[0.164,0.237]	[0.216,0.281]
a_2	[0.189,0.256]	[0.266,0.364]	[0.324,0.438]
a_3	[0.137,0.179]	[0.229,0.332]	[0.189,0.25]
a_4	[0.217,0.298]	[0.185,0.251]	[0.135,0.187]

表 6　宏观经济环境好时的规范化决策信息

环境好	e_1	e_2	e_3
a_1	[0.229,0.363]	[0.210,0.288]	[0.170,0.225]
a_2	[0.167,0.218]	[0.249,0.333]	[0.277,0.375]
a_3	[0.183,0.242]	[0.224,0.291]	[0.213,0.325]
a_4	[0.262,0.363]	[0.182,0.243]	[0.191,0.25]

2）计算确定概率

各方案与其他方案的差异如表 7 所示.

表 7　各方案间的差异度

	θ_1	θ_2	θ_3
a_1	0.447	0.332	0.212
a_2	0.441	0.410	0.269
a_3	0.370	0.290	0.191
a_4	0.445	0.311	0.224
$\sum a_i$	1.703	1.343	0.896

根据离差最大化,建立优化模型为

$$\max L(\theta) = 1.703p_1 + 1.343p_2 + 0.896p_3;$$
$$\text{s.t. } p_1 + p_2 + p_3 = 1,$$
$$0.3 \leqslant p_1 \leqslant 0.5,$$
$$0.2 \leqslant p_2 \leqslant 0.4,$$
$$0.2 \leqslant p_3 \leqslant 0.3.$$

采用 LINDO8.0 求解,可得

$$L(\theta) = 1.434,\ p_1 = 0.5,\ p_2 = 0.3,\ p_3 = 0.2.$$

3) 计算各方案的集对势序

首先计算出各方案在各准则下的联系数,将其集成,得到各方案的加权联系数,如表 8 所示.

表 8 方案的加权联系数

方案	加权联系数
a_1	$0.198 + 0.092\hat{i} + 0.710\hat{j}$
a_2	$0.275 + 0.088\hat{i} + 0.636\hat{j}$
a_3	$0.216 + 0.077\hat{i} + 0.707\hat{j}$
a_4	$0.160 + 0.072\hat{i} + 0.768\hat{j}$

然后利用式(7) 计算各方案的势序分别为

$$\text{shi}(\mu_1) = 0.279,\ \text{shi}(\mu_2) = 0.432,$$
$$\text{shi}(\mu_3) = 0.305,\ \text{shi}(\mu_4) = 0.209.$$

有 $\text{shi}(\mu_4) < \text{shi}(\mu_1) < \text{shi}(\mu_3) < \text{shi}(\mu_2)$. 因此,方案集的排序为 $a_4 \prec a_1 \prec a_3 \prec a_2$.

5 结 论

本文定义了区间概率空间以及区间概率随机变量,在此基础上,针对准则权重确知且准则值为信息量完全的区间概率随机变量的多准则决策问题,提出了一种基于集对分析的决策方法,并详细讨论了其实现步骤.实例表明了该方法的有效性、可行性和可操作性.该方法可用于区域产业选择、投资效益评价等相关决策中.

参考文献(References)

[1] 徐泽水. 部分权重信息下对方案有偏好的多属性决策法[J]. 控制与决策, 2004, 19(1): 85-88.
(Xu Z S. Method for multi-attribute decision making with preference information on alternatives under partial weight information[J]. Control and Decision, 2004, 19(1): 85-88.)

[2] 曾玲, 曾三云. 给出方案优先序的模糊多属性决策方法[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 27(5): 113-119.
(Zeng L, Zeng S Y. Fuzzy multiple attribute decision making method with alternative priority[J]. Systems Engineering-Theory & Practice, 2007, 27(5): 113-119.)

[3] 罗党, 刘思峰. 灰色多指标风险型决策方法研究[J]. 系统工程与电子技术, 2004, 26(6): 1057-1060.
(Luo D, Liu S F. Research on grey multi-criteria risk decision-making method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(6): 1057-1060.)

[4] 姚升保. 基于随机优势与概率优势的风险型多属性决策方法[J]. 预测, 2007, 26(3): 33-38.
(Yao S B. A method based on stochastic dominance and probability dominance for multi-attribute decision making under risk[J]. Forecasting, 2007, 26(3): 33-38.)

[5] Liu B D. Fuzzy random chance-constrained programming [J]. IEEE Trans on Fuzzy Systems, 2001, 9(5): 713-720.

[6] Liu Y K, Liu B D. A class of fuzzy random optimization expected value models[J]. Information Sciences, 2003, 155(1/2): 89-102.

[7] Liu Y K, Liu B D. On minimum-risk problems in fuzzy random decision systems[J]. Computers & Operation Research, 2005, 32(2): 257-283.

[8] Katagiri H. A fuzzy random multiobjective 0-1 programming based on the expectation optimization model using possibility and necessity measures[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2004, 40(3/4): 411-421.

[9] Katagiri H. Interactive multiobjective fuzzy random linear programming: Maximization of possibility and probability[J]. European J of Operational Research, 2008, 188(2): 530-539.

[10] 吕恩琳, 钟佑明. 模糊概率随机变量[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(4): 434-440.
(Lv E L, Zhong Y M. Random variable with fuzzy probability[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2003, 24(4): 434-440.)

[11] 柳美, 孙玉琴, 李安贵. 模糊概率随机变量的数学期望和方差[J]. 包头钢铁学院学报, 2006, 25(3): 296-298.
(Liu M, Sun Y Q, Li A G. Mathematical expectation and variance of random variable with fuzzy probability [J]. J of Baotou University of Iron and Steel Technology, 2006, 25(3): 296-298.)

[12] 赵克勤. 集对分析对不确定性的描述和处理[J]. 信息与控制, 1995, 24(3): 162-166.
(Zhao K Q. Disposal and description of uncertainties based on the set pair analysis[J]. Information and Control, 1995, 24(3): 162-166.)

[13] 尤天慧, 樊治平. 区间数多指标决策的一种 TOPSIS 方法[J]. 东北大学学报, 2002, 23(9): 840-843.
(You T H, Fan Z P. Topsis method for multiple attribute decision making with intervals[J]. J of Northeastern University, 2002, 23(9): 840-843.)

[14] 王应明. 运用离差最大化方法进行多指标决策与排序[J]. 系统工程与电子技术, 1998, 20(7): 24-26.
(Wang Y M. Multiple attribute decision making based on maximizing deviations[J]. Systems Engineering and Electronics, 1998, 20(7): 24-26.)