

中国科学院自动化研究所
2014 年招收攻读博士学位研究生入学统一考试试卷
科目名称：数 学

考生须知：

1. 本试卷满分为 100 分，全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。
-

一. (15 分) 已知矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

试求矩阵函数 $e^{tA} \sin A$

二. (10 分) 设 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ 是一个复数域上的方阵， ε 是任意正实数。证明存在某种矩阵范数 $\|\cdot\|_M$ ，使得

$$\|A\|_M \leq \rho(A) + \varepsilon$$

其中， $\rho(A)$ 是矩阵 A 的谱半径。

三. (15 分) 试求矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

的奇异值分解。

四. (10 分) 证明：对任意 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ，存在唯一的 Moore-Penrose 逆 A^+ 。

五. 某工厂的车床, 钻床, 磨床, 刨床的台数之比为 9: 3: 2: 1, 它们在一定时间内需要修理的概率之比为 1: 2: 3: 1. 当一台机床需要修理时, 求这台机床是车床的概率。(10 分)

六. 设随机变量 (ξ, η) 的分布律为

$\eta \backslash \xi$	1	2
0	0.2	0.1
1	0.3	0.15
2	0	0.25

ξ, η 是否独立? 为什么? 并求 $X = \xi - \eta$ 的分布律。(10 分)

七. 设二维随机变量 (X, Y) 的联合概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} c \cdot e^{-y}, & 0 < x < y \\ 0 & \text{其它.} \end{cases}$$

试求 $Z = Y - X$ 的分布密度。(10 分)

八. 设 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自于均匀分布 $U(\theta, \theta + 1)$ 的独立同分布样本, 试求 θ 的极大似然估计。(10 分)

九. 根据长期的经验, 某工厂生产的特种金属丝的折断力 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (单位: kg). 已知 $\sigma = 8$ kg, 现从该厂生产的一大批特种金属丝中随机抽取 10 个样品, 测得样本均值 $\bar{X} = 575.2$ kg. 在给定显著性水平 $\alpha = 5\%$ 下, 这批特种金属丝的平均折断力可否认为超过 570 kg? (10 分)(已知标准正态分布数值 $\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(1.6449) = 0.95$)