文章编号：1001-0920(2009)11-1601-08

具有时延的多个体系统的一致性问题综述

刘成林，田玉平
(东南大学 自动化学院，南京 210096)

摘 要：考察了具有时延的多个体系统的一致性问题.根据不同的分析方法,介绍了关于具有通信时延的多个体系统一致性问题的结果,并对各种分析方法的特点进行了比较.此外,对具有输入时延的多个体系统的现有一致性结果也作了介绍.最后评述了该研究领域存在的问题以及今后的研究方向.

关键词：多个体系统；通信时延；输入时延；一致性问题
中图分类号：TP242 **文献标识码**：A

Survey on consensus problem of multi-agent systems with time delays

LIU Cheng-lin, *TIAN Yu-ping*
(School of Automation, Southeast University, Nanjing 210096, China. Correspondent: TIAN Yu-ping, E-mail: yptian@seu.edu.cn)

Abstract: Consensus problem of the multi-agent systems with time delays is considered. The results obtained by different analysis methods regarding the consensus of multi-agent systems with communication delays are introduced in detail, and the characteristics of the methods are compared with each other. In addition, the recent results on the consensus of the multi-agent systems with input delays are also introduced. Finally, some existing problems and future research directions in this research field are discussed.

Key words: Multi-agent systems; Communication delay; Input delay; Consensus problem

1 引 言

近年来,多个体系统的协调控制引起了众多研究领域学者的研究兴趣[1,2],如生物、人工智能、自动控制等.目前,作为多个体系统的协调控制中最基本的问题之一,一致性问题受到了科学工作者的广泛关注.在多个体系统中,一致性是指空间分布的几个个体或者处理器,在没有中央协调控制或者全局通信的情况下,个体之间通过局部的相互耦合作用,达到一个相同的状态或输出.为了达到一致,个体之间通过通信或传感网络相互交换共同感兴趣的信息,并通过一定的分散耦合算法来实现状态一致.该算法被称为一致性算法.个体之间交换的状态信息代表多个体系统的协调变量,它可以表示群集运动的方向、编队的中心信息等[3].此外,一致性协调控制的研究在多个体系统的其他研究课题中起到了非常重要的作用,如耦合同步、群集算法的设计、多机器人系统的编队控制等.

在多个体系统的协调控制网络中,个体之间通过传感器或通信设备进行信息传输而产生的通信时延,对系统集体行为的影响不容忽视.目前,具有通信时延的多个体系统的一致性问题引起了广泛关注.除通信时延外,多个体系统还存在另外一种不容忽视的时延:个体自身对于外部作用或信号的处理或连接时间,称之为输入时延.输入时延问题在经典控制理论中已经得到了深入的研究[4],但目前关于具有输入时延的多个体系统的一致性问题的研究相对较少.

2 多个体系统的一致性问题

一致性问题的研究已有很长一段时间,在管理科学与统计研究领域一直备受关注[5,6].1995 年,Vicsek 等[7]提出了一个离散时间模型来刻画多自动个体系统,模型中个体方向的一致性现象激发了

收稿日期：2009-01-14；**修回日期**：2009-04-28.
基金项目：国家 863 计划项目(2006AA04Z263).
作者简介：刘成林(1981—),男,江苏泗阳人,博士,从事非线性控制、多个体系统等研究；田玉平(1964—),男,安徽马鞍山人,教授,博士生导师,从事非线性控制、鲁棒控制、网络拥塞控制等研究.

众多学者对多个体系统一致性问题的研究兴趣.

2.1 个体动态

目前,在多个体系统的一致性问题研究中,个体动态的描述有单积分、双积分等.

2.1.1 单积分

$$\dot{x}_i = u_i,\ i = 1,\cdots,n, \tag{1}$$

其中:$x_i \in R$ 和 $u_i \in R$ 分别表示个体 i 的状态和控制输入. 模型(1) 描述了个体质点的运动学方程. 在任意的初始状态下,对于任意 $i,j = 1,\cdots,n$,如果 $\lim\limits_{t\to\infty}(x_i - x_j) = 0$,则称系统(1) 渐近达到一致;如果最终收敛的一致状态为所有个体初始值的平均值,则称系统(1) 渐近达到平均一致. 此外,系统(1) 通常被称为一阶多个体系统.

在一致性问题研究中,如下个体动态为单积分的离散时间多个体系统也深受关注:

$$x_i(k+1) = x_i(k) + u_i(k),\ i = 1,\cdots,n. \tag{2}$$

2.1.2 双积分

$$\dot{x}_i = v_i,\ \dot{v}_i = u_i,\ i = 1,\cdots,n. \tag{3}$$

其中:$x_i \in R$,$v_i \in R$ 和 $u_i \in R$ 分别表示个体 i 的位置、速度和加速度. 模型(3) 刻画了个体质点的动力学模型. 在任意的初始状态下,对于任意 $i,j = 1,\cdots,n$,如果 $\lim\limits_{t\to\infty}(x_i(t) - x_j(t)) = 0$ 且 $\lim\limits_{t\to\infty}(v_i(t) - v_j(t)) = 0$,则称系统(3) 渐近达到一致. 通常,系统(3) 被称为二阶多个体系统.

除单积分和双积分之外,个体动态还可以采用其他模型来描述,如高阶积分器[8]、轮式小车的运动学模型[9]、非完整链式系统[10] 等. 然而,目前关于时延作用下的一致性分析仍主要针对一阶和二阶多个体系统.

2.2 连接拓扑描述

n 阶加权有向图 $G = (V,E,A)$ 由节点集 $V = \{1,2,\cdots,n\}$,边集 $E \subseteq V\times V$ 和加权邻接矩阵 $A = [a_{ij}] \in R^{n\times n}(a_{ij} \geqslant 0)$ 组成[11]. 节点指标属于一个有限指标集 $\mathscr{L} = \{1,2,\cdots,n\}$. 在 G 中,从节点 i 到节点 j 的有向边表示 $e_{ij} = (i,j) \in E$. 假定 $a_{ij} > \Leftrightarrow e_{ij} \in E$ 且 $a_{ii} = 0, \forall i \in \mathscr{L}$,则节点 i 的邻居节点集为 $N_i = \{j \in V : (i,j) \in E\}$. 在有向图 G 中,如果 $(i,j) \in E \Leftrightarrow (j,i) \in E$,则称 G 为无向图或双向图.

在图 G 中,节点 i 的输出度和输入度分别为

$$\deg_{\text{out}}(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij},\ \deg_{\text{in}}(i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}.$$

节点 i 是平衡的,当且仅当 $\deg_{\text{out}}(i) = \deg_{\text{in}}(i)$;图 G 是平衡的,当且仅当每个节点都是平衡的. 图 G 的度矩阵 D 为对角阵,其对角元素为图 G 中对应节点的输出度. 图 G 的 Laplacian 矩阵定义为 $L = D - A$.

在图 G 中,如果从节点 i 到节点 j 之间有一条路径,则 j 称为从节点 i 可达的;否则,j 称为从节点 i 不可达的. 如果一个节点从有向图中任意其他节点都是可达的,则称该节点为全局可达的. 若有向图中任意节点都是全局可达的,则该有向图为强连通. 对于一个无向图,如果它含有一个全局可达节点,则称该无向图为连通的.

此外,关于切换连接拓扑图相结合的描述方法主要有图合并[12,13] 和图合成[14].

3 具有通信时延的多个体系统的一致性

3.1 具有通信时延的一致性协调控制

在多个体系统的一致性研究中,一致性算法的协调控制项对通信时延的处理方式主要有两种:

1) 在协调控制项中,个体用自身的延时状态与延时邻居状态信息相比,且个体自身状态的时延与对应邻居状态的通信时延大小相同,即

$$u_{i-c}(t) = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(t-T_{ij}) - x_i(t-T_{ij})). \tag{4}$$

其中:$u_{i-c}(t)$ 表示协调控制项,$a_{ij} > 0, j \in N_i$,通信时延 $T_{ij} > 0$ 对应于从个体 j 到个体 i 的信息流. 在算法(4) 中,邻居个体之间实现了状态的同步匹配,因此该算法在静态一致和动态一致研究中都得到了广泛应用. 由于个体需确切知道邻居个体的通信时延大小,算法(4) 对通信时延不确定性的鲁棒性比较弱.

2) 在协调控制项中,个体用自身当前状态与延时邻居状态信息相比,即

$$u_{i-c}(t) = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(t-T_{ij}) - x_i(t)). \tag{5}$$

与算法(4) 不同,由于个体采用的是自身当前状态,算法(5) 对通信时延的不确定性具有很强的鲁棒性. 尽管如此,由于邻居个体之间状态不是同步匹配,该算法只在静态一致性问题中得到了广泛应用,而在动态一致研究中却很难采用.

对于相同的一致性协调控制算法,若通信时延的处理方式不同,则通信时延对一致性收敛的影响也不相同.

3.2 具有通信时延的多个体系统一致性分析

目前,人们利用不同的分析方法,对具有通信时延的多个体系统的一致性问题进行了广泛研究. 下面按照不同的分析方法来介绍相关的研究成果.

3.2.1 频域方法

在频域分析法中,主要通过考察系统的特征方程,根据频域判据来分析特征根在复平面内的分布情况,从而确定系统状态的收敛特性.

Saber 等[15] 考察了具有通信时延的一阶多个体系统的一致性问题

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(t-T_{ij}) - x_i(t-T_{ij})). \quad (6)$$

其中：$a_{ij}>0, j\in N_i$，且 $T_{ij}>0$ 为通信时延. 文献[15] 分析了在相同通信时延作用下的一致性收敛问题，即 $T_{ij}=\tau$，有

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)). \quad (7)$$

根据 Nyauist 判据得：在无向连通、权值对称（$a_{ij}=a_{ji}$）的拓扑结构下，系统(7) 渐近收敛一致的充要条件为 $\tau\in(0,\tau^*)$，$\tau^*=\pi/(2\lambda_{\max}(L))$.

Wang 等[16] 考察了具有不同通信时延的一阶多个体系统

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(t-T_{ij}) - x_i(t)). \quad (8)$$

其中：$a_{ij}>0, j\in N_i, T_{ij}>0$ 为通信时延. 根据圆盘定理和最大模原理，文献[16] 证明了：当连接拓扑为强连通时，系统(8) 渐近收敛一致. 同时，文献[16] 求出了系统最终一致状态的表达式.

Lin 等[17] 分析了具有相同通信时延的二阶多个体系统的一致性问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \\ \sum_{j\in N_i} a_{ij}[k_1(x_j(t-\tau) - x_i(t-\tau)) + \\ k_2(v_j(t-\tau) - v_i(t-\tau))]. \end{cases} \quad (9)$$

其中：$a_{ij}>0, j\in N_i$，控制参数 $k_1>0$ 和 $k_2>0$，$\tau>0$ 为通信时延. 根据 Nyquist 判据得到：在无向连通、权值对称的拓扑结构下，系统(9) 渐近达到一致的充要条件为 $\tau\in(0,\tau_{\max})$. 其中 $\tau_{\max}$ 与 k_1, k_2 以及 Laplacian 矩阵的最大特征值有关[17].

利用频域分析法，Yang 等[18] 考察了具有不同时变通信时延的二阶多个体系统一致性问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \\ \sum_{j\in N_i} a_{ij}[(x_j(t-T_{ij}(t)) - x_i(t)) + \\ \gamma(v_j(t-T_{ij}(t)) - v_i(t))]. \end{cases} \quad (10)$$

其中：$a_{ij}>0, j\in N_i$，且 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}=1$，通信时延 $T_{ij}(t)>0$，控制参数 $\gamma>0$. 根据小增益稳定性定理，文献[18] 分别得到了具有时不变和时变通信时延的系统(10)，在含有全局可达节点的拓扑结构下的频域一致性判据，判据与通信时延最大界限、Laplacian 矩阵特征值相关. 此外，文献[18] 已将结论推广应用于具有时延的高阶多个体系统一致性分析.

根据频域方法，Lee 等[19] 考察了个体动态为一般线性模型的多个体系统在具有不同通信时延的协调算法(5) 作用下的静态一致性问题. 在系统的有向连接拓扑含有全局可达节点的条件下，根据多变量反馈系统的谱半径定理，文献[19] 得到了分散形式的频域一致性收敛条件，该条件与通信时延无关.

此外，利用 Backstepping 方法，Dong 等[10] 设计了个体动态为非完整链式模型的多个体系统的一致性算法，在具有相同通信时延的一致性协调控制(4) 作用下，利用频域分析法得到了系统的一致性条件，并给出了系统在权值对称无向连通拓扑结构下的最大时延界限.

3.2.2　Lyapunov 函数法

在时延系统稳定性分析中，Lyapunov 第二方法是广泛采用的时域分析法，主要通过构造 Lyapunov-Krasovskii 和 Lyapunov-Razumikhin 函数，并根据函数关于时间的导数的性质来确定系统状态的收敛特性.

Wang 等[20] 考察了个体动态在多变量描述下，即 $x_i\in R^m$ 和 a_{ij} 为对称正定阵，具有不同通信时延的多个体系统(8) 的一致性问题. 根据压缩理论和波形变量法，并通过构造 Lyapunov- Krasovskii 泛函证明了：在连接拓扑为权值对称的双向连通图或者权值相同的闭环无向图的条件下，不管通信时延 T_{ij} 的大小，系统(8) 都能渐近收敛一致.

此外，Munz 等[21] 考察了具有不同时变通信时延的一阶多个体系统一致性问题

$$\dot{x}_i(t) = k_i \sum_{j\in N_i} g_{ij}(x_j(t-T_{ij}(t)) - x_i(t)). \quad (11)$$

其中：$k_i>0, T_{ij}(t)>0$ 为通信时延，$g_{ij}(\cdot)$ 为局部无源连续非线性函数. 根据 Lyapunov-Razumikhin 函数的不变集原理，文献[21] 证明了：如果连接拓扑在连续有界时间间隔内的合并图含有全局可达节点，则系统(11) 渐近收敛一致.

Lin 等[22,23] 考察了具有相同通信时延的多个体系统(7) 的平均一致问题. 通过构造 Lyapunov-Krasovskii 函数，文献[22] 和[23] 分别给出了具有相同时不变与时变时延的多个体系统(7) 在强连通平衡有向图之间分段任意切换的一致性收敛充分条件. 同时，[23] 还给出了具有相同变化时延的多个体系统(7) 在动态切换强连通平衡有向拓扑结构下渐近收敛平均一致的充分条件. 在[22] 和[23] 中，一致性条件都是时延相关的，并以线性矩阵不等式表示. 此外，Lin 等[24] 考察了具有相同时不变时延的多个体系统(7) 存在连接权值不确定和输入干扰时的一致性问题. 在连接拓扑含有全局可达

节点的条件下,[24] 以线性矩阵不等式的形式,给出了系统满足一定 H^∞ 性能指标要求的一致性收敛充分条件.

Hu 等[25] 考察了具有通信时延的二阶多个体系统(3) 领导-跟随一致性问题

$$\begin{cases}\dot{x}_i(t)=v_i(t),\\ \dot{v}_i(t)=\\ \sum\limits_{j\in N_i}a_{ij}(x_j(t-\tau)-x_i(t-\tau))+\\ b_i(x_0(t-\tau)-x_i(t-\tau))+\\ k(v_0-v_i(t)).\end{cases}\tag{12}$$

其中:$a_{ij}>0, j\in N_i$,控制参数 $k>0,\tau>0$ 为通信时延,$b_i\geqslant 0$ 表示个体与领导者之间的连接权值. 领导者的动态为 $\dot{x}_0(t)=v_0$,其中 v_0 为一常数. 假定个体与领导者构成的连接拓扑以领导者为全局可达节点,文献[25] 利用 Lyapunov-Razumikhin 函数法,分别考察了系统(12) 在静态有向连接拓扑与分段切换平衡有向连接拓扑结构下一致性问题,并相应地给出了时延相关的一致性收敛条件.

除一阶和二阶多个体系统之外,Chopra 等[26] 考察了个体动态为输入输出无源的仿射非线性模型的多个体系统

$$\begin{cases}\dot{x}_i=f_i(x_i)+g_i(x_i)u_i,\\ y_i=h_i(x_i).\end{cases}\tag{13}$$

其中:$x_i\in R^n, u_i\in R^m$ 和 $y_i\in R^m$ 分别为输入和输出,且函数 $f_i(\cdot)\in R^n, g_i(\cdot)\in R^{n\times m}$ 和 $h_i(\cdot)\in R^m$ 充分光滑. 个体采用具有不同通信时延的一致性协调控制

$$u_i=\sum_{j\in N_i}K(y_j(t-T_{ij})-y_i).\tag{14}$$

其中:控制参数 $K>0, T_{ij}>0$ 为通信时延. 利用 Lyapunov-Krasovskii 泛函分析法,文献[26] 展示了:当连接拓扑为强连通且平衡时,系统(13) 在算法(14) 作用下渐近达到输出一致. 利用 Lyapunov 函数法,文献[26] 进一步分析了在非线性耦合一致性算法作用下,系统(13) 渐近达到输出一致的拓扑连通条件.

3.2.3 时延图法

在一致性分析中,如下具有通信时延的离散时间一阶多个体模型也深受关注:

$$x_i(k+1)=\sum_{j\in N_i\cup\{i\}}a_{ij}x_j(k-T_{ij}).\tag{15}$$

其中:$a_{ij}>0, j\in N_i, a_{ii}\geqslant 0$ 且 $\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ij}=1, N_i\cup\{i\}$ 表示个体 i 与其邻居的并,$T_{ij}>0$ 为通信时延且 $T_{ii}=0$. 记 $\bar{A}=\{a_{ij}\}_{n\times n}$,则 $\bar{A}$ 为随机矩阵. 由于延时状态的有限性,系统(15) 可以通过状态扩张转化为非时延系统[27-31]. 因此,系统(15) 可以重新表示为[28]

$$\begin{cases}x(k+1)=\\ (\bar{D}+F_0)x(k)+F_1x(k-1)+\\ \cdots+F_{\tau_{\max}}x(k-\tau_{\max}),\\ x(k)=x(k),\\ \quad\vdots\\ x(t-\tau_{\max}+1)=x(t-\tau_{\max}+1).\end{cases}$$

其中

$$x=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}},\ \tau_{\max}=\max_{i,j\in\mathscr{L}}T_{ij},$$

$$\bar{D}=\mathrm{diag}\{a_{ii},\ i\in\mathscr{L}\},$$

F_m 为对应于时延 m 的系统矩阵. 记

$$z(k)=[x(k+\tau_{\max})^{\mathrm{T}},\cdots,x(k)^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}},$$

则系统(15) 等价于

$$z(k+1)=\Xi z(k),\tag{16}$$

其中矩阵 Ξ 为一随机矩阵[28]. 系统(16) 可看作($\tau_{\max}+1)n$ 个个体构成的离散时间多个体系统,$z(k)$ 中的每个状态对应一个个体,则随机矩阵 Ξ 对应的连接拓扑可描述为一个有向图,文献[14] 称之为时延图. 利用时延图与对应随机矩阵 Ξ 之间的关系,Wang 等[28] 证明了:当系统(15) 的连接拓扑为强连通时,如果 $\bar{D}\neq 0$,则系统渐近收敛一致;如果 $\bar{D}\geqslant \mu I$,其中 $\mu>0$,则系统(15) 在有界时变时延($T_{ij}(k)\leqslant\tau_{\max}$) 作用下,渐近收敛一致的充要条件是连接拓扑含有全局可达节点. 此外,文献[28] 考察了具有相同通信时延的多个体系统(15) 在切换拓扑结构下的一致性问题

$$\begin{aligned}&x(k+1)=\\ &\bar{D}_lx(k)+(\bar{A}_l-\bar{D}_l)x(k-\tau).\end{aligned}\tag{17}$$

如果所有 $\bar{D}_l\geqslant\mu_lI(\mu_l>0)$ 且 $\bar{A}_l$ 对应的连接拓扑含有全局可达节点,则系统(17) 在任意切换下都渐近收敛一致. 此外,Xiao 等[32,33] 在离散通信结构(个体异步接收邻居信息) 下,将该时延图法应用于具有通信时延的连续时间多个体模型(8) 的一致性分析,并展示了:在有界通信时延作用下,多个体系统渐近收敛一致,当且仅当系统的有向连接拓扑结构含有全局可达节点.

Cao 等[14,34] 考察了具有不同通信时延的线性化 Vicsek 模型的一致性问题

$$x_i(k+1)=\frac{\sum\limits_{j\in N_i(k)\cup\{i\}}x_j(k-T_{ij}(k))}{1+n_i(k)}.\tag{18}$$

其中:$T_{ij}(k)>0$ 为时刻 k 的通信时延,且 $T_{ii}=0$. 根据模型自身特点,文献[14] 采用每个节点都有一个自环的有向图来描述模型(18) 的连接拓扑. 通过状态扩张,将时延系统转化为非时延系统(与式(16) 相似),用时延图来描述扩张系统的连接拓扑,并将

原时延系统(18) 的连接拓扑称为商图. 通过引入图合成和等级图的概念,文献[14] 完善地证明了:如果系统(18) 的连接拓扑在连续有界的时间间隔内的合成图为含有全局可达节点的有向图,则具有不同有界通信时延的线性化 Vicsek 模型(18) 渐近收敛一致. 此外,Cao 等[35] 利用图合成和等级图分析了线性化 Vicsek 模型的异步一致性(个体异步感知邻居信息):如果系统连接拓扑在连续有界时间间隔内的合成图含有全局可达节点,则系统渐近达到一致.

3.2.4　其他分析方法

在具有通信时延的一阶多个体系统的一致性研究中,还有根据系统自身特点提出的特殊分析法.

Bliman 等[36] 考察了具有对称通信时延($T_{ij}=T_{ji}$)的多个体系统(6). 记时延的集合为 $\varphi=\{\tau_1,\cdots,\tau_m\}$,则系统(6) 按照不同的通信时延重新表示为

$$\dot{x}(t)=\sum_{\tau_k\in\varphi}L_k x(t-\tau_k). \tag{19}$$

其中:$x=[x_1,\cdots,x_n]^{\mathrm{T}}$,$L_k$ 表示通信时延为 τ_k 的所有连接构成的子图的 Laplacian 矩阵. 在无向连通、权值对称的拓扑结构下,具有相同时不变通信时延($\tau_k=\tau$)的多个体系统(19) 渐近收敛一致的充要条件与文献[15] 相同. 当具有相同时变通信时延($\tau_k=\tau(t)$)时,系统(19) 渐近收敛一致的充要条件为 $\tau(t)\in(0,3/(2\lambda_{\max}(L))$. 结合频域分析法,文献[36] 得到了具有不同时不变通信时延的多个体系统(19) 在无向对称连接拓扑结构下渐近达到一致的充要条件 $\tau_k\in(0,\pi/(2\lambda_{\max}(L)),\forall\tau_k\in\varphi$. 利用 Lyapunov 函数分析法,文献[36]分析了具有不同时变通信时延的多个体系统(19) 在权值对称的无向连接拓扑结构下渐近收敛一致的充分条件,并给出了时延上界的表达式.

对于系统(8),Moreau[37] 考察了具有相同通信时延的一致性问题

$$\dot{x}_i(t)=\sum_{j\in N_i(t)}a_{ij}(t)(x_j(t-\tau)-x_i(t)), \tag{20}$$

其中 $\tau>0$ 为通信时延. 利用最大值与最小值的差值,文献[37] 构造了一个 Lyapunov 泛函

$$V(x_t)=\max_{\sigma\in[t-\tau,t]}\{x_1(\sigma),\cdots,x_n(\sigma)\}-\min_{\sigma\in[t-\tau,t]}\{x_1(\sigma),\cdots,x_n(\sigma)\},$$

其中 x_t 表示在区间 $\sigma\in[t-\tau,t]$ 内的时间函数 $x(\sigma)$,并证明了:在连续有界的时间间隔 T 内,$\int_t^{t+T}A(s)\mathrm{d}s$ 对应的连接图都含有一个全局可达节点($A(t)$ 为时刻 t 的连接矩阵),则系统(20) 渐近收敛一致与通信时延 τ 的大小无关.

上述最大值与最小值的差值分析法同样可应用于离散时间一阶多个体系统[38]

$$x_i(k+1)=\sum_{j\in N_i(k)\cup\{i\}}a_{ij}(k)x_j(k-T_{ij}(k)). \tag{21}$$

其中:$a_{ij}(k)>0$,$j\in N_i$,$a_{ii}(k)>0$ 且 $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(k)=1$,$T_{ij}(k)>0$ 为通信时延且 $T_{ii}=0$. 记

$$m(k)=\min_{i\in\mathscr{L}}\min_{s=k,k-1,\cdots,k-B}x_i(s),$$

$$M(k)=\max_{i\in\mathscr{L}}\max_{s=k,k-1,\cdots,k-B}x_i(s),$$

其中 $B=\max_{i,j\in\mathscr{L}}T_{ij}$. 通过考察差值 $M(k)-m(k)$ 的变化,文献[38] 证明了:在不同的有界通信时延作用下,如果系统(21) 的连接拓扑在连续有界的时间间隔内的合并图为强连通,则系统(21) 渐近达到一致. 通过分析最大值与最小值的差值的收敛特性,Gazi[39] 将文献[38] 的结论推广到更一般的连接拓扑结构,如果系统(21) 的连接拓扑在连续有界的时间间隔内的合并图含有全局可达节点,则系统渐近收敛一致.

3.2.5　一致性分析方法小结

在具有通信时延的时不变多个体系统的一致性分析中,采用频域分析法得到的一致性条件保守性相对较弱,在有些情况下所得时延相关一致性条件是充分必要的[15,17],而且可以得到分散一致性充分条件[16,19]. 然而,频域分析法很难应用于具有切换拓扑结构的多个体系统的一致性分析.

相对于频域分析法,Lyapunov 函数法应用比较广泛. 对于在算法(4) 作用下的多个体系统,利用 Lyapunov 函数法不仅可以分析具有时不变和时变通信时延的一致性问题,还可以考察在切换拓扑结构下具有相同通信时延的一致性问题,但所得时延相关一致性条件相对比较保守. 对于在算法(5) 作用下的多个体系统,Lyapunov 函数法可以考察不同通信时延作用下的一致性问题,并得到时延无关一致性条件[20,21,26].

在具有通信时延的一阶多个体系统(15) 和(20) 的一致性分析中,时延图法、最大值与最小值的差值分析法发挥了良好的作用. 然而,将这两种方法推广到二阶多个体系统的一致性问题的研究,则具有一定的挑战性.

由以上概述可知,一阶多个体系统(8) 和(15)渐近收敛一致与通信时延大小无关,即对于任意大小的通信时延都具有鲁棒性,系统的连接拓扑的连通性是一致性收敛的充要条件. 此外,通过设计协调控制算法和选择合适参数,同样可以实现具有通信

时延的二阶多个体系统渐近达到静态一致与通信时延无关[19,26]. 然而,在耦合算法(4) 作用下(如系统(6),(9) 和(12)),多个体系统的一致性收敛取决于通信时延的大小[15,17,25],且当时延大于一个上限时,系统将产生振荡或发散.

4 具有输入时延的多个体系统的一致性

目前,Saber 等[15,17,22-24,40] 关于具有相同通信时延的一致性研究,可看作具有相同输入时延的一致性分析. 仿真表明:一致性收敛具有输入时延相关性,且对其比较敏感. 然而,在具有不同输入时延的多个体系统中,时延的存在性和多样性使得时延图法、最大值与最小值差值分析法、Lyapunov 函数法很难应用.

根据频域分析法,Tian 等[41] 考察了具有不同输入时延的一阶多个体系统

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(k-T_i) - x_i(k-T_i)). \tag{22}$$

其中:$a_{ij} > 0, j \in N_i$,输入时延 $T_i > 0$. 利用 Vinnicombe 引理[42] 以及 Tian 等[43] 关于具有顺时针特性的时延系统 Nyquist 曲线的凸组合的研究成果,文献[41] 得到了系统(22) 在具有对称连接权值的无向拓扑结构下,输入时延相关的分散一致性条件. 文献[41] 考察了连接拓扑为有向图,同时具有不同通信时延和不同输入时延的一阶多个体系统

$$x_i(k+1) = x_i(k) + \sum_{j\in N_i} a_{ij}(x_j(k-T_i-T_{ij}) - x_i(k-T_i)), \tag{23}$$

其中通信时延 $T_{ij} > 0$,得到了分散一致性条件. 该条件与输入时延有关,而与通信时延大小无关.

此外,Tian等[44] 分析了具有不同输入时延的二阶多个体系统领导-跟随一致性问题

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = v_i(t), \\ \dot{v}_i(t) = \\ k_i\Big(\sum_{j\in N_i} a_{ij}[(v_j(t-T_i) - v_i(t-T_i)) + \\ \gamma(x_j(t-T_i) - x_i(t-T_i))] + \\ b_i[(v_0 - v_i(t-T_i)) + \\ \gamma(x_0(t-T_i) - x_i(t-T_i))]\Big). \end{cases} \tag{24}$$

其中:控制参数 $k_i > 0$ 与 $\gamma > 0$, $a_{ij} > 0$, $j \in N_i$, $b_i \geqslant 0$ 为个体 i 到领导者的连接权值. 领导者的动态为 $\dot{x}_0 = v_0$, $x_0 \in R$ 为领导者位置, $v_0 \in R$ 为一常数,表示期望速度. 利用 Vinnicombe 引理[42] 以及 Tian 等[45] 关于二阶时延系统 Nyquist 曲线的凸组合研究成果,首先得到了系统在具有对称连接权值的无向拓扑结构下分散一致性条件;其次,根据线性分式变换和小增益定理,考察了具有对称权值系统对于非对称权值干扰的鲁棒性,得到了干扰矩阵的最大奇异值作为鲁棒一致性条件.

5 问题与展望

近几年,具有时延的多个体系统一致性问题得到了广泛研究,并取得了许多比较好的研究成果. 然而,时延的存在性和多样性给一致性算法的设计与分析都带来了一定的困难,还有许多具有挑战性的工作值得进一步深入研究:

1) 对于具有不同输入时延的二阶多个体系统,目前仅得到了系统在双一致协调控制算法作用下的一致性收敛条件,而系统在其他一致性算法(如由速度镇定项和位置(位置和速度)一致协调项[46,47] 构成的算法)作用下,一致性分析也同样具有相当重要的研究意义.

2) 在实际的工程应用中,由于受到传感器等通信设备局限性的约束,连接拓扑结构通常是随时间变化的. 目前,关于具有不同通信时延的一阶多个体系统在动态拓扑结构下的一致性分析已有良好的结果[14-16,20-24,28,32,33,36-39]. 然而,关于具有不同通信时延的二阶或更高阶多个体系统以及具有不同输入时延的多个体系统,在动态切换拓扑结构下的一致性分析结果几乎无人问津,是有待努力研究的方向.

3) 目前,关于具有时延的多个体系统的协调控制研究,主要集中在一阶或二阶多个体系统的线性耦合一致性分析. 在多个体系统编队控制与群集算法研究中,个体动态通常为复杂的非线性模型,如非完整约束的轮式小车模型[9,48,49],而且协调控制算法通常为非线性耦合算法[48,49]. 如何将已有的具有时延的一致性分析结果推广到具有时延的编队控制与群集中,以及如何进一步分析具有时延的多个体系统的编队控制与群集,将是更具应用前景的研究课题.

4) 在多个体系统中,客观存在的通信时延和输入时延不仅使一致性分析变得困难,而且使得系统的性能变差,如周期振荡、发散等[15,17,40]. 然而,时延对系统性能的影响并不全是负作用,适当地引入时延也能够改善系统的性能,如混沌控制中广泛采用的自时延反馈控制. 针对具有通信时延的多个体系统的一致性问题,Liu 等[50,51] 提出了一种引入自时延的一致性算法,并根据广义 Nyquist 判据和 Gerschgorin 圆盘定理得到了分散一致性条件. 该条件与自时延相关,而与通信时延无关. 在所得一致性

条件下，通信时延虽不影响系统的收敛，但影响系统动态性能，如延长收敛时间. 然而，在算法中引入的自时延能够加速一致性收敛速度. 尽管如此，多个体系统中如何引入时延以及如何选择时延大小来达到比较好的控制效果，都有待于进一步探索.

另外，需要指出的是，除直接的通信时延和输入时延外，网络中的数据包丢失[52-54]、通信异步[55]等有时也可以当作时延来处理，但这些时延通常具有时变和随机的性质. 这类问题的研究目前也得到了较广泛的关注，限于篇幅，本文未作详细介绍.

参考文献(References)

[1] Pettersen K Y, Gravdahl J T, Nijmeijer H. Group coordination and cooperative control[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2006.

[2] Kumar V, Leonard N, Morse A S. Cooperative control: A post-workshop volume 2003 block island workshop on cooperative control[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[3] Ren W, Beard R W. Distributed consensus in multi-vehicle cooperative control: Theory and applications [M]. London: Springer-Verlag, 2008.

[4] Niculescu S I. Delay effects on stability: A robust control approach[M]. London: Springer-Verlag, 2001.

[5] DeGroot M H. Reaching a consensus [J]. J of American Statistical Association, 1974, 69(345): 118-121.

[6] Tsitsiklis J N, Bertsekas D P, Athans M. Distrbuted asynchronous deterministic and stochastic gradient optimization algorithms[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1986, AC-31(9): 803-812.

[7] Vicsek T, Czirok A, Jacob E B, et al. Novel type of phase transitions in a system of self-driven particles[J]. Physical Review Letters, 1995, 75(6): 1226-1229.

[8] Ren W, Moore K, Chen Y Q. High-order and model reference consensus algorithms in cooperative control of multivehicle systems [J]. J of Dynamic Systems, Measurement and Control, 2007, 129(5): 678-688.

[9] Dimarogonas D V, Kyriakopoulos K J. On the rendezvous problem for multiple nonholonomic agents [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(5): 916-922.

[10] Dong W, Farrell J A. Cooperative control of multiple nonholonomic mobile agents [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(6): 1434-1448.

[11] Godsil C, Royle G. Algebraic graph theory[M]. New York: Springer-Verlag, 2001.

[12] Jadbabaie A, Lin J, Morse A S. Coordination of groups of mobile autonomous agents using nearest neighbor rules[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2003, 48(6): 988-1001.

[13] Ren W, Beard R W. Consensus seeking in multiagent systems under dynamically changing interaction topologies[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(5): 655-661.

[14] Cao M, Morse A S, Anderson B D O. Reaching an agreement using delayed information[C]. Proc of the 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 2006: 3375-3380.

[15] Olfati-Saber R, Murray R M. Consensus problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.

[16] Wang J, Elia N. Consensus over network with dynamic channels[C]. Proc of the American Control Conf. Seattle, 2008: 2637-2642.

[17] Lin P, Jia Y, Du J, et al. Distributed consensus control for second-order agents with fixed topology and time-delay[C]. Proc of the 26th Chinese Control Conf. Zhangjiajie, 2007: 577-581.

[18] Yang W, Bertozzi A L, Wang X F. Stability of a second order consensus algorithm with time delay [C]. Proc of the 47th IEEE Conf on Decision and Control. Cancun, 2008: 2926-2931.

[19] Lee D J, Spong M K. Agreement with non-uniform information delays[C]. Proc of the American Control Conf. Minneapolis, 2006: 756-761.

[20] Wang W, Slotine J J E. Contraction analysis of time-delayed communications and group cooperation [J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2006, 51(4): 712-717.

[21] Munz U, Papachristodoulou A, Allgower F. Nonlinear multi-agent system consensus with time-varying delays [C]. Proc of the 17th IFAC World Congress. Seaul, 2008: 1522-1527.

[22] Lin P, Jia Y M. Average consensus in networks of multi-agents with both switching topology and coupling time-delay[J]. Physica A, 2008, 387(1): 303-313.

[23] Sun Y G, Wang L, Xie G. Average consensus in directed networks of dynamic agents with time-varying communication delays[C]. Proc of the 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 2006: 3393-3398.

[24] Lin P, Jia Y M, Li L. Distributed robust *H*-infinity consensus control in directed networks of agents with time-delay[J]. System & Control Letters, 2008, 57(8): 643-653.

[25] Hu J, Hong Y. Leader-following coordination of multi-agent systems with coupling time delays [J]. Physica A, 2007, 374(2): 853-863.

[26] Kawamura S, Svinin M. In advances in robot control: From everyday physics to human-like movements[M]. New York: Springer-Verlag, 2006: 107-134.

[27] Tanner H G, Christodoulakis D K. State synchronization in local-interaction networks is robust with respect to time delays[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, 2005: 4945-4950.

[28] Wang L, Xiao F. A new approach to consensus problems for discrete-time multiagent systems with time-delays[C]. Proc of the American Control Conf. Minneapolis, 2006: 2118-2123.

[29] Fang L, Antsaklis P J. Information consensus of asynchronous discrete-time multi-agent systems[C]. Proc of the American Control Conf. Portland, 2005: 1883-1888.

[30] Xiao F, Wang L. Dynamic behavior of discrete-time multiagent systems with general communication structures[J]. Physica A, 2006, 370(2): 364-380.

[31] Lubachevsky B, Mitra D. A chaotic asynchronous algorithm for computing the fixed point of a nonnegative matrix of unit spectral radius[J]. J of the Association for Computing Machinery, 1986, 33(1): 130-150.

[32] Xiao F, Wang L. Consensus problems of multi-agent systems under discrete communication structure[C]. Proc of the 45th IEEE Conf on Decision and Control. San Diego, 2006: 4289-4294.

[33] Xiao F, Wang L. Asynchronous consensus in continuous-time multi-agent systems with switching topology and time-varying delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(8): 1804-1816.

[34] Cao M, Morse A S, Anderson B D O. Reaching a consensus in a dynamically changing environment: Convergence rates, measurement delays, and asynchronous events[J]. SIAM J on Control and Optimization, 2008, 47(2): 601-623.

[35] Cao M. Morse A S. Anderson B D O. Agreeing asynchronously[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(8): 1826-1838.

[36] Bliman P-A, Ferrari-Trecate G. Average consensus problems in networks of agents with delayed communications[J]. Automatica, 2008, 44(8): 1985-1995.

[37] Moreau L. Stability of continuous-time distributed consensus algorithms[C]. Proc of the 43rd IEEE Conf on Decision and Control. Nassau, 2004: 3998-4003.

[38] Blondel V D, Hendrickx J M, Olshevsky A, et al. Convergence in multi-agent coordination, consensus, and flocking[C]. Proc of the 44th IEEE Conf on Decision and Control, and the European Control Conf. Seville, 2005: 2996-3000.

[39] Gazi V. Stability of an asynchronous swarm with time-dependent communication links[J]. IEEE Trans on Systems, Man, and Cybernetics-Part B: Cybernetics, 2008, 38(1): 267-274.

[40] Su H, Wang X. Second-order consensus of multiple agents with coupling delay[C]. Proc of the 7th World Congress on Intelligent Control and Automation. Chongqing, 2008: 7181-7186.

[41] Tian Y-P, Liu C-L. Consensus of multi-agent systems with diverse input and communication delays[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2008, 53(9): 2122-2128.

[42] Vinnicombe G. On the stability of end-to-end congestion control for the Internet[R]. London: Department of Engineering University of Cambridge, 2000.

[43] Tian Y-P, Yang H-Y. Stability of the internet congestion control with diverse delays[J]. Automatica, 2004, 40(9): 1533-1541.

[44] Tian Y-P, Liu C-L. Robust consensus of multi-agent systems with diverse input delays and asymmetric interconnection perturbations[J]. Automatica, 2009, 45(5): 1347-1353.

[45] Tian Y-P. Stability analysis and design of the second-order congestion control for networks with heterogeneous delays[J]. IEEE/ACM Trans on Networking, 2005, 13(5): 1082-1093.

[46] Hong Y G, Gao L X, Cheng D Z, et al. Lyapunov-based approach to multiagent systems with switching jointly connected interconnection[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2007, 52(5): 943-948.

[47] Ren W, Atkins E. Distributed multi-vehicle coordinated control via local information exchange[J]. Int J of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17(10/11): 1002-1033.

[48] Nguyen D B, Do K D. Formation control of mobile robots[J]. Int J of Computers, Communications & Control, 2006, 1(3): 41-59.

[49] Gazi V, Fidan B, Hannay Y S, et al. Aggregation, foraging, and formation control of swarms with non-holonomic agents using potential functions and sliding mode techniques[J]. Turk J of Electrical Engineering and Computer Sciences, 2007, 15(2): 149-168.

[50] 刘成林，田玉平. 具有不同通信时延的多个体系统的一致性[J]. 东南大学学报，2008，38(1)：170-174.
(Liu C L, Tian Y P. Consensus of multi-agent system with diverse communication delays[J]. J of Southeast University, 2008, 38(1): 170-174.)

[51] Liu C-L, Tian Y-P. Formation control of multi-agent systems with heterogeneous communication delays[J]. Int J of Systems Science, 2009, 40(6): 627-636.

（下转第 1614 页）