

文章编号: 1001-0920(2010)04-0493-04

基于最大隶属度的区间概率灰色随机多准则决策方法

王坚强, 周玲

(中南大学 商学院, 长沙 410083)

摘要: 定义了一种灰色隶属函数. 针对概率为区间数、准则值为区间灰数的灰色随机多准则决策问题, 提出一种基于最大隶属度的决策方法. 首先, 运用区间数可能度排序向量将区间概率转化为点概率, 并将其转化为无风险决策问题; 然后, 计算各方案在负理想方案到正理想方案上的灰色隶属度, 并计算各方案准则值的相对灰度, 进而根据灰色隶属度和相对灰度大小对方案进行排序; 最后, 通过算例验证了该方法的可行性和有效性.

关键词: 多准则决策; 灰色随机; 最大隶属度; 区间概率; 灰度

中图分类号: C934

文献标识码: A

Grey random multi-criteria decision-making approach based on maximum membership degree

WANG Jian-qiang, ZHOU Ling

(School of Business, Central South University, Changsha 410083, China. Correspondent: WANG Jian-qiang, E-mail: jqwang@mail.csu.edu.cn)

Abstract: The grey membership degree function is defined. As for the grey random multi-criteria decision-making problems, in which probabilities are interval numbers and the attribute value of alternatives are interval grey numbers, a decision-making approach based on maximum membership degree is proposed. Firstly, the decision-making problem is transformed into risk-free problem by using the probability degree ranking vector of interval numbers to transform interval probabilities into point probabilities. Then the grey membership degrees of each alternative to the domain between the anti-ideal alternative and the ideal alternative are calculated, and the relative grey degrees are obtained. The order of the alternatives can be listed by comparing the grey membership degree and the relative grey degree of each alternative. Finally, an example shows the feasibility and effectiveness of this approach.

Key words: Multi-criteria decision-making; Grey random; Maximum membership degree; Probability interval; Grey degree

1 引言

多准则决策是现代决策理论的一个重要内容, 主要解决具有多个准则的有限备选方案的排序, 择优和评价问题, 在经济、军事、管理、环境工程等众多领域中有着广泛的实际应用背景. 然而, 由于外部环境的复杂性、事物本身的模糊性, 人类认识的局限性导致决策过程中有很多不确定性, 包括随机性, 模糊性和灰色性等, 因而实际多准则决策问题常常伴随着多重不确定性. 目前, 随着单一不确定多准则决策理论的不完善, 双重甚至多重不确定性多准则决策问题的研究也逐步展开. 关于模糊随机多准则决策问题以及灰色模糊多准则决策问题的研究目前也逐渐成为焦

点. 然而, 针对灰色随机多准则决策问题的研究目前还比较少.

文献[1-7]对指标值为区间灰数, 以及指标值可转化为区间灰数的多准则决策问题进行了深入研究, 这些研究主要是在概率为确定实数的情况下进行的. [8, 9]对概率为区间数的风险型决策问题进行了研究; [8]按最小期望损益值到最大期望损益值区间内区间数排序方法进行决策; [9]根据最大熵原则将区间概率转化为点概率对区间概率信息条件决策问题进行了求解; [10]对概率为区间灰数的多目标风险型决策问题进行了研究, 而这些研究仅是针对准则值为确定型实数进行的.

收稿日期: 2009-04-18; 修回日期: 2009-06-06.

基金项目: 国家自然科学基金项目(70771115); 国家自然科学基金重点项目(70631004); 国家创新研究群体科学基金项目(70921001).

作者简介: 王坚强(1963-), 男, 湖南湘潭人, 教授, 博士, 从事决策理论与应用、风险管理与控制等研究; 周玲(1986-), 女, 宁夏中卫人, 硕士生, 从事决策理论与应用、信息管理等研究.

对于概率与准则值同时不确定的灰色随机多准则决策问题很少有文献报道. 然而, 在实际的决策问题中, 决策者确切地预知事件发生或各自然状态出现的可能性是比较困难的, 同时备选方案在各准则下的损益值也往往难以精确化. 因此, 对此类问题的研究在一定程度上具有普遍意义. 为此, 本文提出相应的决策方法以满足这类决策的需要.

2 区间灰数和灰色隶属度

只知其大概范围而不知其确切值的数被称为灰数^[11]. 在实际应用中, 灰数是指在某一个区间或某个一般的数集内取值的不确定数, 通常用记号“ \otimes ”表示. 既有下界 \underline{a} 又有上界 \bar{a} 的灰数称为区间灰数, 记为 $\otimes \in [\underline{a}, \bar{a}]$. 区间灰数的运算见文献[11].

定义 1 当随机变量可能取到的值为有限个数, 并且各个值是以不同的区间灰数 \otimes 形式出现, 而所对应的概率能够被确知, 且为区间数, 则称这样的随机变量为离散型区间概率灰色随机变量(在本文中称为灰色随机变量), 用 $\zeta(\otimes)$ 表示, 其取值的概率分布如表1所示.

表 1 区间概率灰色随机变量 $\zeta(\otimes)$ 的概率分布

$\zeta(\otimes)$	\otimes_1	\otimes_2	\dots	\otimes_i	\dots	\otimes_n
p	p_1	p_2	\dots	p_i	\dots	p_n

表1中: $\zeta(\otimes)$ 为区间概率灰色随机变量; \otimes_i 为灰色随机变量可能取的第 i 个值, $\otimes_i \in [\underline{x}_i, \bar{x}_i]$; p_i 为灰色随机变量取第 i 个值时的概率, $p_i = [p_i^-, p_i^+]$; n 为区间概率灰色随机变量可能取的所有值的个数. 其中, 本文考虑的是概率信息量完全的随机变量, 即 p_i 满足 $0 \leq \sum p_i^- \leq 1 \leq \sum p_i^+$ 的条件^[9].

定义 2 a 和 b 均为区间数, 设 $a = [a^-, a^+]$, $a^- < a^+$, $b = [b^-, b^+]$, $b^- < b^+$, 且记 $l_a = a^+ - a^-$, $l_b = b^+ - b^-$, 则称^[12]

$$P(a \geq b) = \frac{\min\{l_a + l_b, \max(a^+ - b^-, 0)\}}{l_a + l_b} \quad (1)$$

为 $a \geq b$ 的可能度.

定义 3 设区间灰数 $\otimes_1 \in [\underline{a}, \bar{a}]$, $\underline{a} < \bar{a}$, $\otimes_2 \in [\underline{b}, \bar{b}]$, $\underline{b} < \bar{b}$, $\otimes \in [\underline{x}, \bar{x}]$, $\underline{x} < \bar{x}$. 其中: $\underline{a} \leq \underline{x} \leq \bar{b}$, $\bar{a} \leq \bar{x} \leq \bar{b}$. 即 \otimes_2 和 \otimes_1 分别称为 \otimes 的上限和下限. 本文将文献[13]中确定型指标隶属度的确定方法进行推广, 并用于区间灰数隶属度的确定中. 记

$$\mu(\otimes) = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{\underline{x} - \underline{a}}{\underline{b} - \underline{a}} \right)^2 \left(\frac{3(\underline{x} - \underline{b})}{\underline{b} - \underline{a}} - \frac{\underline{x} - \underline{a}}{\underline{b} - \underline{a}} \right) - \left(\frac{\bar{x} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} \right)^2 \left(\frac{3(\bar{x} - \bar{b})}{\bar{b} - \bar{a}} - \frac{\bar{x} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} \right) \right). \quad (2)$$

因此称 $\mu(\otimes)$ 为 \otimes 在区域 $[\otimes_1, \otimes_2]$ 上的灰色隶属度.

由定义3可知, 当 $\otimes = \otimes_2$ 时的灰色隶属度为1; 当 $\otimes = \otimes_1$ 时的灰色隶属度为0, 符合隶属函数的基本

特征. 当 \otimes_1, \otimes_2 和 \otimes 均为清晰数(即白数), $\otimes_1 = \underline{a} = \bar{a}$, $\otimes_2 = \underline{b} = \bar{b}$, $\otimes = \underline{x} = \bar{x}$ 时, 所定义的灰色隶属度退化为文献[13]中定义的确定型隶属度. 因此确定型隶属度灰色隶属度是个特例.

3 基于最大隶属度的灰色随机多准则决策方法

设某灰色随机多准则决策问题中, 方案集为 $A = \{a_1, \dots, a_i, \dots, a_m\}$, 准则集为 $C = \{c_1, \dots, c_j, \dots, c_n\}$, 且各准则相互独立, 准则的权重向量记为 $W = \{w_1, \dots, w_j, \dots, w_n\}^T$, 并满足约束条件: $\sum_{j=1}^n w_j = 1, w_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n$.

由于决策环境的不确定性, 该决策问题面临 s 种可能的自然状态, 状态集为 $\Theta = \{\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_s\}$, 第 k 种状态 θ_k 发生的概率为区间数 $p_k \in [p_k^-, p_k^+]$. 方案 a_i 在准则 c_j 下的值为 x_{ij} , x_{ij} 是信息量完全的区间概率灰色随机变量. 方案 a_i 的准则 c_j 在 θ_k 状态下的值为区间灰数 $x_{ijk}(\otimes) \in [\underline{x}_{ijk}, \bar{x}_{ijk}]$. 其中: $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k \leq s$. 从而可得决策矩阵 $D = (x_{ijk})_{m \times n \times s}$. 现欲确定方案集 A 的最佳方案或排序.

上述决策问题的决策步骤如下:

Step1 规范化处理. 为了消除不同的物理量纲及数量级对决策结果的影响, 对 $x_{ijk}(\otimes)$ 进行如下规范化处理^[14].

效益型准则值

$$r_{ij}^k = [\underline{x}_{ijk} / x_{jk}^{\max}, \bar{x}_{ijk} / x_{jk}^{\max}], \quad (3)$$

其中 $x_{jk}^{\max} = \max_{1 \leq i \leq m} \{\bar{x}_{ijk}\}$;

成本型准则值

$$r_{ij}^k = [x_{jk}^{\min} / \bar{x}_{ijk}, x_{jk}^{\min} / \underline{x}_{ijk}], \quad (4)$$

其中 $x_{jk}^{\min} = \min_{1 \leq i \leq m} \{\underline{x}_{ijk}\}$.

从而可得到 s 个自然状态的标准化风险决策矩阵 $R^k(\otimes) = (r_{ij}^k)_{m \times n}, k = 1, 2, \dots, s$.

Step2 区间概率处理. 本文认为概率表示事件发生的一种可能性, 区间数可能度作为区间数大小比较方式, 能够很好地描述概率信息完全的情况. 基于此, s 个状态下的区间概率按照可能度式(1)进行两两比较后, 建立可能度矩阵 $P = (P_{ij})_{s \times s}$, 则状态 k 的概率

$$p_k = \frac{1}{s(s-1)} \left(\sum_{j=1}^s P_{kj} + \frac{s}{2} - 1 \right), k = 1, 2, \dots, s. \quad (5)$$

Step3 无风险灰色决策矩阵的建立. 利用决策矩阵 $R^k(\otimes)$ 及各自然状态 k 的概率 $p_k (k = 1, 2, \dots, s)$, 依据区间灰数运算法则, 将 s 个标准化的灰色矩阵合并为一个无风险灰色多准则决策矩阵 $R(\otimes) =$

$$\sum_{k=1}^s p_k r_{ij}^k(\otimes) = (r_{ij}(\otimes))_{m \times n}.$$

Step4 正理想方案与负理想方案的确定. 确定灰色正理想方案 $G^+(\otimes) = (g_1^+, g_2^+, \dots, g_n^+)$ 和灰色负理想方案 $G^-(\otimes) = (g_1^-, g_2^-, \dots, g_n^-)$. 其中

$$g_j^+ = [g_j^+, \bar{g}_j^+] = [\max_i(r_{ij}), \max_i(\bar{r}_{ij})],$$

$$g_j^- = [g_j^-, \bar{g}_j^-] = [\min_i(r_{ij}), \min_i(\bar{r}_{ij})],$$

$$j = 1, 2, \dots, n.$$

Step5 建立描述方案准则值优劣的隶属函数. 根据备选方案越接近正理想方案(远离负理想方案)越优, 其隶属程度越大的思想, 采用各准则值在其论域上的隶属函数描述其优劣. 现将 μ_{ij} 定义为: 在准则 j 下, 方案 i 的准则值 r_{ij} 在负理想值到正理想值之间区域 $[g_j^-, g_j^+]$ 上的灰色隶属度. 利用式(2)可得

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \left(- \left(\frac{r_{ij} - g_j^-}{g_j^+ - g_j^-} \right)^2 \left(\frac{3(r_{ij} - g_j^+)}{g_j^+ - g_j^-} - \frac{r_{ij} - g_j^-}{g_j^+ - g_j^-} \right) - \left(\frac{\bar{r}_{ij} - \bar{g}_j^-}{g_j^+ - \bar{g}_j^-} \right)^2 \left(\frac{3(\bar{r}_{ij} - \bar{g}_j^+)}{g_j^+ - \bar{g}_j^-} - \frac{\bar{r}_{ij} - \bar{g}_j^-}{g_j^+ - \bar{g}_j^-} \right) \right). \quad (6)$$

计算方案 a_i 的加权综合隶属度为

$$\mu_i = \sum_{j=1}^n w_j \mu_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

Step6 计算各方案的相对灰度. 计算各方案各准则值的灰度为^[11]

$$v_{ij} = \frac{l(r_{ij}(\otimes))}{\hat{r}_{ij}(\otimes)} = \frac{\bar{r}_{ij} - r_{ij}}{\frac{1}{2}(r_{ij} + \bar{r}_{ij})}. \quad (8)$$

将准则 j 下, 准则值 r_{ij} 的灰度 v_{ij} 在最小灰度到最大灰度之间区域 $[v_{ij}^-, v_{ij}^+] = [\min_i v_{ij}, \max_i v_{ij}]$ 上的隶属度定义为相对灰度, 记作 \tilde{v}_{ij} . 这样即为确定型隶属度的求解, 利用文献[13]可得

$$\tilde{v}_{ij} = - \left(\frac{v_{ij} - v_{ij}^-}{v_{ij}^+ - v_{ij}^-} \right)^2 \left(\frac{3(v_{ij} - v_{ij}^+)}{v_{ij}^+ - v_{ij}^-} - \frac{v_{ij} - v_{ij}^-}{v_{ij}^+ - v_{ij}^-} \right). \quad (9)$$

计算方案 a_i 的加权综合相对灰度为

$$v_i = \sum_{j=1}^n w_j \tilde{v}_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (10)$$

Step7 对各方案进行排序. 按照最大隶属度原则, 灰度越小, 方案越优的原则, 定义区间灰数排序公式为^[1]

$$z_i = \rho \mu_i + (1 - \rho)(1 - v_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (11)$$

其中: $\rho (0 < \rho < 1)$ 为平衡系数, 可根据实际问题事先给定, 也可由文献[1]中给出的优化模型求得. 即

$$\rho = e^{\sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i + v_i - 1} / \left(1 + e^{\sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i + v_i - 1} \right). \quad (12)$$

这样, 将 ρ 代入式(11)对方案进行排序, 其中 z_i 最大者对应的方案为最优方案.

4 算例分析

某企业计划投资建设一座新厂, 市场预测产品

的销售有4种可能的状况, 分别为畅销、偏好、稍差和滞销. 现设计了4种方案, 考虑了3个指标, 分别为直接收益 C_1 , 间接收益 C_2 和污染损失 C_3 . 权重为 $w_1 = 0.41, w_2 = 0.32, w_3 = 0.27$. 各种指标的决策表如表2~表5所示, 求最优方案.

1) 按照Step1~Step3对已知决策表2~表5进行标准化处理后合并为一个无风险灰色多准则决策矩阵, 如表6所示.

表2 市场畅销[0.1, 0.25]下的决策表

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	[22, 30]	[90, 112]	[230, 250]
a_2	[25, 31]	[90, 116]	[210, 230]
a_3	[28, 32]	[95, 105]	[190, 210]
a_4	[20, 28]	[90, 100]	[250, 270]

表3 市场偏好[0.3, 0.6]下的决策表

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	[27, 35]	[97, 109]	[235, 255]
a_2	[30, 36]	[97, 113]	[215, 235]
a_3	[28, 32]	[95, 105]	[195, 215]
a_4	[25, 33]	[96, 106]	[255, 275]

表4 市场稍差[0.15, 0.35]下的决策表

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	[20, 28]	[101, 111]	[260, 280]
a_2	[25, 31]	[97, 113]	[220, 240]
a_3	[22, 30]	[104, 116]	[240, 260]
a_4	[28, 32]	[95, 105]	[200, 220]

表5 市场滞销[0.5, 0.15]下的决策表

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	[22, 30]	[104, 116]	[245, 265]
a_2	[25, 31]	[97, 113]	[225, 245]
a_3	[28, 32]	[95, 105]	[205, 225]
a_4	[20, 28]	[115, 125]	[265, 285]

表6 无风险灰色多准则决策矩阵

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	[0.7104, 0.9502]	[0.8474, 0.9694]	[0.7662, 0.8310]
a_2	[0.8003, 0.9802]	[0.8228, 0.9793]	[0.8310, 0.9077]
a_3	[0.8394, 0.9593]	[0.8186, 0.9048]	[0.9077, 1.0000]
a_4	[0.6505, 0.8903]	[0.8495, 0.9357]	[0.7105, 0.7662]

其中区间概率按照式(1)和(5)可得各状态下的点概率为: $p_1 = 0.215, 47, p_2 = 0.36667, p_3 = 0.27619, p_4 = 0.14167$.

2) 由表6可得正、负理想方案分别为

$$G^+(\otimes) \in ([0.8394, 0.9802], [0.8495, 0.9793], [0.9077, 1.0000]),$$

$$G^-(\otimes) \in ([0.6505, 0.8903], [0.8186, 0.9048], [0.7105, 0.7662]).$$

3) 利用式(6)计算各方案各准则值在负理想值到正理想值上的灰色隶属度,如表7所示.

表7 各方案各准则值的灰色隶属度

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	0.4895	0.9695	0.1911
a_2	0.9448	0.5255	0.6595
a_3	0.9312	0.0000	1.0000
a_4	0.0000	0.6868	0.0000

由式(7)可得各方案的加权综合隶属度为: $\mu_1 = 0.5625, \mu_2 = 0.7336, \mu_3 = 0.6518, \mu_4 = 0.2198$.

4) 按照式(8)计算各方案各准则值的灰度,如表8所示.

表8 各方案各准则值的灰度

方案	C_1	C_2	C_3
a_1	0.2888	0.1343	0.0811
a_2	0.2020	0.1736	0.0882
a_3	0.1333	0.1000	0.0968
a_4	0.3113	0.0965	0.0755

采用式(9)和(10)得到各方案的加权综合相对灰度为: $v_1 = 0.5930, v_2 = 0.6305, v_3 = 0.2719, v_4 = 0.4100$.

5) 根据区间灰数排序式(11)可得: $z_1 = 0.4876, z_2 = 0.5582, z_3 = 0.6886, z_4 = 0.3981$. 其中排序公式中平衡系数由式(12)可得,即 $\rho = 0.5183$.

由 $z_3 > z_2 > z_1 > z_4$ 可得,方案 a_3 为最优方案.

5 结论

针对概率为区间数且准则值为区间灰数的灰色随机多准则决策问题,提出了一种基于最大隶属度的决策方法.该方法处理区间概率的方式简单,满足概率信息完全的条件.方案的排序过程同时考虑了方案的灰色隶属度和相对灰度,提高了方法的合理性.

参考文献(References)

- [1] 罗党,刘思峰.灰色多指标风险型决策方法研究[J].系统工程与电子技术,2004,26(8):1057-1060.
(Luo D, Liu S F. Research on grey multi-criteria risk decision-making method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2004, 26(8): 1057-1060.)
- [2] 秦玉慧,罗党.基于优性指标的灰色风险型多指标决策方法[J].河南教育学院学报,2007,16(3):4-6.
(Qin Y H, Luo D. Grey multiple criteria decision making method under risk based on priority index[J]. J of He'nan Institute of Education, 2007, 16(3): 4-6.)
- [3] 罗党,周玲,罗迪新.灰色风险型多属性群决策方法[J].系统工程与电子技术,2008,30(9):1674-1678.
(Luo D, Zhou L, Luo D X. Grey multi-attribute risk group decision-making method[J]. Systems Engineering and Electronics, 2008, 30(9): 1674-1678.)
- [4] 刘俊娟,王炜,程琳.基于TOPSIS和隶属函数的灰数决策模型[J].铁道科学与工程学报,2007,4(6):93-97.
(Liu J J, Wang W, Cheng L. The grey number decision making based on TOPSIS and subordinate function[J]. J of Railway Science and Engineering, 2007, 4(6): 93-97.)
- [5] 王坚强,任世昶.基于期望值的灰色随机多准则决策方法[J].控制与决策,2009,24(1):39-43.
(Wang J Q, Ren S C. Grey random multi-criteria decision-making approach based on expected value[J]. Control and Decision, 2009, 24(1): 39-43.)
- [6] 王坚强,任世昶.灰色随机多准则决策的优劣势排序法[J].控制与决策,2009,25(5):701-705.
(Wang J Q, Ren S C. Superiority and inferiority ranking method for grey random multi-criteria decision-making [J]. Control and Decision, 2009, 25(5): 701-705.)
- [7] 姚从军,肖新平.风险型动态混合多属性决策的灰矩阵关联度法[J].系统工程与电子技术,2006,9(28):1353-1357.
(Yao C J, Xiao X P. Method of grey matrix relative degree for dynamic hybrid multi-attribute decision making under risk[J]. Systems Engineering and Electronics, 2006, 9(28): 1353-1357.)
- [8] 张吉军.基于区间数排序的概率区间型决策分析方法研究[C].中国企业运筹学学术交流大会论文集.成都,2005:99-102.
(Zhang J J. Study on decision making method under probability interval based on interval number ranking[C]. Symposium of China Enterprise Operations Research. Chengdu, 2005: 99-102.)
- [9] 何大义.区间概率信息条件下的风险型决策问题的解法探讨[J].运筹与管理,2007,16(6):74-78.
(He D Y. Decision-making under the condition of probability interval by maximum entropy principle[J]. Operations Research and Management Science, 2007, 16(6): 74-78.)
- [10] 童玉娟,王志国.概率为区间灰数的多目标风险型决策方法[J].中国西部科技,2008,7(5):37-38.
(Tong Y J, Wang Z G. A risk based multi-objective decision-making method when the probability is interval gray number[J]. Science and Technology of West China, 2008, 7(5): 37-38.)
- [11] 刘思峰,郭天榜,党耀国.灰色系统理论及其应用[M].北京:科学出版社,1999.
(Liu S F, Guo T B, Dang Y G. Grey system theory and application[M]. Beijing: Science Press, 1999.)
- [12] 徐泽水.不确定多属性决策方法及应用[M].北京:清华大学出版社,2004.
(Xu Z S. Uncertain multi-attribute decision-making method and application[M]. Beijing: Tsinghua University Press, 2004.)