

文章编号: 1001-0920(2010)08-1139-05

## 基于粒子滤波的GPS多径估计

王宪<sup>1,2</sup>, 袁洪<sup>1</sup>

(1. 中国科学院光电研究院, 北京 100190; 2. 中国科学院研究生院, 北京 100049)

**摘要:** 针对全球卫星定位系统中的多径参数估计问题, 提出一种基于粒子滤波的算法. 首先, 使用信号压缩技术以利于粒子权的计算; 然后, 采用 Rao-Blackwellization 方法来降低粒子滤波估计的状态空间维数; 最后, 通过 Laplace 方法得到一个优化的重要分布. 仿真实验表明了该算法的有效性.

**关键词:** 多径; 粒子滤波; Laplace 方法; 空间交替期望最大算法

中图分类号: TN96.1

文献标识码: A

### GPS multipath estimation based particle filtering

WANG Xian<sup>1,2</sup>, YUAN Hong<sup>1</sup>

(1. Academy of Opto-electronics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China; 2. University of Graduate, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049, China. Correspondent: WANG Xian, E-mail: wyt1996@163.com)

**Abstract:** An algorithm based on particle filtering is presented to solve GPS multipath parameter estimation problem. Firstly, the signal compression is used to facilitate the computation of important weight. Then, Rao-Blackwellization method is applied to reduce the size of state space and computational burden. Finally, an approximation of the optimal density is obtained by using a Laplace approximation of the likelihood function. Simulation results show the effectiveness of the proposed method.

**Key words:** Multipath; Particle filtering; Laplace method; Space-alternating generalized expectation-maximization

### 1 引言

多径引起的误差是全球卫星定位系统(GPS)的主要误差源之一, 它是指接收机天线除了接收来自卫星方向的直达信号外, 还接收其他物体反射回来的信号在码跟踪环中产生的误差. 这一误差在严重的情况下可以使卫星接收机的定位精度降低 50m 以上, 因此高精度定位应用中必须消除这一误差. 文献[1]提出了创新的基于粒子滤波(PF)的多径估计算法, 与现有的抑制多径误差的信号处理方法<sup>[2-5]</sup>相比, PF 算法能够处理非线性函数, 放宽统计假设, 允许非高斯模型, 还能够提供容纳来自其他传感器(例如惯性导航设备)先验信息的框架, 因此成为高精度定位应用很有前景的解决方案. 然而, 这类方法需要较大的计算量, 通常难以在导航接收机的处理器上有效、实时地运行. 其主要有两方面原因: 1) 导航信号通常比背景噪声低 20~30 dB, 这意味着接收信号功率中占主导地位的是噪声, 为了克服噪声, 提高信噪比, 导航接收机一次观测的样本数目非常大, 直接导致粒子权更新

计算需要很大的计算量; 2) 粒子滤波使用一组加权随机样本(粒子)来近似表征系统状态的后验密度函数, 是一种基于仿真的方法. 为了有效地刻画后验密度函数, 需要足够多的粒子.

本文提出一种用于 GPS 多径估计的粒子滤波算法, 使用 3 种有效的技术来降低算法的计算量. 首先, 使用信号压缩和脉冲内插技术导出等效、低维和解析的测量模型, 使得高效和高解析度的计算粒子重要权成为可能; 其次, 采用 Rao-Blackwellization 技术, 将系统状态向量中条件线性部分边缘化, 利用卡尔曼滤波来跟踪状态空间模型中的线性/高斯部分, 其余的非线性状态用粒子滤波加以估计, 从而避免了状态高维数引起的粒子过多、计算量过大的问题; 最后, 通过 Laplace 方法得到一个优化的重要分布.

### 2 粒子滤波

假定动态时变系统描述如下:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{f}_k(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \longleftrightarrow \underbrace{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})}_{\text{过渡先验分布}}, \quad (1)$$

收稿日期: 2009-07-22; 修回日期: 2009-11-03.

基金项目: 国家自然科学基金项目(40374054); 国家 863 计划项目(2008AA12A216).

作者简介: 王宪(1974-), 男, 四川绵阳人, 博士生, 从事卫星导航、非线性滤波的研究; 袁洪(1968-), 男, 西安人, 教授, 博士生导师, 从事卫星导航理论和应用等研究.

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{h}_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{w}_k) \longleftrightarrow \underbrace{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)}_{\text{似然函数}}. \quad (2)$$

其中:  $\mathbf{x}_k$  和  $\mathbf{y}_k$  分别是状态向量和观测向量,  $\mathbf{v}_k$  和  $\mathbf{w}_k$  分别是过程噪声和量测噪声, 且互不相关; 函数  $\mathbf{f}_k$  和  $\mathbf{h}_k$  通常是非线性的.

贝叶斯最优非线性滤波的核心问题是递推求解后验概率密度分布  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$ , 其中  $\mathbf{Y}_k \triangleq \{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_k\}$ . 一旦  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$  已知, 则在给定  $\mathbf{Y}_k$  的情况下,  $\mathbf{x}_k$  的最小均方误差估计 (MMSE)、极大后验估计 (MAP) 等统计特性即可求得. 然而, 除了线性/高斯模型等少数情况外, 贝叶斯滤波并没有解析解.

粒子滤波<sup>[6,7]</sup>是贝叶斯滤波的一种近似解, 它通过一组从重要分布  $q(\cdot)$  中采样的随机样本  $\mathbf{x}_k^i$  和与之对应的权  $w_k^i$  来近似后验概率密度分布:

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k) \approx \sum_{i=1}^N w_k^i \delta(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^i). \quad (3)$$

粒子滤波通常包含以下 3 个基本部分:

- 1) 粒子更新  $\mathbf{x}_k^i \sim q(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)$ ;
- 2) 权更新, 即

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i) p(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i)}{q(\mathbf{x}_k^i | \mathbf{x}_{k-1}^i, \mathbf{y}_k)};$$

3) 重采样, 计算  $N_{\text{eff}} = 1 / \sum_{i=1}^N (w_k^i)^2$ , 若  $N_{\text{eff}}$  小于一个门限, 则从离散分布  $\{w_k^i\}_{i=1,2,\dots,N}$  中重采样粒子.

### 3 系统模型

#### 3.1 量测模型

假设基带接收信号建模为<sup>[8]</sup>

$$y(t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) [c(t)g(t - \tau_i(t))] + n(t). \quad (4)$$

其中:  $c(t)$  是调制在脉冲  $g(t)$  上的导航码序列;  $M$  是到达接收机的信号总数,  $a_i(t)$  和  $\tau_i(t)$  分别是第  $i$  条路径信号的幅度和时间延迟,  $n(t)$  是加性高斯白噪声. 将  $(m + KL)T_s$  ( $m = 0, 1, \dots, L - 1$ ) 时刻的  $L$  个样本作为整体记为向量  $\mathbf{y}_k$ , 同时假设  $a_i(t)$  和  $\tau_i(t)$  在此时间范围内保持不变, 记为  $a_{i,k}$  和  $\tau_{i,k}$ , 则式 (4) 可以重新写为

$$\mathbf{y}_k = \underbrace{\mathbf{CG}(\boldsymbol{\tau}_k)}_{\mathbf{s}_k} \mathbf{a}_k + \mathbf{n}_k \longleftrightarrow p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k). \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}_k) = [\mathbf{g}(\tau_{1,k}), \mathbf{g}(\tau_{2,k}), \dots, \mathbf{g}(\tau_{M,k})]$ ,  $\mathbf{g}(\tau_{i,k})$  是脉冲  $g(t - \tau_{i,k})$  的样本向量;  $\mathbf{C}$  是描述脉冲和导航码进行卷积运算的矩阵, 在接收机内是已知的;  $\boldsymbol{\tau}_k = [\tau_{1,k}, \tau_{2,k}, \dots, \tau_{M,k}]^T$  和  $\mathbf{a}_k = [a_{1,k}, a_{2,k}, \dots, a_{M,k}]^T$  分别为待求的路径延迟向量和幅度向量;  $\mathbf{s}_k$  为信号假设, 并定义  $\mathbf{x}_k \triangleq [(\mathbf{a}_k)^T, (\boldsymbol{\tau}_k)^T]^T$ .

#### 3.2 马尔科夫过程模型

为了将粒子滤波用于多径信道参数的估计, 必须首先描述这些参数的演化特性, 并且  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$  能够刻画这些特性, 即该模型必须是一阶的马尔科夫模型, 同时所有状态转移概率已知. 本文将多径参数在时间上的演化规律建模为<sup>[9]</sup>

$$\mathbf{a}_k \sim p(\mathbf{a}_k | \mathbf{a}_{k-1}) = N(\mathbf{F}_{k,a} \mathbf{a}_{k-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{k,a}), \quad (6)$$

$$\boldsymbol{\tau}_k \sim p(\boldsymbol{\tau}_k | \boldsymbol{\tau}_{k-1}) = N(\mathbf{F}_{k,\tau} \boldsymbol{\tau}_{k-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{k,\tau}). \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{F}_{k,a}$  和  $\mathbf{F}_{k,\tau}$  是状态转移矩阵, 控制相应参数的变化速度;  $\boldsymbol{\Sigma}_{k,a}$  和  $\boldsymbol{\Sigma}_{k,\tau}$  是相应参数的协方差矩阵. 上述模型可以进一步改写为

$$\mathbf{x}_k \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}) = N(\mathbf{F}_k \mathbf{x}_{k-1}, \boldsymbol{\Sigma}_{k,x}). \quad (8)$$

其中:  $\mathbf{F}_k = \text{diag}(\mathbf{F}_{k,a}, \mathbf{F}_{k,\tau})$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_k = \text{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_{k,a}, \boldsymbol{\Sigma}_{k,\tau})$ .

#### 4 复杂度缩减

直接使用量测模型 (5) 来进行滤波算法设计会引起两个问题: 1) 观测向量  $\mathbf{y}_k$  包含了大量的样本, 导航接收机的观测周期通常持续几个甚至几十上百个码周期, 样本数可达到  $10^5 \sim 10^6$ , 甚至更多. 这样, 简单地计算似然函数  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  也需要较大的计算量, 进而导致粒子权更新需要较大的计算量. 2) 在粒子滤波过程中, 样本  $\mathbf{x}_k^i$  是随机产生的, 这表示在重要权更新过程中必须高解析地计算  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k^i)$ . 但  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  不是信道参数  $\mathbf{x}_k$  的解析函数, 要想通过不增加采样频率的方式来高解析度地计算  $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$  很困难.

上述问题可以通过联合使用数据压缩<sup>[10]</sup>和内插<sup>[11,12]</sup>加以解决.

#### 4.1 数据压缩

文献 [10] 提出了一类有效的数据压缩方法, 其基本思想是: 找到一个列数较少的正交压缩矩阵  $\mathbf{Q}_c$ , 使得  $\mathbf{Q}_c^H \mathbf{y}_k$  是信道参数  $\mathbf{x}_k$  的充分统计量, 即  $\mathbf{Q}_c^H \mathbf{y}_k$  和  $\mathbf{y}_k$  含有关于  $\mathbf{x}_k$  相同的信息. 这样可以使用压缩后的数据  $\mathbf{Q}_c^H \mathbf{y}_k$  和压缩后量测模型

$$\mathbf{y}_{c,k} = \mathbf{s}_{c,k} + \mathbf{n}_{c,k} \longleftrightarrow p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{x}_k) \quad (9)$$

来取代原始的观测向量  $\mathbf{y}_k$  和原始量测模型 (5), 且没有信息的损失. 其中

$$\mathbf{y}_{c,k} = \mathbf{Q}_c^H \mathbf{y}_k, \mathbf{s}_{c,k} = \mathbf{Q}_c^H \mathbf{s}_k, \mathbf{Q} = \mathbf{C}\mathbf{R}^{-1}, \quad (10)$$

$\mathbf{R}$  由卷积矩阵  $\mathbf{C}$  的 QR 分解得到.

#### 4.2 内插

使用基于离散傅立叶变换 (DFT) 的脉冲内插技术, 延迟脉冲  $g(t - \tau)$  的样本向量为

$$\mathbf{g}(\tau) = \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{P}_2 \mathbf{g}_F) \Phi(\tau). \quad (11)$$

其中:  $\mathbf{g}$  是  $g(t)$  的样本向量,  $\mathbf{g}_F = \text{DFT}(\mathbf{g})$ ;  $\mathbf{F}$  是经过排列的逆傅里叶变换矩阵, 其  $m$  行  $n$  列元素为

$[\mathbf{F}]_{m,n} = \frac{1}{N_g} \exp\left\{\frac{-2\pi j}{N_g} [m - (u+1)][n - (u+1)]\right\}$ ,  
 $N_g$  是  $\mathbf{g}$  的元素个数,  $u = (N_g - 1)/2$ ; 列向量  $\Phi(\tau)$  的  $m$  行元素为

$$[\Phi(\tau)]_m = \exp\left\{\frac{-2\pi j}{N_g T_s} [m - (u+1)\tau]\right\};$$

排列矩阵  $\mathbf{P}_1 = [\mathbf{e}_{u+1}, \dots, \mathbf{e}_{N_g}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_u]^T$ , 排列矩阵  $\mathbf{P}_2 = [\mathbf{e}_{u+2}, \dots, \mathbf{e}_{N_g}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{u+1}]^T$ ,  $\mathbf{e}_i$  为第  $i$  个元素为 1 的单位列向量.

脉冲内插和数据压缩相结合可以得到

$$\mathbf{s}_{c,k} = \underbrace{\mathbf{Q}_c^H \mathbf{C} \mathbf{P}_1 \mathbf{F} \text{diag}(\mathbf{P}_2 \mathbf{g}_F)}_{\mathbf{M}_{sc} = \text{const}} \Omega(\tau_k) \mathbf{a}_k, \quad (12)$$

其中  $\Omega(\tau_k) = [\Phi(\tau_{1,k}), \Phi(\tau_{2,k}), \dots, \Phi(\tau_{M,k})]$ . 注意到, 式(12)中  $\mathbf{s}_{c,k}$  是关于  $\tau_k$  和  $\mathbf{a}_k$  的解析函数. 将式(12)带入(9), 可以得到等效、低维、解析形式的量测模型和相应的似然函数. 使用这一模型不仅可以高效和高解析度地计算粒子重要权, 而且可以在此基础上设计低复杂度的滤波算法.

## 5 滤波的实现

使用粒子滤波估计多径参数, 实际上是在系统状态空间模型的基础上, 对多径参数的后验分布  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{Y}_k)$  进行递推估计. 在实际计算过程中, 使用等效的测量模型(9)和压缩后的测量序列  $\mathbf{Y}_{c,k} \triangleq \{\mathbf{y}_{c,1}, \mathbf{y}_{c,2}, \dots, \mathbf{y}_{c,k}\}$  代替原始的测量模型(5)和  $\mathbf{Y}_k$  以降低计算的复杂性.

从上文定义的系统模型可以看到,  $\mathbf{y}_{c,k}$  线性地依赖于  $\mathbf{a}_k$ , 同时  $\mathbf{a}_k$  的演变规律也是线性/高斯的, 因此可以通过边缘化条件线性状态来减少滤波的计算复杂度<sup>[13]</sup>, 这一方法也称为 Rao-Blackwellization<sup>[14]</sup>. 定义  $\mathbf{x}_k^l = \mathbf{a}_k$ ,  $\mathbf{x}_k^r = \tau_k$ , 边缘化的估计方法将后验分布  $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_{c,k})$  因式分解为

$$p(\mathbf{a}_k, \tau_k | \mathbf{Y}_{c,k}) = \underbrace{p(\mathbf{a}_k | \tau_k, \mathbf{Y}_{c,k})}_{\text{卡尔曼滤波}} \underbrace{p(\tau_k | \mathbf{Y}_{c,k})}_{\text{粒子滤波}},$$

即通过卡尔曼滤波解析地估计系统条件线性部分(多径幅度参数), 而非线性状态部分(多径延迟参数)则使用粒子滤波估计. 边缘化滤波的更新步可表示为

$$p(\mathbf{a}_k, \tau_k | \mathbf{Y}_{c,k}) = \frac{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{a}_k, \tau_k)}{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k})} p(\mathbf{a}_k, \tau_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}) = \underbrace{\frac{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{a}_k, \tau_k)}{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k)}}_{\text{幅度估计: 卡尔曼滤波}} \underbrace{p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k)}_{\text{延迟估计: 粒子滤波}} \cdot \underbrace{\frac{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k)}{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k-1})}}_{\text{延迟估计: 粒子滤波}} p(\tau_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}). \quad (13)$$

### 5.1 路径幅度估计

从式(13)开始实施路径幅度估计,  $\mathbf{a}_k$  的条件后

验分布为

$$p(\mathbf{a}_k | \tau_k, \mathbf{Y}_{c,k}) = \frac{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{a}_k, \tau_k)}{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k)} p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k),$$

$\mathbf{a}_k$  的条件预测分布为

$$p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k) = N(\hat{\mathbf{a}}_{k|k-1}, \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}), \quad (14)$$

其中均值和协方差实际上是卡尔曼滤波预测步的结果, 即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_{k,a} \hat{\mathbf{a}}_{k-1|k-1}, \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_{k,a} \hat{\mathbf{P}}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_{k,a}^H + \Sigma_{k,a}. \end{aligned} \quad (15)$$

在得到  $p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k)$  的基础上, 通过应用卡尔曼滤波的更新步可得到

$$p(\mathbf{a}_k | \mathbf{Y}_{c,k}, \tau_k) = N(\hat{\mathbf{a}}_{k|k}, \hat{\mathbf{P}}_{k|k}). \quad (16)$$

其中均值和协方差由卡尔曼滤波更新方程得到, 即

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{a}}_{k|k} &= \hat{\mathbf{a}}_{k|k-1} + \mathbf{K}(\mathbf{y}_{c,k} - \mathbf{s}_c(\tau_k) \hat{\mathbf{a}}_{k|k-1}), \\ \hat{\mathbf{P}}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K} \mathbf{s}_c(\tau_k)) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}, \quad \mathbf{s}_c(\tau_k) = \mathbf{M}_{sc} \Omega(\tau_k), \\ \mathbf{K} &= \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{s}_c^H(\tau_k) (\mathbf{s}_c(\tau_k) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1} \mathbf{s}_c^H(\tau_k) + \mathbf{R})^{-1}. \end{aligned} \quad (17)$$

$\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$  是压缩后量测噪声的协方差矩阵.

### 5.2 路径延迟估计

由于系统模型的非线性, 余下的状态向量通过粒子滤波加以估计. 依据式(13),  $\tau_k$  的后验分布为

$$p(\tau_k | \mathbf{Y}_{c,k}) = \frac{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k-1}, \tau_k)}{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{Y}_{c,k-1})} p(\tau_k | \mathbf{Y}_{c,k-1}). \quad (18)$$

使用粒子滤波来实现式(18), 这包括两个基本部分, 分别为

$$\tau_k^i \sim q(\tau_k^i | \tau_{k-1}^i, \mathbf{y}_{c,k}), \quad (19)$$

$$w_k^i \propto w_{k-1}^i \frac{p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{y}_{c,k-1}, \tau_k^i) p(\tau_k^i | \tau_{k-1}^i)}{q(\tau_k^i | \tau_{k-1}^i, \mathbf{y}_{c,k})}. \quad (20)$$

值得注意的是, 在粒子权更新步(20)中, 边缘化的似然函数为

$$p(\mathbf{y}_{c,k} | \mathbf{y}_{c,k-1}, \tau_k^i) = N(\mathbf{y}_{c,k} | \boldsymbol{\mu}_i, \Sigma_i). \quad (21)$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_i &= \mathbf{s}_c(\tau_k^i) \hat{\mathbf{a}}_{k|k-1}^i, \\ \Sigma_i &= \mathbf{s}_c(\tau_k^i) \hat{\mathbf{P}}_{k|k-1}^i (\mathbf{s}_c(\tau_k^i))^H + \mathbf{R}. \end{aligned} \quad (22)$$

得到路径延迟参数的一组粒子和权后, 路径时延的最小均方误差估计(MMSE)为

$$\hat{\tau}_k = \sum_{i=1}^N w_k^i \tau_k^i.$$

### 5.3 重要分布选择

在粒子滤波中, 重要分布  $q(\cdot)$  的选择非常重要. 一个优化的重要分布函数可以通过 Laplace 方法得到<sup>[9, 15]</sup>, 该方法是一种利用高斯分布来近似概率密度函数的解析方法. 其中: 高斯分布的期望是原概率密度函数的模点, 方差是该函数的对数在模点的

Hessian 矩阵的逆. 本文的重要分布为

$$q(\boldsymbol{\tau}_k | \boldsymbol{\tau}_{k-1}, \mathbf{y}_{c,k}) \approx p(\boldsymbol{\tau}_k | \boldsymbol{\tau}_{k-1}, \mathbf{y}_{c,k}) \propto p(\mathbf{y}_{c,k} | \boldsymbol{\tau}_k) p(\boldsymbol{\tau}_k | \boldsymbol{\tau}_{k-1}).$$

对似然函数  $p(\mathbf{y}_{c,k} | \boldsymbol{\tau}_k)$  使用 Laplace 近似, 可以得到优化的重要分布为

$$q(\boldsymbol{\tau}_k | \boldsymbol{\tau}_{k-1}, \mathbf{y}_{c,k}) = N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}). \quad (23)$$

其中

$$\boldsymbol{\Sigma} = (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{mode}}^{-1} + \boldsymbol{\Sigma}_{k,\tau}^{-1})^{-1},$$

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Sigma}_q (\boldsymbol{\Sigma}_{\text{mode}}^{-1} \boldsymbol{\tau}_{\text{mode}} + \boldsymbol{\Sigma}_{k,\tau}^{-1} \mathbf{F}_{k,\tau} \boldsymbol{\tau}_{k-1})^{-1},$$

$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{mode}}^{-1}$  是  $\ln p(\mathbf{y}_{c,k} | \boldsymbol{\tau}_k)$  在  $\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}}$  处的 Hessian 矩阵,  $\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}}$  是  $p(\mathbf{y}_{c,k} | \boldsymbol{\tau}_k)$  的模点.

### 5.3.1 似然函数模点计算

计算  $p(\mathbf{y}_{c,k} | \boldsymbol{\tau}_k)$  的模点  $\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}}$  可以转化为如下的最优化问题:

$$(\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}}, \mathbf{a}_{\text{mode}}) = \arg \min_{\boldsymbol{\tau}_k, \mathbf{a}_k} \{ \|\mathbf{y}_{c,k} - \mathbf{s}_c(\boldsymbol{\tau}_k) \mathbf{a}_k\|^2 \}. \quad (24)$$

求解这类问题可以使用梯度类的方法, 如最速下降方法、Newton-Raphson 方法等, 但这些方法在优化高度非线性和高维问题时往往会发散. 本文使用低复杂度、稳健的空间交替期望最大 (SAGE) 方法<sup>[16]</sup>来求解优化问题 (24). SAGE 方法将高维优化问题简化成一系列相互耦合的简单优化问题, 其基本概念是隐含数据空间. 选择隐含数据空间为

$$\mathbf{s}_{i,k} = \mathbf{M}_{sc} \Phi(\tau_{i,k}) \mathbf{a}_{i,k} + \mathbf{n}_{i,k}, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (25)$$

隐含数据空间和观测向量的映射关系为

$$\mathbf{y}_{c,k} = \mathbf{s}_{i,k} + \sum_{i'=1, i' \neq i}^M \mathbf{s}_{i',k} + \mathbf{n}'_k. \quad (26)$$

在式 (25) 和 (26) 的基础上, 高维优化问题变为递推计算如下一系列相互耦合的简单优化问题:

$$(\hat{\tau}_{i,k}, \hat{\mathbf{a}}_{i,k}) = \arg \min_{\tau_{i,k}, \mathbf{a}_{i,k}} \{ \|\hat{\mathbf{s}}_{i,k} - \mathbf{M}_{sc} \Phi(\tau_{i,k}) \mathbf{a}_{i,k}\|^2 \},$$

$$i = 1, 2, \dots, M. \quad (27)$$

求解式 (27) 包括期望步和最大步两个主要步骤. 所谓期望步, 就是在其他路径参数保持不变的情况下对本路径信号的隐含数据空间  $\mathbf{s}_{i,k}$  进行估计, 即

$$\hat{\mathbf{s}}_{i,k} = \mathbf{y}_{c,k} - \sum_{i'=1, i' \neq i}^M \mathbf{M}_{sc} \Phi(\hat{\tau}_{i',k}) \hat{\mathbf{a}}_{i',k}. \quad (28)$$

在得到  $\hat{\mathbf{s}}_{i,k}$  后求解式 (27), 得到所谓的最大步为

$$\hat{\tau}_{i,k} = \arg \max_{\tau_{i,k}} \{ |\hat{\mathbf{s}}_{i,k}^H \mathbf{M}_{sc} \Phi(\tau_{i,k})|^2 \},$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{i,k} = \frac{\hat{\mathbf{s}}_{i,k}^H \mathbf{M}_{sc} \Phi(\hat{\tau}_{i,k})}{\|\mathbf{M}_{sc} \Phi(\hat{\tau}_{i,k})\|}. \quad (29)$$

详细的 SAGE 算法过程如下:

输入: 观测向量  $\mathbf{y}_{c,k}$ , 最大递归次数  $N_{\text{max}}$ , 估计

精度 TOL;

输出:  $\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}} = \boldsymbol{\tau}_k^{(l)}$ ,  $\mathbf{a}_{\text{mode}} = \mathbf{a}_k^{(l)}$ .

设初值  $\boldsymbol{\tau}_k^{(0)}$  和  $\mathbf{a}_k^{(0)}$ , 递归次数  $l = 0$ , 估计误差  $\varepsilon = \text{TOL} + 1$ ;

While  $\varepsilon > \text{TOL}$  or  $l < N_{\text{max}}$ ;

  令  $i = l \bmod (M) + 1$ ;

$$\hat{\mathbf{s}}_{i,k}^{(l)} = \mathbf{y}_{c,k} - \sum_{i'=1, i' \neq i}^M \mathbf{M}_{sc} \Phi(\hat{\tau}_{i',k}^{(l)}) \hat{\mathbf{a}}_{i',k}^{(l)};$$

$$\hat{\tau}_{i,k}^{(l+1)} = \arg \max_{\tau_{i,k}} \{ |(\hat{\mathbf{s}}_{i,k}^{(l)})^H \mathbf{M}_{sc} \Phi(\tau_{i,k})|^2 \};$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{i,k}^{(l+1)} = \frac{(\hat{\mathbf{s}}_{i,k}^{(l)})^H \mathbf{M}_{sc} \Phi(\hat{\tau}_{i,k}^{(l+1)})}{\|\mathbf{M}_{sc} \Phi(\hat{\tau}_{i,k}^{(l+1)})\|};$$

$$\hat{\tau}_{i,k}^{(l+1)} = \hat{\tau}_{i,k}^{(l)}, \quad i' \neq i;$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{i,k}^{(l+1)} = \hat{\mathbf{a}}_{i,k}^{(l)}, \quad i' \neq i;$$

$$\varepsilon = \|\boldsymbol{\tau}_k^{(l+1)} - \boldsymbol{\tau}_k^{(l)}\|^2 + \|\mathbf{a}_k^{(l+1)} - \mathbf{a}_k^{(l)}\|^2;$$

$$l + 1 \rightarrow l;$$

end.

### 5.3.2 Hessian 矩阵计算

获得  $\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}}$  后, 可以得到<sup>[17]</sup>

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\text{mode}}^{-1} =$$

$$2 \text{Re} \{ (\mathbf{D}^H (\mathbf{I} - \mathbf{P}_c) \mathbf{D})^T \otimes (\mathbf{s}_c^+ \mathbf{R}_y (\mathbf{s}_c^+)^H) \} |_{\boldsymbol{\tau}_{\text{mode}}}.$$

其中

$$\mathbf{R}_y = \mathbf{y}_{c,k} \mathbf{y}_{c,k}^H, \quad \mathbf{N}_c = (\mathbf{s}_c^H \mathbf{s}_c)^{-1},$$

$$\mathbf{P}_c = \mathbf{s}_c (\mathbf{s}_c^H \mathbf{s}_c)^{-1} \mathbf{s}_c^H, \quad \mathbf{s}_c^+ = \mathbf{N}_c \mathbf{s}_c^H,$$

$$\mathbf{D} = \left[ \frac{d}{d\tau_{1,k}} \mathbf{s}_c(\tau_{1,k}), \dots, \frac{d}{d\tau_{M,k}} \mathbf{s}_c(\tau_{M,k}) \right],$$

$$\mathbf{s}_c = [\mathbf{s}_c(\tau_{1,k}), \dots, \mathbf{s}_c(\tau_{M,k})],$$

$$\mathbf{s}_c(\tau_{i,k}) = \mathbf{M}_{sc} \Phi(\tau_{i,k}), \quad i = 1, 2, \dots, M,$$

Re 为取实部运算,  $\otimes$  为 Hadamard 积,  $\mathbf{I}$  为单位矩阵.

## 6 仿真实例

仿真来自 GPS 星座的信号, 包括一路直达信号和一路多径信号, 所用信号采用如下参数: C/A 码片速率  $f_c$  为 1.023 MHz, 直达信号载噪比为 45 dB/Hz, 多径信号与直达信号为同相, 信号多径比为 6 dB, 采样频率为 11 MHz, 脉冲  $g(t)$  是带宽为 10 MHz 的带限矩形脉冲, 其样本向量  $\mathbf{g}$  的样本数为  $N_g = 41$ . 一次观测的样本数为  $L = 225\,060$ , 压缩后观测向量的样本数为  $N_c = 41$ . 延迟协方差矩阵

$$\boldsymbol{\Sigma}_{k,\tau}^{1/2} = \text{diag}(0.01T_c, 0.01T_c).$$

接收机动态相当于载具有 30 m/s 的速度, 多径信号时延相对于时变直达信号时延  $\tau_1(t)$  的相对延迟为  $0.5T_c$ . 所有统计性能均通过 100 次蒙特卡罗仿真得到结果.

图 1 比较了分别使用过渡先验分布 (8) 和 (23) 作为重要分布这两种情况下, 滤波算法在不同粒子数目下对直达信号延迟估计的平均均方根误差. 从图 1 可以看出, 使用优化分布算法比过渡先验分布算法能够更快地逼近估计的理论下界. 这种效率的提升来自于使用 Laplace 近似得到的重要分布整合了当前的观测信息, 更加接近最优的重要分布. 而直接采用过渡先验分布作为重要分布则没有利用最近的观测信息产生粒子, 这使得采样得到的能够刻画后验分布的有效粒子数远小于前者 (见图 2), 从而要达到与前者相同的估计性能, 需要更多的粒子. 从图 2 还可以看出, 使用优化分布所需的重采样次数远小于过渡先验分布, 后者由于其低效率, 每一次递推都需要重采样, 进一步加重了计算的负担.

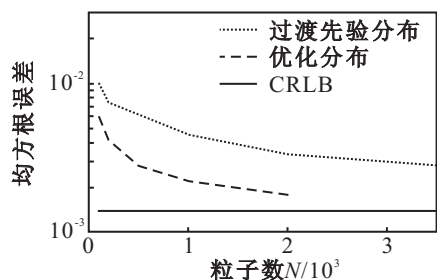


图 1 直达信号延迟估计的均方根误差随粒子数的变化

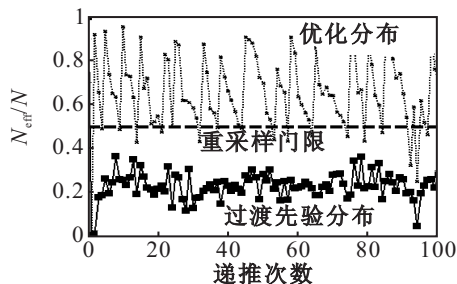


图 2 有效的粒子数  $N_{\text{eff}}/N$ ,  $N = 200$

图 3 比较了未使用数据压缩和使用压缩两种情况下粒子权计算所花费的平均时间. 使用未压缩的观测信号计算粒子权所需的平均时间为 0.21 s, 而使用压缩数据所需的平均时间为 0.000 188 s.

图 4 描述了所提出的算法在不同粒子数目下对直达信号时间延迟估计的均方根误差, 并与扩展卡尔曼滤波 (EKF) 的结果以及理论下界作了比较.

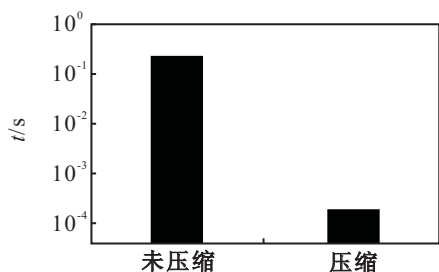


图 3 粒子权的计算时间

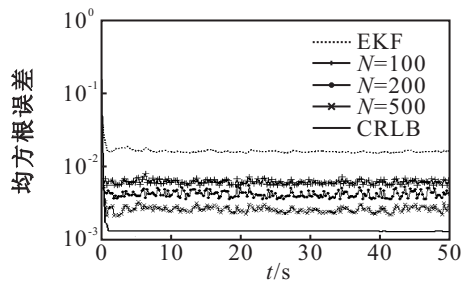


图 4 直达信号时间延迟估计的均方根误差

### 7 结 论

基于多径是 GPS 高精度应用的主要误差源, 为了消除多径的影响, 本文提出了一种基于粒子滤波的多径估计算法. 仿真表明: 1) 使用 Laplace 近似得到的重要分布能有效减少滤波所需的粒子数, 从实时信号处理角度而言, 更少的粒子意味着更少的存储量和计算量; 2) 数据压缩技术能有效降低粒子重要权的计算时间; 3) 同基于 EKF 的方法相比, 所提出算法的估计性能更加接近于理论的估计下界.

### 参考文献(References)

- [1] Closas P, Fernandez-Prades C, Fernandez-Rubio J A, et al. Multipath mitigation using particle filtering[C]. Proc of ION GNSS 2006. Fort Worth, 2006: 1733-1740.
- [2] Dierendonck A J V, Fenton P, Ford T. Theory and performance of narrow correlator spacing in a GPS receiver[C]. Proc of the ION National Technical Meeting. San Diego, 1992: 115-124.
- [3] Garin L, Diggelen F V, Rousseau J. Strobe and edge correlator multipath mitigation for code[C]. Proc of the 9th Int Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. Kansas, 1996: 657-664.
- [4] Jones J, Fenton P C, Smith B. Theory and performance of the pulse aperture correlator[R]. Calgary: NovAtel, 2004.
- [5] Antreich F, Esbri-Robriguez O, Nossek J A, et al. Estimation of synchronization parameters using SAGE in a GNSS-receiver[C]. Proc of the 18th Int Technical Meeting of the Satellite Division of the Institute of Navigation. Long Beach, 2005: 2124-2131.
- [6] 胡士强, 敬忠良. 粒子滤波算法综述[J]. 控制与决策, 2005, 20(4): 361-365.  
(Hu S Q, Jing Z L. Overview of particle filter algorithm[J]. Control and Decision, 2005, 20(4): 361-365.)
- [7] Cappe O, Godsill S J, Moulines E. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo[J]. Proc of the IEEE, 2007, 95(5): 899-924.
- [8] Lentmaier M, Krach B, Robertson P. Bayesian time delay estimation of GNSS signals in dynamic multipath environments[J]. Int J of Navigation and Observation, 2008.