文章编号: 1001-0920 (2010) 11-1723-04

线性时滞系统前馈-反馈次优控制: Taylor 级数法

张宝琳[1], 郑菲菲[1], 唐功友[2], 曹飞龙[1]

(1. 中国计量学院 理学院，杭州 310018；2. 中国海洋大学 信息科学与工程学院，山东 青岛 266071)

摘 要: 研究线性时滞系统最优控制的前馈反馈近似设计问题. 基于 Taylor 级数法, 将系统的二次型最优控制问题转化为线性代数方程组的求解问题, 给出了系统前馈反馈次优控制律的存在唯一性条件和 Taylor 级数表示形式. 仿真算例验证了方法的有效性.

关键词: 时滞系统；最优控制；前馈-反馈控制；Taylor 级数

中图分类号: TP273 **文献标识码:** A

Feedforward and feedback suboptimal control for linear time-delay systems：Taylor series approach

ZHANG Bao-lin[1]，*ZHENG Fei-fei*[1]，*TANG Gong-you*[2]，*CAO Fei-long*[1]

(1. College of Science，China Jiliang University，Hangzhou 310018，China；2. College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266071, China. Correspondent: ZHANG Bao-lin, E-mail: hiblzhang@gmail.com)

Abstract: A suboptimal design problem of feedforward and feedback optimal control for linear time-delay systems is investigated. Based on the Taylor series approach, the quadratic suboptimal control problem of the original system is transformed into a problem of solving linear equations. The existence and uniqueness conditions of the suboptimal controller as well as its series-based representation are presented. A numerical example shows the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: Time-delay systems；Optimal control；Feedforward and feedback control；Taylor series

1 引 言

几乎所有的实际控制系统都存在时滞现象. 时滞系统的稳定性分析与综合是重要的研究课题之一. 近年来, 关于时滞系统的最优控制研究, 无论是理论研究还是工程应用, 都取得了一系列的成果. 迭代动态规划法[1]是时滞系统最优设计的有效方法之一. 文献 [2] 在 delta 域中基于动态规划法研究网络控制系统, 给出了随机时滞系统的最优控制设计方法. 文献 [3] 利用模型预测控制方法来补偿网络控制系统中随机时滞对系统性能的影响. 另外, 对偶原理[4]和无时滞转换方法[5,6]是研究含控制时滞系统最优控制问题的两种有效方法. 基于模糊控制[7,8]等智能控制方法也越来越引起人们的重视.

针对可分离线性部分和非线性部分的非线性系统及时滞系统, 文献 [9-11] 分别给出了时滞系统最优控制律设计的逐次逼近方法和灵敏度法. 这两种方法的特点在于将时滞项视为扰动并引入时滞补偿向量, 通过精确求解线性项和近似求解补偿项得到系统的近似最优控制律. 其中, 时滞补偿项依赖于对应两点边值问题的求解. 通常, 获得该问题的解析解非常困难. 如何通过求解两点边值问题的数值解提高算法精度, 进而得到系统高精度的次优控制律, 有待于进一步研究.

本文基于 Taylor 级数方法研究线性时滞系统的最优控制问题, 得到了系统的次优控制律. 该方法将两点边值问题的求解最终转化为线性方程组的求解, 算法简单, 收敛速度快.

收稿日期: 2009-09-16；**修回日期:** 2009-11-05.

基金项目: 国家自然科学基金项目(40776051, 60874029, 90818021)；浙江省自然科学基金项目(Y107232)；浙江省教育厅科研项目(Y200702660)；中国计量学院123人才计划项目(2006RC17).

作者简介: 张宝琳(1972−), 男, 宁夏西吉人, 副教授, 博士, 从事时滞系统、奇异摄动系统等研究；郑菲菲(1986−), 女, 山东东营人, 硕士生, 从事时滞系统的分析与设计的研究.

2 问题描述

考虑线性时滞系统

$$\begin{cases}\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-\tau)+Bu(t),\\ x(t)=\varphi(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0,\end{cases}\tag{1}$$

关于二次型性能指标泛函

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}[x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)+u^{\mathrm{T}}(t)Ru(t)]\mathrm{d}t\tag{2}$$

的最优控制问题. 其中: $x\in R^n$ 和 $u\in R^r$ 分别为状态向量和控制向量; A,A_1,B 为适当维数的常数矩阵; $\tau>0$ 为时滞项; $\varphi(t)$ 为连续的初始向量函数.

易知系统 (1) 关于 (2) 的最优控制律为

$$u(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\lambda(t).\tag{3}$$

其中 $\lambda(t)$ 为下面两点边值问题的解:

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=Ax(t)+A_1x(t-\tau)+Bu(t),\\&\dot{\lambda}(t)=-f_1(x(t),\lambda(t),\lambda(t+\tau)),\\&x(t)=\varphi(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0,\ \ \lambda(\infty)=0.\end{aligned}\tag{4}$$

这里

$$f_1(x(t),\lambda(t),\lambda(t+\tau))=\\ \begin{cases}Qx(t)+A^{\mathrm{T}}\lambda(t)+A_1^{\mathrm{T}}\lambda(t+\tau),\ 0<t\leqslant t_f-\tau;\\ Qx(t)+A^{\mathrm{T}}\lambda(t),\ t_f-\tau<t\leqslant t_f,\ t_f\to\infty.\end{cases}\tag{5}$$

令

$$\lambda(t)=Px(t)+g(t).\tag{6}$$

其中: P 为 Riccati 代数方程

$$PA+A^{\mathrm{T}}P-PSP+Q=0\tag{7}$$

的唯一正定解, $S=BR^{-1}B^{\mathrm{T}}$, $g(t)\in R^n$ 为待求的伴随向量.

由式 (6), 最优控制律 (3) 可表示为

$$u(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}(Px(t)+g(t)).\tag{8}$$

由式 (1), (4) 及 (6) 易得, $g(t)$ 满足

$$\dot{g}(t)=f_2(x(t),g(t)),\ g(\infty)=0.\tag{9}$$

其中

$$f_2(x(t),g(t))=\\ \begin{cases}(PS-A^{\mathrm{T}})g(t)-PA_1x(t-\tau)-A_1^{\mathrm{T}}g(t+\tau)-\\ A_1^{\mathrm{T}}P(t+\tau)x(t+\tau),\ 0<t\leqslant t_f-\tau;\\ (PS-A^{\mathrm{T}})g(t)-PA_1x(t-\tau),\ t_f-\tau<t\leqslant t_f.\end{cases}\tag{10}$$

这里 $x(t)$ 满足

$$\begin{aligned}&\dot{x}(t)=(A-SP)x(t)+A_1x(t-\tau)-Sg(t),\\&x(t)=\varphi(t),\ -\tau\leqslant t\leqslant 0.\end{aligned}\tag{11}$$

于是, 方程 (9), (11) 构成了关于 $x(t)$ 和 $g(t)$ 的新的线性两点边值问题. 下面给出近似求解该问题的 Taylor 级数方法, 进而研究系统次优控制律的存在唯一性和算法设计问题.

3 次优控制律设计

3.1 问题转化

为表示简便, 令

$$\begin{aligned}&a_0=0,\ a_1=t_f,\ a_2=t_f-\tau,\\&a_3=t_f+\tau,\ a_4=a_5=-\tau,\end{aligned}\tag{12}$$

$$h(t)=\begin{bmatrix}h_1(t)\\h_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x(t)\\g(t_f-t)\end{bmatrix}.\tag{13}$$

由式 (9) 及式 (11) ~ (13), 易得

$$\dot{h}(t)=\\ \begin{cases}\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\bar{A}_ih(a_i-t)+\sum_{i=0,4,5}\bar{A}_ih(a_i+t),\\ \qquad 0<t\leqslant a_1-a_5;\\ \displaystyle\sum_{i=1}^{2}\bar{A}_ih(a_i-t)+\sum_{i=0,4}\bar{A}_ih(a_i+t),\\ \qquad a_1-a_5<t\leqslant a_1;\end{cases}\tag{14}$$

$$h^{\mathrm{T}}(0)=[\ \varphi^{\mathrm{T}}(0)\ \ g^{\mathrm{T}}(t_f)\ ].$$

其中

$$\bar{A}_0=\begin{bmatrix}A-SP&0\\0&A^{\mathrm{T}}-PS\end{bmatrix},\ \bar{A}_1=\begin{bmatrix}0&-S\\0&0\end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_2=\begin{bmatrix}0&0\\PA_1&0\end{bmatrix},\ \bar{A}_3=\begin{bmatrix}0&0\\A_1^{\mathrm{T}}P&0\end{bmatrix},$$

$$\bar{A}_4=\begin{bmatrix}A_1&0\\0&0\end{bmatrix},\ \bar{A}_5=\begin{bmatrix}0&0\\0&A_1^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.\tag{15}$$

于是关于 $x(t)$ 和 $g(t)$ 的线性两点边值问题转化为关于向量 $h(t)$ 的微分方程初值问题.

3.2 Taylor 级数方法

设 $h(t)$ 的 Taylor 展开式的前 m 项部分和为

$$h(t)=H^{\mathrm{T}}T(t).\tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}&H^{\mathrm{T}}=(h_0,h_1,\cdots,h_{m-1}),\\&h_i^{\mathrm{T}}=(h_{i,1},h_{i,2},\cdots,h_{i,n}\vdots h_{i,n+1},\cdots,h_{i,2n}),\\&T^{\mathrm{T}}(t)=[T_0(t),T_1(t),\cdots,T_{m-1}(t)],\\&T_i(t)=t^i,\ \ i=0,1,\cdots,m-1.\end{aligned}\tag{17}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(a+b)^n=\sum_{i=0}^{n}\begin{bmatrix}n\\i\end{bmatrix}a^ib^{n-i},\\&n=0,1,\cdots,m-1,\end{aligned}\tag{18}$$

从而由式 (16) 及 (18) 可得

$$\begin{aligned}&h(a_l-t)=H^{\mathrm{T}}K_lT(t),\ l=1,2,3;\\&h(t+a_p)=H^{\mathrm{T}}K_PT(t),\ p=4,5.\end{aligned}\tag{19}$$

其中

$$K_l=(\bar{K}_{ij}^{(l)})_{m\times m},\ l=1,2,3;$$

$$\bar{K}_{ij}^{(l)}=\begin{cases}(-1)^j\begin{bmatrix}i\\ j\end{bmatrix}a_l^{i-j},\ j\leqslant i;\\ 0,\ j>i;\end{cases}$$

$$K_p=(\bar{K}_{ij}^{(p)})_{m\times m},\ p=4,5;$$

$$\bar{K}_{ij}^{(p)}=\begin{cases}\begin{bmatrix}i\\ j\end{bmatrix}a_p^{i-j},\ j\leqslant i;\\ 0,\ j>i;\end{cases}$$

$$i,\ j=0,1,2,\cdots,m-1. \tag{20}$$

从而, 微分方程 (14) 可化为

$$\begin{aligned}&\dot{h}(t)=\boldsymbol{\Omega}(t,H)T(t),\\ &h^{\mathrm{T}}(0)=[\ \varphi^{\mathrm{T}}(0)\ \ g^{\mathrm{T}}(t_f)\ ].\end{aligned} \tag{21}$$

其中

$$\boldsymbol{\Omega}(t,H)=\begin{cases}\sum\limits_{l=0}^{5}\bar{A}_lH^{\mathrm{T}}K_l,\ 0<t\leqslant t_f-\tau;\\ \sum\limits_{l=0}^{2}\bar{A}_lH^{\mathrm{T}}K_l+\bar{A}_4H^{\mathrm{T}}K_4,\ t_f-\tau<t\leqslant t_f.\end{cases} \tag{22}$$

这里 K_0 为 m 阶单位矩阵. 又

$$\int_0^t T(s)\mathrm{d}s\approx\bar{P}T(t), \tag{23}$$

其中

$$\bar{P}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&\cdots&0\\ 0&0&1/2&0&\cdots&0\\ 0&0&0&1/3&\cdots&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ 0&0&0&0&\cdots&1/m\end{bmatrix}. \tag{24}$$

对式 (21) 两端从 0 到 t 积分, 并注意到 (23), 易得

$$(H^{\mathrm{T}}-W)T(t)=\boldsymbol{\Omega}(t,H)\bar{P}T(t). \tag{25}$$

其中: $W=[h(0)\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{0}\cdots\mathbf{0}]$, $\mathbf{0}$ 为 $2n$ 阶零列向量. 比较式 (25) 等号两边 $T(t)$ 的系数, 可得代数方程组

$$H^{\mathrm{T}}-\boldsymbol{\Omega}(t,H)\bar{P}=W. \tag{26}$$

由 Kronecker 直积的性质及式 (26), 可得关于 $\mathrm{vec}(H^{\mathrm{T}})$ 的线性代数方程组

$$G(t)\mathrm{vec}(H^{\mathrm{T}})=\mathrm{vec}(W). \tag{27}$$

其中

$$G(t)=\begin{cases}I-\sum\limits_{l=0}^{5}\left[(K_l\bar{P})^{\mathrm{T}}\otimes\bar{A}_l\right],\\ \quad 0<t\leqslant t_f-\tau;\\ I-\sum\limits_{l=0}^{2}\left[(K_l\bar{P})^{\mathrm{T}}\otimes\bar{A}_l\right]-(K_4\bar{P})^{\mathrm{T}}\otimes\bar{A}_4,\\ \quad t_f-\tau<t\leqslant t_f.\end{cases} \tag{28}$$

这里 I 为 $2nm$ 阶单位矩阵. 因此, 当矩阵 $G(t)$ 非奇异时, 便可求出 H.

3.3 前馈反馈次优控制律设计

下面给出系统次优控制律的设计方法. 令

$$H_x^{(m)}=\begin{bmatrix}h_{01}&h_{11}&\cdots&h_{m-2,1}&h_{m-1,1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ h_{0n}&h_{1n}&\cdots&h_{m-2,n}&h_{m-1,n}\end{bmatrix}, \tag{29a}$$

$$H_g^{(m)}=\begin{bmatrix}h_{0,n+1}&h_{1,n+1}&\cdots&h_{m-2,n+1}&h_{m-1,n+1}\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\ h_{0,2n}&h_{1,2n}&\cdots&h_{m-2,2n}&h_{m-1,2n}\end{bmatrix}. \tag{29b}$$

由式 (16), (17) 可得系统的 m 阶次优状态向量

$$x^{(m)}(t)=H_x^{(m)}T^{(m)}(t),\ \ m=1,2,\cdots. \tag{30}$$

相应地, 其 m 阶伴随向量为

$$g^{(m)}(t)=H_g^{(m)}T^{(m)}(t_f-t),\ \ m=1,2,\cdots. \tag{31}$$

从而, 由式 (8) 可得系统的 m 阶近似最优控制律为

$$\begin{aligned}u^{(m)}(t)=&-R^{-1}B^{\mathrm{T}}[PH_x^{(m)}T^{(m)}(t)+\\ &H_g^{(m)}T^{(m)}(t_f-t)],\ m=1,2,\cdots,\end{aligned} \tag{32}$$

其中

$$T^{(m)}(t)=[T_0(t)\quad T_1(t)\quad\cdots\quad T_{m-1}(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{33}$$

综上所述, 有下面结论:

定理 1 考虑线性时滞系统 (1) 关于二次型性能指标 (2) 的最优控制问题, 若:

1) (A,B) 可控, $(A,Q^{1/2})$ 可观;

2) $G(t)$ 非奇异.

则系统的次优控制律由式 (32) 唯一决定. 其中: P 为 Riccati 代数方程 (7) 的唯一正定解; $H_x^{(m)}$, $H_g^{(m)}$ 和 $T^m(t)$ 分别由式 (29), (34) 确定.

证明 控制律的存在唯一性取决于 Riccati 代数方程 (7) 和线性代数方程组 (27) 解的存在唯一性. 由条件 1) 和 2) 易得证. □

注 1 容易得到系统次优控制律的递推公式为

$$\begin{aligned}&u^{(1)}(t)=-R^{-1}B^{\mathrm{T}}P\varphi(t),\\ &u^{(m+1)}(t)=u^{(m)}(t)-R^{-1}B^{\mathrm{T}}\hat{T}_m(t)h_m,\\ &\qquad m=1,2,\cdots.\end{aligned} \tag{34}$$

其中

$$\hat{T}_m(t)=[\ t^mP\ \vdots\ (t_f-t)^m\ I_n], \tag{35}$$

I_n 为 n 阶单位矩阵.

注 2 由上述递推公式可以看出, 系统次优控制律的求解过程非常简单, 每次迭代只需求解一 $2n$ 阶线性代数方程组. 因此, 相对于逐次逼近方法 [9] 和灵敏度法 [11], 本文算法更为简单. 尽管当时滞 τ 较大且迭代次数较小时, 其误差相对较大; 但随着迭代次

数 m 的增大, 由于非线性项的补偿作用, 使得次优控制律能快速逼近真值.

4　仿真算例

设线性时滞系统 (1) 的系数矩阵为

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1.2\\ -3 & -2\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}0.5 & 0.8\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}0\\ 0.5\end{bmatrix}.$$

初始状态函数为 $\varphi(t)=[\,0.1\ \ -0.05\,]^{\mathrm{T}}$, $0\leqslant t\leqslant\tau$. 设性能指标的权矩阵为 $Q=\mathrm{diag}(3,5)$ 和 $R=0.5$.

当系统的时滞 $\tau=0.2$ 时, 表 1 给出了采用本文方法当 m 取不同值时系统二次型性能指标值的各次近似值. 若给定容许误差为 $\varepsilon=0.01$, 经过计算容易得到 $|(J_{11}-J_{10})/J_{11}|<\varepsilon$. 此时, u_{11} 即可作为系统满足精度要求的次优控制律.

图 1 ∼ 图 3 给出了当 $m=5,7,9$ 和 11 时系统的控制变量和状态变量的仿真曲线. 由表 1 和图 1∼图 3 可以看出, Taylor 级数法对于求解线性时滞系统的最优控制问题是有效的.

表 1　系统二次型性能指标值的各次近似值

m	1	3	5	7	9	10	11
J_m	0.112 3	1.508 2	0.032 8	0.009 7	0.008 5	0.008 1	0.008 0

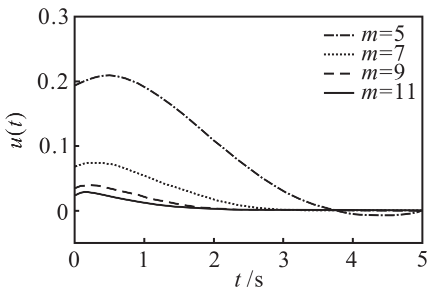

图 1　控制变量 u

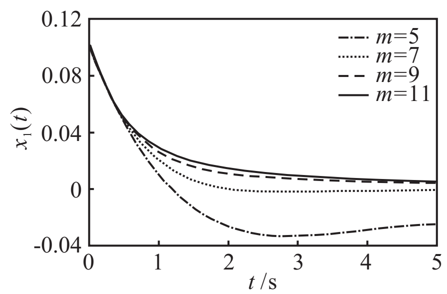

图 2　状态变量 x_1

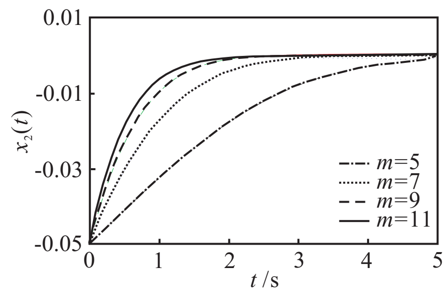

图 3　状态变量 x_2

5　结　论

本文基于 Taylor 级数方法, 研究了线性时滞系统最优控制的近似设计问题. 首先将既含超前项又含滞后项的两点边值问题转化为微分方程初值问题; 然后给出了基于 Taylor 级数法的近似求解过程, 从而将线性时滞系统最优控制律的设计问题转化为线性代数方程组的递推求解问题. 该方法简单可行, 易于实现, 具有较快的收敛速度.

参考文献(References)

[1] Chen C L, Sun D Y, Chang C Y. Numerical solution of time-delayed optimal control problems by iterative dynamic programming[J]. Optimal Control Applications and Methods, 2000, 21(3): 91-105.

[2] Hirano H, Azuma T, Fujita M. Optimal control of linear systems with random time delays in Delta domain[C]. Proc of the 42nd IEEE Conf on Decision and Control. Maui: IEEE Press, 2003: 734-735.

[3] Yu S M, Yang M Y, Yu L. Predictive compensation for stochastic time delay in network control systems[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(2): 231-238.

[4] Basin M, Fridman L, Rodriguez-Gonzalez J, et al. Optimal and robust sliding mode control for linear systems with multiple time delays in control input[J]. Asian J of Control, 2003, 5(4): 557-567.

[5] Cai G P, Huang J Z. Optimal control method with time delay in control[J]. J of Sound and Vibration, 2002, 251(3): 383-394.

[6] Cai G P, Huang J Z, Yang S X. An optimal control method for linear systems with time delay[J]. Computers and Structures, 2003, 81(15): 1539-1546.

[7] Huang H, Wang N, Wang S Q. Design of fuzzy controller for a class of nonlinear multi-time-delay systems[J]. J of Zhejiang University, 2003, 37(6): 670-674.

[8] Zhang X F, Cheng Z L, Liu Q R. A fuzzy logic approach to optimal control of nonlinear time-delay systems[C]. Proc of the 5th World Congress on Intelligent Control and Automation. Hangzhou: IEEE Press, 2004: 902-906.

[9] 唐功友, 赵艳东, 陈显利. 带正弦干扰的线性时滞系统的次优控制[J]. 控制与决策, 2004, 19(5): 529-533.
(Tang G Y, Zhao Y D, Chen X L. Suboptimal control for time-delay linear systems under sinusoidal disturbances[J]. Control and Decision, 2004, 19(5): 529-533.)

[10] Tang G Y, Wang H. Suboptimal control for discrete linear systems with time-delay: A successive approximation approach[J]. Acta Automatica Sinica, 2005, 31(3): 419-426.

(下转第1731页)