第 26 卷 第 2 期
Vol. 26 No. 2

控 制 与 决 策
Control and Decision

2011 年 2 月
Feb. 2011

文章编号:1001-0920 (2011) 02-0170-05

基于LMI不确定离散随机系统输出反馈保性能控制

高振斌[1], 钱富才[2]

(1. 西安财经学院 数学与应用数学系，西安 710100；
2. 西安理工大学 自动化与信息工程学院，西安 710048)

摘 要: 针对一类范数有界不确定离散随机系统, 研究了具有输出反馈控制器的保性能控制, 由此得到闭环系统的二次型性能指标上界的一般形式; 然后应用LMI凸优化技术, 推导出使闭环系统渐近稳定的最优保性能控制器的设计方法; 最后通过仿真算例验证了所提出算法的可行性和有效性.

关键词: 保性能控制；输出反馈；线性矩阵不等式；随机系统

中图分类号: TP275 **文献标识码:** A

Output feedback guaranteed cost control of uncertainty discrete stochastic system based on LMI

GAO Zhen-bin[1], *QIAN FU-cai*[2]

(1. Department of Mathematics and Applied Mathematics，Xi'an University of Finance and Economics，Xi'an 710100，China；2. School of Automation and Information Engineering，Xi'an University of Technology，Xi'an 710048，China．Correspondent：GAO Zhen-bin，E-mail：gzhenbin824@163.com)

Abstract: For the discrete stochastic system of the uncertainty with a class of bounded norm, the guaranteed cost control with the output feedback controller is studied, and the general form of the quadratic performance index upper bound for the closed-loop system is achieved. By using LMI convex optimal technique, the approach of designing the optimal guaranteed cost controller which makes the closed-loop system asymptotically stable is derived. Finally, the simulation example shows the feasibility and effectiveness of the presented method.

Key words: guaranteed cost control；output feedback；linear matrix inequality；stochastic system

1 引 言

系统的不确定性一般来自两个方面: 系统参数的不确定性和外界不确定干扰. 不确定系统的保性能控制最早由Chang等人[1]提出, 其后, 许多学者对此进行了研究[2-3]. Petersen等人[4-6]针对范数有界不确定连续随机系统基于LQG性能指标的输出反馈保性能控制进行了研究. 20世纪90年代初, 随着求解凸优化问题的内点法的提出, 线性矩阵不等式(LMI)得到了控制界的重视. 俞立等人[7]对具有两个不同被调输出的一类不确定离散系统的 H_2/H_∞ 状态反馈保性能控制问题进行了研究, 给出了基于LMI方法的 H_2/H_∞ 最优保性能控制器的设计方法, 然而, 其不确定性仅存在于状态方程之中. 文献[8]将LMI凸优化技术引入范数有界不确定连续随机系统, 得到了输出反馈控制器的LQG性能指标上界的一般形式以及使闭环系统渐近稳定的最优输出反馈保性能控制器.

本文在文献[8]的基础上, 将所得到的结果推广到范数有界不确定离散随机系统, 不确定性存在于状态方程和输出方程中, 并且外界干扰都为高斯白噪声. 基于LQG性能指标, 应用LMI方法, 研究了不确定离散随机系统具有输出反馈控制器的保性能控制, 并进行了仿真计算.

2 问题的提出

考虑如下形式的状态空间模型:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= (A+\Delta A)x(k)+ \\ &\qquad (B+\Delta B)u(k)+w_1(k), \\ y(k) &= (C+\Delta C)x(k)+ \\ &\qquad (D+\Delta D)u(k)+w_2(k). \end{aligned} \tag{1}$$

其中: $x(k)\in R^n$, $u(k)\in R^m$, $y(k)\in R^l$ 分别为系统

收稿日期: 2009-11-15；**修回日期:** 2010-06-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(60874033)；高等学校博士学科点专项科研基金项目(20060700007).

作者简介: 高振斌(1966−), 男, 讲师, 博士, 从事鲁棒自适应控制等研究；钱富才(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事非线性系统、动态规划等研究.

状态向量、输入向量和输出向量; $w_1(k) \in R^n$, $w_2(k) \in R^l$ 分别为系统噪声和量测噪声, 假设两者均为零均值高斯白噪声, 即: $w_1(k) \sim N(0, V_1)$, $w_2(k) \sim N(0, V_2)$, 且 $w_1(k)$, $w_2(k)$ 相互独立; A, B, C, D 为已知适当维数实常数矩阵; ΔA, ΔB, ΔC, ΔD 为反映系统模型中不确定性的未知实矩阵, 假定其是范数有界的, 且具有以下形式:

$$\begin{bmatrix} \Delta A & \Delta B \\ \Delta C & \Delta D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} F[\, E_1 \;\; E_2 \,].$$

其中: F 为一个满足 $F^{\mathrm T}F \leqslant I$ 的不确定矩阵; H_1, H_2, E_1 和 E_2 为已知的适当维数常数矩阵, 反映了不确定参数的结构信息.

性能指标

$$J = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}[x^{\mathrm T}(k)Qx(k) + u^{\mathrm T}(k)Ru(k)]\Big\}. \tag{2}$$

其中: $\mathrm{E}\{\cdot\}$ 为求数学期望, Q 为半正定阵, R 为正定阵.

存在输出反馈控制器

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1) &= A_c\hat{x}(k) + B_c y(k), \\ u(k) &= C_c\hat{x}(k). \end{aligned} \tag{3}$$

其中: $\hat{x}(k+1) \in R^n$; A_c, B_c, C_c 为待定矩阵. 这使得对于所有允许的参数不确定性, 闭环系统是渐近稳定的. 相应的闭环系统为

$$\bar{x}(k+1) = \tilde{A}\bar{x}(k) + \bar{B}\bar{w}(k). \tag{4}$$

其中

$$\bar{x}(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \hat{x}(k) \end{bmatrix},\ \bar{w}(k) = \begin{bmatrix} V_1^{-1/2}w_1(k) \\ V_2^{-1/2}w_2(k) \end{bmatrix},$$

$$\tilde{A} = \bar{A} + \bar{H}F\bar{E},\ \bar{B} = \begin{bmatrix} V_1^{1/2} & 0 \\ 0 & B_cV_2^{1/2} \end{bmatrix}.$$

这里

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_cC & A_c + B_cDC_c \end{bmatrix},\ \bar{H} = \begin{bmatrix} H_1 \\ B_cH_2 \end{bmatrix},$$

$$\bar{E} = [\, E_1 \;\; E_2C_c \,].$$

相应的闭环系统性能指标为

$$J = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}[\bar{x}^{\mathrm T}(k)\tilde{Q}\bar{x}(k)]\Big\}. \tag{5}$$

其中

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & C_c^{\mathrm T}RC_c \end{bmatrix}.$$

3　定理和主要结果

引理 1[9]　给定适当维数矩阵 Y, D 和 E, 其中 Y 是对称的, 则有

$$Y + DFE + E^{\mathrm T}F^{\mathrm T}D^{\mathrm T} < 0,$$

对于所有满足 $F^{\mathrm T}F \leqslant I$ 的矩阵 F 成立, 当且仅当存在一个常数 $\varepsilon > 0$, 使得

$$Y + \varepsilon DD^{\mathrm T} + \varepsilon^{-1}E^{\mathrm T}E < 0.$$

引理 2 (矩阵的Schur补性质)[9]　对于给定的对称矩阵 $S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$, 以下3个条件是等价的:

1) $S < 0$;

2) $S_{11} < 0,\ S_{22} - S_{21}S_{11}^{-1}S_{12} < 0$;

3) $S_{22} < 0,\ S_{11} - S_{12}S_{22}^{-1}S_{21} < 0$.

定义 1 (二次稳定)[9]　对于不确定离散系统 (1), 如果存在正定对称阵 $P > 0$ 使

$$(A + H_1FE_1)^{\mathrm T}P(A + H_1FE_1) - P < 0, \tag{6}$$

并且 $F^{\mathrm T}F \leqslant I$, 则认为离散系统 (1) 是二次稳定的.

同理, 对于不确定离散系统 (1), 如果存在一个输出反馈控制器 (3), 使得闭环系统 (4) 满足

$$\tilde{A}^{\mathrm T}P\tilde{A} - P < 0, \tag{7}$$

则闭环系统 (4) 是二次稳定的.

定义 2[9]　对于不确定离散系统 (1) 和性能指标 (2), 如果存在正定矩阵 $\bar{Q} > 0$ 使

$$\tilde{A}\bar{Q}\tilde{A}^{\mathrm T} - \bar{Q} + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm T} < 0, \tag{8}$$

则输出反馈控制器 (3) 是二次保性能控制器.

推论 1　对于闭环系统 (4), 如果存在正定矩阵 $P > 0$ 使

$$\begin{bmatrix} -P & P\tilde{A} \\ \tilde{A}^{\mathrm T}P & -P \end{bmatrix} < 0, \tag{9}$$

则闭环系统 (4) 是二次稳定的.

根据式 (7), 由引理 2 中的性质 2), 即可证明推论 1 成立.

推论 2　对于闭环系统 (4), 如果存在正定矩阵 $\bar{V} > 0$ 使

$$\begin{bmatrix} -\bar{V} & \tilde{A}^{\mathrm T}\bar{V} \\ \bar{V}\tilde{A} & -\bar{V} + \bar{V}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm T}\bar{V} \end{bmatrix} < 0, \tag{10}$$

则闭环系统 (4) 是二次保性能稳定的.

证明　根据式 (8), 由引理 2 中的性质 2), 可得

$$\begin{bmatrix} -\bar{Q} & \bar{Q}\tilde{A}^{\mathrm T} \\ \tilde{A}\bar{Q} & -\bar{Q} + \bar{B}\bar{B}^{\mathrm T} \end{bmatrix} < 0.$$

进一步, 将上式左边矩阵分别左乘以和右乘以对角阵 $\mathrm{diag}(\bar{Q}^{-1}, \bar{Q}^{-1})$, 且令 $\bar{V} = \bar{Q}^{-1}$, 则推论 2 即可得证. □

引理 3 (离散随机系统状态转移阵的性质)[10]　对于离散随机系统

$$x(k+1) = \varPhi(k+1, k)x(k) + w(k).$$

其中: $x(k) \in R^n$ 为状态向量, $w(k) \in R^n$ 为噪声向量, $\varPhi(k+1, k) \in R^{n\times n}$ 为状态转移阵. 状态转移阵

$\Phi(k_2,k_1)$ 具有下列性质:

1) $\Phi(k,k)=I$;

2) $\Phi(k_3,k_2)\Phi(k_2,k_1)=\Phi(k_3,k_1)$;

3) $\Phi^{-1}(k_2,k_1)=\Phi(k_1,k_2)$.

定理 1 对于不确定离散系统(1)和性能指标(2), 如果存在正定矩阵 $\bar{Q}>0$, 使得输出反馈控制器(3)为二次保性能控制器, 则相应的闭环系统(4)二次稳定且性能指标(2)满足

$$J<\mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}\bar{Q}\Big\}=\mathrm{tr}(\tilde{C}\bar{Q}\tilde{C}^{\mathrm{T}}). \tag{11}$$

其中: $\tilde{C}=\begin{bmatrix}Q^{\frac{1}{2}} & 0\\ 0 & R^{\frac{1}{2}}C_c\end{bmatrix}$, 符号 $\mathrm{tr}(\cdot)$ 表示矩阵的迹.

证明 在闭环系统(4)中, 显然有 $\bar{w}(k)\sim N(0,I)$, 其中 I 为单位阵. 假定初始条件为 $\bar{x}(0)$, 且

$$\mathrm{E}\{\bar{x}(0)\bar{x}^{\mathrm{T}}(0)\}=Q_0\geqslant 0,$$

则在时刻 k 的状态协方差阵为

$$\bar{Q}_{\Delta}(k,0)=\mathrm{E}\{\bar{x}(k)\bar{x}^{\mathrm{T}}(k)\}.$$

根据引理3中的性质2), 可得

$$\begin{aligned}\bar{x}(k)=&\Phi(k,k-1)\bar{x}(k-1)+\bar{B}\bar{w}(k-1)=\\&\Phi(k,0)\bar{x}(0)+\sum_{i=1}^{k}\Phi(k,i)\bar{B}\bar{w}(i-1).\end{aligned}$$

其中: $\Phi(k,0)=\tilde{A}^k$, $\Phi(k,i)=\tilde{A}^{k-i}$. 于是

$$\begin{aligned}\bar{Q}_{\Delta}(k,0)=&\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)+\\&\sum_{i=1}^{k}\Phi(k,i)\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(k,i).\end{aligned}$$

假定时刻 k 固定, 且令 η 为任意给定向量, $\eta\in R^{2n}$, 于是存在如下表达式:

$$\sum_{i=1}^{k}\eta^{\mathrm{T}}\Phi(k,i)\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\Phi^{\mathrm{T}}(k,i)\eta=\sum_{i=1}^{k}\eta^{\mathrm{T}}(i)\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\eta(i).$$

其中: $\eta(i)=\Phi^{\mathrm{T}}(k,i)\eta(i=1,2,\cdots,k)$ 为如下状态方程的解:

$$\eta(i)=\tilde{A}^{-\mathrm{T}}\eta(i-1).$$

初始向量 $\eta(0)=\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)\eta$.

令 $V(\eta(i))=\eta^{\mathrm{T}}(i)\bar{Q}\eta(i)$. 由式(8)可得

$$\tilde{A}^{-1}\bar{Q}\tilde{A}^{-\mathrm{T}}-\bar{Q}>\tilde{A}^{-1}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\tilde{A}^{-\mathrm{T}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}&V(\eta(i))-V(\eta(i-1))=\\&\eta^{\mathrm{T}}(i)\bar{Q}\eta(i)-\eta^{\mathrm{T}}(i-1)\bar{Q}\eta(i-1)=\\&\eta^{\mathrm{T}}(i-1)\tilde{A}^{-1}\bar{Q}\tilde{A}^{-\mathrm{T}}\eta(i-1)-\eta^{\mathrm{T}}(i-1)\bar{Q}\eta(i-1)>\\&\eta^{\mathrm{T}}(i-1)\tilde{A}^{-1}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\tilde{A}^{-\mathrm{T}}\eta(i-1)=\\&\eta^{\mathrm{T}}(i)\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\eta(i).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\eta^{\mathrm{T}}(i)\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\eta(i)<\\&\sum_{i=1}^{k}[V(\eta(i))-V(\eta(i-1))]=\\&V(\eta(k))-V(\eta(0))=\\&\eta^{\mathrm{T}}(k)\bar{Q}\eta(k)-\eta^{\mathrm{T}}(0)\bar{Q}\eta(0).\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\eta^{\mathrm{T}}\bar{Q}_{\Delta}(k,0)\eta<&\eta^{\mathrm{T}}\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)\eta+\\&\eta^{\mathrm{T}}(k)\bar{Q}\eta(k)-\eta^{\mathrm{T}}(0)\bar{Q}\eta(0)<\\&\eta^{\mathrm{T}}\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)\eta+\eta^{\mathrm{T}}(k)\bar{Q}\eta(k).\end{aligned}$$

由于 $\eta(k)=\Phi^{\mathrm{T}}(k,k)\eta=\eta$, 上式可进一步表示为

$$\eta^{\mathrm{T}}\bar{Q}_{\Delta}(k,0)\eta<\eta^{\mathrm{T}}\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)\eta+\eta^{\mathrm{T}}\bar{Q}\eta.$$

由于上式对所有 $\eta\in R^{2n}$ 成立, 有

$$\bar{Q}_{\Delta}(k,0)\leqslant\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)+\bar{Q}.$$

于是, 闭环系统(4)的性能指标为

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to\infty}\mathrm{E}\Big\{\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}[x^{\mathrm{T}}(k)Qx(k)+u^{\mathrm{T}}(k)Ru(k)]\Big\}=\\&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\mathrm{E}\Big\{\begin{bmatrix}x(k)\\ \hat{x}(k)\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(k)\\ \hat{x}(k)\end{bmatrix}\Big\}=\\&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}\bar{Q}_{\Delta}(k,0)\Big\}<\\&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)\Big\}+\\&\mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC\end{bmatrix}\bar{Q}\Big\}.\end{aligned}$$

由于闭环系统(4)是二次稳定的, 有

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}\Phi(k,0)Q_0\Phi^{\mathrm{T}}(k,0)\Big\}=0,$$

因此性能指标满足

$$\begin{aligned}&J<\mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c\end{bmatrix}\bar{Q}\Big\}=\\&\mathrm{tr}(\tilde{C}^{\mathrm{T}}\tilde{C}\bar{Q})=\mathrm{tr}(\tilde{C}\bar{Q}\tilde{C}^{\mathrm{T}}).\end{aligned}$$ □

定理 2 离散随机系统(1)存在输出反馈二次保性能控制器(3), 当且仅当存在标量 $\varepsilon>0$, 对称正定矩阵 X 和 Y, 矩阵 $\hat{A}$, $\hat{B}$ 和 $\hat{C}$, 使得

$$\left[\begin{array}{cccc}-X & * & * & *\\ -I & -Y & * & *\\ AX+B\hat{C} & A & -X & *\\ \hat{A} & YA+\hat{B}C & -I & -Y\\ E_1X+E_2\hat{C} & E_1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & V_1^{\frac{1}{2}} & V_1^{1/2}Y\\ 0 & 0 & 0 & V_2^{1/2}\hat{B}^{\mathrm{T}}\\ 0 & 0 & H_1^{\mathrm{T}} & H_1^{\mathrm{T}}Y+H_2^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}}\end{array}\right.\to$$

$$\leftarrow \begin{array}{cccc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ -\varepsilon I & * & * & * \\ 0 & -I & * & * \\ 0 & 0 & -I & * \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1} I \end{array} \Bigg] < 0. \tag{12}$$

证明　根据式(10), 将矩阵 $\bar{V}$ 和其逆矩阵 $\bar{V}^{-1}$ 分块, 即

$$\bar{V} = \begin{bmatrix} Y & N \\ N^{\mathrm{T}} & W \end{bmatrix}, \bar{V}^{-1} = \begin{bmatrix} X & M \\ M^{\mathrm{T}} & Z \end{bmatrix}.$$

其中: $X, Y \in R^{n\times n}$ 为对称矩阵; W, Z 为任意对称矩阵. 由等式 $\bar{V}\bar{V}^{-1} = I$ 可得

$$\bar{V} \begin{bmatrix} X \\ M^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix},$$

进一步可得

$$\bar{V} \begin{bmatrix} X & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}. \qquad \square$$

令

$$F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ M^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}, F_2 = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & N^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

则有 $\bar{V}F_1 = F_2$, 由式(10)可得

$$\begin{bmatrix} -\bar{V} & \bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{V} \\ \bar{V}\bar{A} & -\bar{V}+\bar{V}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{V} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \bar{E}^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}}\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{V} \\ \bar{V}\bar{H}F\bar{E} & 0 \end{bmatrix} < 0.$$

令

$$\varTheta = \begin{bmatrix} -\bar{V} & \bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{V} \\ \bar{V}\bar{A} & -\bar{V}+\bar{V}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{V} \end{bmatrix},$$

则上式可进一步表示为

$$\varTheta + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{V}\bar{H} \end{bmatrix} F[\bar{E}\ \ 0] + [\bar{E}\ \ 0]^{\mathrm{T}}F^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{V}\bar{H} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} < 0.$$

由引理 1 可得

$$\varTheta + \varepsilon \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{V}\bar{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{V}\bar{H} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} + \varepsilon^{-1}[\bar{E}\ \ 0]^{\mathrm{T}}[\bar{E}\ \ 0] < 0,$$

即

$$\begin{bmatrix} -\bar{V}+\varepsilon^{-1}\bar{E}^{\mathrm{T}}\bar{E} & \bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{V} \\ \bar{V}\bar{A} & -\bar{V}+\bar{V}\bar{B}\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{V}+\varepsilon\bar{V}\bar{H}\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{V} \end{bmatrix} < 0.$$

进一步可得

$$\begin{bmatrix} -\bar{V} & \bar{A}^{\mathrm{T}}\bar{V} & \bar{E}^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ \bar{V}\bar{A} & -\bar{V} & 0 & \bar{V}\bar{B} & \bar{V}\bar{H} \\ \bar{E} & 0 & -\varepsilon I & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{V} & 0 & -I & 0 \\ 0 & \bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{V} & 0 & 0 & -\varepsilon^{-1}I \end{bmatrix} < 0.$$

对上式左边的矩阵分别左乘以矩阵 $\mathrm{diag}\{F_1^{\mathrm{T}}, F_1^{\mathrm{T}}, I, I, I\}$ 和右乘以矩阵 $\mathrm{diag}\{F_1, F_1, I, I, I\}$. 进一步利用矩阵的运算可得

$$F_1^{\mathrm{T}}\bar{V}F_1 = F_2^{\mathrm{T}}F_1 = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix},$$

$$F_1^{\mathrm{T}}\bar{V}\bar{A}F_1 = F_2^{\mathrm{T}}\bar{A}F_1 =$$

$$\begin{bmatrix} AX + BC_cM^{\mathrm{T}} & A \\ \begin{array}{l} YAX + NB_cCX + YBC_cM^{\mathrm{T}} + \\ N(A_c + B_cDC_c)M^{\mathrm{T}} \end{array} & YA + NB_cC \end{bmatrix}.$$

令

$$\hat{A} = YAX + \hat{B}CX + YB\hat{C} + NA_cM^{\mathrm{T}} + \hat{B}D\hat{C},$$
$$\hat{B} = NB_c,\ \hat{C} = C_cM^{\mathrm{T}},$$

则有

$$F_1^{\mathrm{T}}\bar{V}\bar{A}F_1 = F_2^{\mathrm{T}}\bar{A}F_1 = \begin{bmatrix} AX + B\hat{C} & A \\ \hat{A} & YA + \hat{B}C \end{bmatrix}.$$

同理可得

$$\bar{E}F_1 = [\,E_1X + E_2\hat{C}\ \ E_1\,],$$

$$\bar{B}^{\mathrm{T}}\bar{V}F_1 = \bar{B}^{\mathrm{T}}F_2 = \begin{bmatrix} V_1^{1/2} & V_1^{1/2}Y \\ 0 & V_2^{1/2}\hat{B}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},$$

$$\bar{H}^{\mathrm{T}}\bar{V}F_1 = \bar{H}^{\mathrm{T}}F_2 = [\,H_1^{\mathrm{T}}\ \ H_1^{\mathrm{T}}Y + H_2^{\mathrm{T}}\hat{B}^{\mathrm{T}}\,].$$

于是可得式(12).

在得到矩阵 X 和 Y 的值后, 由于 $MN^{\mathrm{T}} = I - XY$, 可通过矩阵 $I - XY$ 的奇异值分解来得到满秩矩阵 M 和 N. 控制器参数矩阵可通过下式得到:

$$C_c = \hat{C}M^{-\mathrm{T}},\ B_c = N^{-1}\hat{B},$$

$$A_c = N^{-1}(\hat{A} - YAX)M^{-\mathrm{T}} - B_cCXM^{-\mathrm{T}} - N^{-1}YBC_c - B_cDC_c. \qquad \square$$

定理 3　对于不确定离散随机系统(1)和性能指标(2), 如果以下优化问题有一个解为 ε^*, X^*, Y^*, $\hat{A}^*$, $\hat{B}^*$, $\hat{C}^*$, G^*:

$$\min_{\varepsilon, X, Y, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, G} \mathrm{tr}(G);$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} G & \begin{bmatrix} Q^{1/2}X & Q^{1/2} \\ R^{1/2}\hat{C} & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} Q^{1/2}X & Q^{1/2} \\ R^{1/2}\hat{C} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} & \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} \end{bmatrix} > 0,$$

式(12). (13)

则输出反馈控制器(3)是一个使得性能指标(11)具有最小上界 $\mathrm{tr}(G^*)$ 的二次保性能控制律.

证明　若闭环系统(4)存在式(11)表示的性能指标的上界, 即

$$J < \mathrm{tr}\Big\{\begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & C_c^{\mathrm{T}}RC_c \end{bmatrix}\bar{Q}\Big\} = \mathrm{tr}(\tilde{C}\bar{Q}\tilde{C}^{\mathrm{T}}),$$

其中 $\tilde{C} = \begin{bmatrix} Q^{1/2} & 0 \\ 0 & R^{1/2}C_c \end{bmatrix}$, 且存在对称正定矩阵 G,

使得 $\tilde{C}\bar{Q}\tilde{C}^{\mathrm{T}} < G$, 则令 $\bar{V} = \bar{Q}^{-1}$, 由引理 2 易得

$$\begin{bmatrix} G & \tilde{C} \\ \tilde{C}^{\mathrm{T}} & \bar{V} \end{bmatrix} > 0.$$

矩阵 F_1 在定理 2 的证明过程中已有定义, 将上式左边的矩阵两边左乘以对角阵 $\mathrm{diag}\{I, F_1^{\mathrm{T}}\}$, 右乘以对角阵 $\mathrm{diag}\{I, F_1\}$, 可得式 (13) 中的条件 1). 根据定理 2, 当条件 2) 成立时, 所得的输出反馈控制律可使得闭环系统 (4) 为二次保性能稳定的. 当条件 1) 和 2) 同时满足时, 得到输出反馈控制器 (3) 为一个可使得性能指标 (11) 具有最小上界 $\mathrm{tr}(G^*)$ 的二次保性能控制律. □

4 仿真实验

在不确定离散系统 (1) 的模型中有

$$A = \begin{bmatrix} 0.3679 & 0 \\ 0.1590 & 0.0489 \end{bmatrix}, \ B = \begin{bmatrix} 0.6321 \\ 0.4744 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \ D = 0, \ H_1 = \begin{bmatrix} -0.01 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$H_2 = 1, \ E_1 = [\,1 \ \ -1\,],$$

$$E_2 = 0, \ V_1 = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \ V_2 = 1.$$

要求设计由式 (3) 表示的输出反馈控制器, 使性能指标 (11) 具有最小上界. 式 (11) 中的加权矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, \ R = 0.1.$$

根据定理 3, 对于给定的 ε, 应用 LMI 工具箱中的求解器 mincx 求解该问题. 进一步, 对于不同的 ε 值, 重复这一过程, 可得 ε 和与之相应的目标函数值. 由计算结果可知, 当 $\varepsilon = 7.5$ 时, 相应的目标函数存在最小上界, 即 $J < 15.12$. 此时, 对应的对称正定阵为

$$X = \begin{bmatrix} 11.5932 & 10.5730 \\ 10.5730 & 15.5887 \end{bmatrix} > 0,$$

$$Y = \begin{bmatrix} 1.4430 & -0.3315 \\ -0.3315 & 6.8720 \end{bmatrix} > 0.$$

由于 $MN^{\mathrm{T}} = I - XY$, 对 $I - XY$ 进行奇异值分解可得

$$M = \begin{bmatrix} -0.6366 & 0.7712 \\ 0.7712 & 0.6366 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -15.8508 \\ -35.3399 & -118.3970 \end{bmatrix}.$$

进而可设计出由式 (3) 表示的输出反馈控制器, 其中

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.0330 & -0.0926 \\ 0.0061 & -0.0375 \end{bmatrix}, \ B_c = \begin{bmatrix} -0.0085 \\ 0.0037 \end{bmatrix},$$

$$C_c = \begin{bmatrix} -0.1744 \\ -8.7006 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

闭环系统 (4) 的标称系统矩阵为

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & BC_c \\ B_cC & A_c + B_cDC_c \end{bmatrix},$$

代入数据后, 可求得特征值为: $0.0230 \pm 0.0439i$, $0.0498, 0.3173$. 由此可以看出, 闭环系统特征值均位于单位圆内, 故闭环系统稳定. 闭环系统 (4) 各状态变量的变化趋势如图 1 所示.

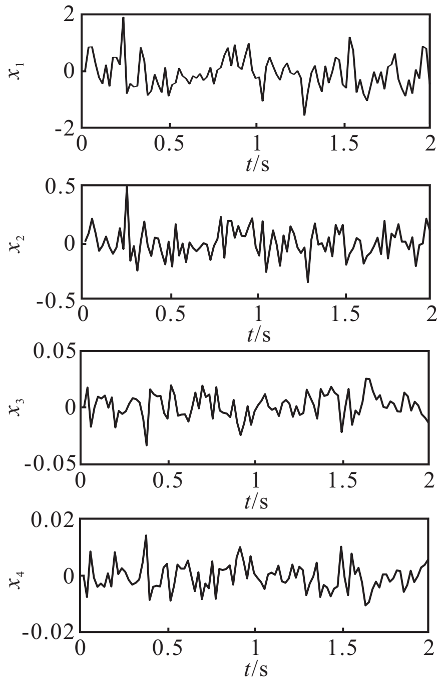

图 1 闭环系统状态变量变化趋势

5 结 论

本文针对范数有界不确定离散随机系统, 得到了 LQG 性能指标上界的一般形式. 对不确定离散随机系统的二次稳定和二次保性能稳定进行了研究, 并将其表示为 LMI 形式. 通过应用 LMI 技术, 得到了使闭环系统二次保性能稳定的输出反馈控制器的可行解, 并得到了使 LQG 性能指标具有最小上界的最优输出反馈控制器. 仿真计算表明, 本文方法计算方便, 可获得较为满意的结果.

参考文献(References)

[1] Chang S S L, Peng T K C. Adaptive guaranteed cost control of systems with uncertain parameters[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1972, 17(4): 474-483.

[2] Li D, Qian F C, Fu P L. Variance minimization approach for a class of dual control problems[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2002, 47(12): 2010-2020.

[3] Li D, Qian F C, Fu P L. Optimal nominal dual control for discrete-time linear-quadratic gaussian problems with unknown parameters[J]. Automatima, 2008, 44(1): 119-127.

(下转第181页)