

文章编号: 1001-0920(2011)03-0473-04

有界控制下单向收敛滑模控制

赵霞^{1,2}, 姜玉宪¹, 吴云洁¹

(1. 北京航空航天大学 自动化科学与电气工程学院, 北京 100191; 2. 河北经贸大学 信息技术学院, 石家庄 050061)

摘要: 提出一种控制有界情况下状态单向收敛的滑模控制方法. 对于二阶系统, 单向收敛是指初始状态与状态到达滑动模态的位置位于相平面同一象限的过程. 通过分析到达阶段的动态特性, 揭示了状态非单向收敛的原因, 并提出了一种单向收敛条件, 给出了系统状态单向收敛的区域. 将所提出的方法应用于具有单向收敛要求的交会对接控制系统, 结果验证了所提出方法的有效性.

关键词: 滑模控制; 到达阶段; 有界控制; 交会对接

中图分类号: TP273

文献标识码: A

Unidirectional sliding mode control with bounded control

ZHAO Xia^{1,2}, JIANG Yu-xian¹, WU Yun-jie¹

(1. School of Automation Science and Electrical Engineering, Beihang University, Beijing 100191, China; 2. College of Information Technology, Hebei University of Economics and Business, Shijiazhuang 050061, China. Correspondent: ZHAO Xia, E-mail: zhaoxia@asee.buaa.edu.cn)

Abstract: A unidirectional convergence sliding mode control with bounded control is proposed. For second-order system, the unidirectional convergence means that the initial state and the reaching position on sliding mode are in the same quadrant of phase plane. The cause of non directional motion is revealed by analyzing the dynamic motion of the reaching phase. The unidirectional convergence condition is proposed, and the unidirectional convergence domain is obtained. The above control method is used in rendezvous and docking control system which needs unidirectional convergence, and the results show the effectiveness of the proposed control method.

Key words: sliding mode control; reaching phase; bounded control; rendezvous and docking

1 引言

滑模控制能使系统状态沿预定滑动模态运行, 由于其鲁棒性和非线性等优点, 在航天控制、机器人控制等领域得到了广泛应用^[1-3]. 滑模控制下, 系统的运动过程包括到达阶段和滑动阶段. 到达阶段是指系统从初始状态到达滑模的过程, 滑动阶段是系统状态沿滑模运行的过程. 一般而言, 系统在滑动阶段的动态特性是确定的, 在到达阶段的动态特性是不确定的.

到达阶段的动态不确定性导致部分系统状态的变化过程不适于工程应用. 比如: 交会对接控制系统中, 代表相对距离的状态不能在控制过程中发生符号变化, 否则航天器可能发生碰撞事故; 飞机着陆控制系统中, 代表飞行高度的状态也不能发生符号变化, 否则飞机必将撞击地面, 导致着陆失败.

为了避免发生上述情况, 需对到达阶段的动态特性进行限定. 滑模控制中, 采用趋近律设计控制的方法

有效地改善了到达阶段的动态品质^[4], 但该方法未考虑控制的有界性. 实际工程中, 任何执行机构的输出幅值都是有限的, 故趋近律方法的作用范围受到限制. 文献[5]提出了一种新的到达条件, 确定了系统状态收敛到滑动模态的吸引区域. 但是, 该方法不能限定系统到达阶段的状态变化过程. 为此, 本文提出一种单向收敛条件, 并与文献[5]的到达条件相结合, 确定了单向收敛区域, 保证出发于该区域的状态变化过程适于上述工程应用.

2 单向收敛定义

给定一个二阶线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + u. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x = [x_1, x_2]^T$ 为系统状态变量; a_1, a_2 为系统参数; $|u| \leq U$ 代表控制有界, U 为控制最大幅值.

收稿日期: 2010-01-08; 修回日期: 2010-04-11.

作者简介: 赵霞(1979—), 女, 讲师, 博士生, 从事控制理论及其应用的研究; 姜玉宪(1937—), 男, 教授, 博士生导师, 从事控制理论及其应用等研究.

滑模控制中, 切换函数 s 多为线性形式, 如

$$s = cx_1 + x_2, \quad (2)$$

其中 $c > 0$. 考虑控制有界和航天中广泛使用的发动机形式, 设计控制律为

$$u = -U \operatorname{sgn}(s). \quad (3)$$

因为控制有界, 由传统到达条件得到的滑模区和吸引区都是有界的, 但是由吸引区出发的状态变化过程差异比较大. 为了直观说明上述问题, 举例如下:

例 1 取式(1)中 $a_1 = -1, a_2 = 0$, 式(2)中 $c = 1$, 式(3)中 $U = 2$. 任选 $\{s \dot{s} < 0\}$ 区域内 2 组初始状态, case 1(0.5, -0.6), case 2(0.5, -1.45), 并对系统进行仿真, 结果如图 1 和图 2 所示.

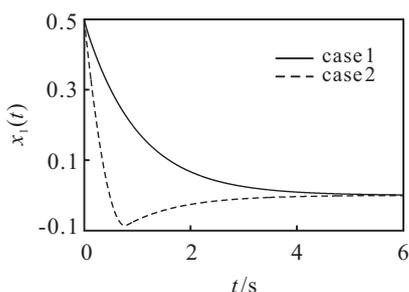


图 1 x_1 的变化过程

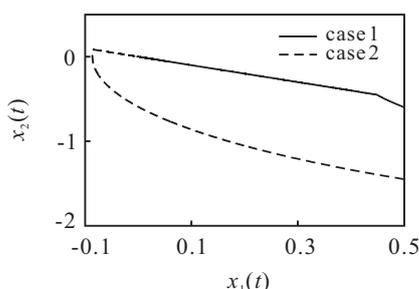


图 2 相轨迹

图 1 是 x_1 的变化过程, 显然 case 1 的变化过程符合上述工程要求, case 2 的变化过程不符合上述工程要求. 图 2 是系统的相轨迹, 可以清楚地看到系统状态到达滑动模式的过程. 尽管同起始于第 4 象限的两组状态均到达了滑动模式, 但 case 1 和 case 2 到达滑动模式的位置分别在第 4 象限和第 2 象限. 由此可见, 非单向收敛表现为 x_1 在收敛过程中发生了符号变化, 但该现象的本质是系统的初始状态和状态到达滑动模式的位置不在相平面同一个象限内. 对于二阶系统, 定义单向收敛概念如下:

定义 1 在滑模控制过程中, 若初始状态和状态到达滑动模式的位置在相平面同一象限内, 则称为单向收敛; 否则, 称为非单向收敛.

3 有界控制下单向收敛滑模控制

为了解决滑模控制在上述工程应用中存在的问题, 需对有界控制下系统状态单向收敛进行研究. 本

文提出了单向收敛的条件, 并结合文献[5]确定吸引区的方法确定了系统状态单向收敛的区域.

3.1 吸引区的确定

由于传统到达条件 $s \dot{s} < 0$ 不能保证系统状态收敛到滑动模式, 文献[5]提出了一种新的到达条件, 并重新确定了吸引区域 Ω , 且 $\Omega \subset \{s \dot{s} < 0\}$.

文献[5]给出的到达条件为

$$\begin{cases} \dot{\sigma}_1 < 0, \sigma_1 > 0, \\ \dot{\sigma}_2 > 0, \sigma_2 < 0. \end{cases} \quad (4)$$

其中

$$\sigma_1 = \begin{cases} \dot{s} = a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 - U = 0, s > 0; \\ wx_1 - U = 0, s < 0; \end{cases}$$

$$\sigma_2 = \begin{cases} \dot{s} = a_1 x_1 + (a_2 + c)x_2 + U = 0, s < 0; \\ wx_1 + U = 0, s > 0. \end{cases}$$

且 $w = a_1 - a_2 c - c^2$.

该到达条件所决定的吸引区域 Ω 与滑模参数 c 有关. 对于上述例子, 图 3 是 $c = 1$ 和 $c = 0.5$ 时的吸引区.

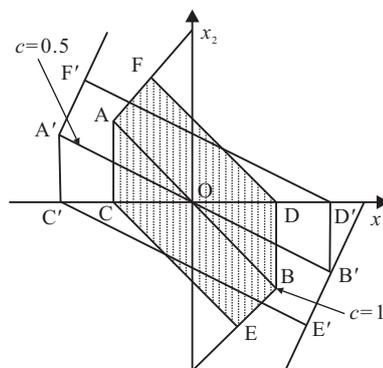


图 3 吸引区

由图 3 可以看出, 当 $c = 1$ 时, 吸引区为 ACEBDF; 当 $c = 0.5$ 时, 吸引区为 A'C'E'B'D'F'. 容易验证, case 1 和 case 2 的初始状态也在 ACEBDF 内. 由图 1 可知, 该吸引区仍然不能保证系统状态单向收敛.

3.2 单向收敛条件

由于滑动模式仅存在于相平面的第 2 和第 4 象限, 初始状态必须满足条件 $-\infty < x_1 x_2 \leq 0$ 才可能单向收敛. 定义状态比值 $d = -x_2/x_1$, 显然在滑动模式上 $d = c$. 单向收敛条件为

$$\begin{cases} \dot{d} < 0, \Delta d > 0; \\ \dot{d} > 0, \Delta d < 0; \\ \dot{d} = 0, \Delta d = 0. \end{cases} \quad (5)$$

其中 $\Delta d = d - c = -x_2/x_1 - c = -s/x_1$.

定理 1 式(5)可保证系统状态比值 d 单调收敛到 c .

证明 定义李亚普诺夫函数 $v = 0.5(\Delta d)^2$, 显然

$v \geq 0$. 由于 $\partial(\Delta d)/\partial t = \dot{d}$, 根据式(5)得 $\dot{v} = \Delta d \cdot \dot{d} \leq 0$. 由此可见, 式(5)保证 $\Delta d = 0, \dot{d} = 0$, 所以 d 能够收敛到 c .

下面对 d 收敛到 c 的单调性进行证明. 若 $\Delta d > 0 (\Delta d < 0)$, 则 $d > c (d < c)$. 由于 $\dot{d} < 0 (\dot{d} > 0)$, d 单调减少, 即 Δd 单调收敛. \square

式(5)可作为单向收敛的判断依据. 若 Δd 单调收敛到 0, 则是单向收敛; 否则, 是非单向收敛. 容易验证, 上述例子中 case 1 下 Δd 的变化过程是单调的, case 2 下 Δd 的变化过程是非单调的, 与上述结论相同.

3.3 滑模区和单向收敛区的确定

式(5)不显含 c , 但 $\Delta d = d - c$, 所以式(5)仍与 c 相关. 给定 c , 由 $\Delta d = 0, \dot{d} = 0$, 可直接确定滑模区域.

定理 2 对于给定 c , 传统到达条件与式(5)所确定的滑模区域一致.

证明 由传统到达条件所确定的滑模区域可表示为

$$\begin{cases} s = cx_1 + x_2 = 0, \\ \dot{s} = cx_2 + a_1x_1 + a_2x_2 + u = 0; \end{cases}$$

由式(5)确定的滑模区域可表示为

$$\begin{cases} \Delta d = d - c = -s/x_1 = 0, \\ \dot{d} = x_2^2/x_1^2 - (a_1x_1 + a_2x_2 + u)/x_1 = 0. \end{cases}$$

考虑 x_1 在到达平衡点之前不等于 0, 所以由 $\Delta d = 0$ 可推出 $s = 0$. 由 $s = 0$ 得 $x_2 = -cx_1$, 将其带入 \dot{d} 表达式, 易得 $\dot{d} = 0$ 与 $\dot{s} = 0$ 是等价的. \square

因为 $\Delta d = d - c$, 根据式(1), 有

$$\dot{d} = x_2^2/x_1^2 - (a_1x_1 + a_2x_2 - U\text{sgn}(s))/x_1.$$

式(5)可分段描述如下:

当 $\Delta d > 0$ 时, $\dot{d} < 0$, 有

$$\begin{cases} U > x_2^2/x_1 - a_1x_1 - a_2x_2, & x_1 > 0, x_2 \leq 0; \\ U > -(x_2^2/x_1 - a_1x_1 - a_2x_2), & x_1 < 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

当 $\Delta d < 0$ 时, $\dot{d} > 0$, 有

$$\begin{cases} U < x_2^2/x_1 - a_1x_1 - a_2x_2, & x_1 > 0, x_2 \leq 0; \\ U < -(x_2^2/x_1 - a_1x_1 - a_2x_2), & x_1 < 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

式(6)和(7)所描述的吸引区域可表示为 Ω_1 , 该区域能保证 d 单调收敛到 c .

由式(4)确定的区域 Ω 可保证系统状态到达滑模, 但不能保证单向收敛. 由式(5)确定的区域 Ω_1 , 可保证 d 单调收敛到 c , 但却未必到达滑动模态. 故取单向收敛区域 Ω_n 为 Ω 与 Ω_1 的交集, 即 $\Omega_n = \{\Omega \cap \Omega_1\}$.

对于例 1, Ω_1 可表示如下:

当 $\Delta d > 0$ 时, $\dot{d} < 0$, 有

$$\begin{cases} x_2^2 + (x_1 - 1)^2 < 1, & x_1 > 0, x_2 \leq 0; \\ x_2^2 + (x_1 + 1)^2 < 1, & x_1 < 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

当 $\Delta d < 0$ 时, $\dot{d} > 0$, 有

$$\begin{cases} x_2^2 + (x_1 + 1)^2 > 1, & x_1 > 0, x_2 \leq 0; \\ x_2^2 + (x_1 - 1)^2 > 1, & x_1 < 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9)$$

根据单向收敛区域的确定方法, 式(8)和(9)所描述的区域与图3的交集即为单向收敛区域. 如图4所示, 当 $c = 1$ 时, 单向收敛区域为 $ACO(x_1 < 0) + BDO(x_1 > 0)$; 当 $c = 0.5$ 时, 单向收敛区域为 $A'C'O(x_1 < 0) + B'D'O(x_1 > 0)$.

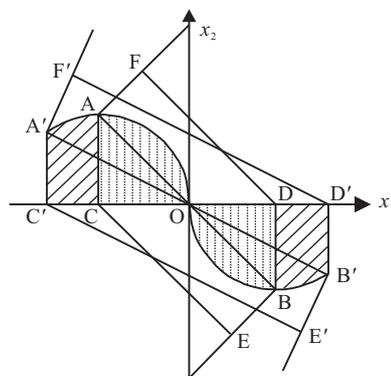


图 4 单向收敛区域

单向收敛区域提供了一个保证 x_1 单向收敛的范围. 若系统初始状态在该区域内, 则 x_1 必定能单向收敛; 若系统初始状态不在该区域内, 伴随着系统运行, 系统状态可能进入单向收敛区域, 也可能单向收敛. 所以, 单向收敛区域是单向收敛的充分条件, 而不是必要条件.

3.4 滑模控制设计

滑模控制设计包括 2 个方面: 切换函数和控制律. 若控制律如式(3)所示, 则需设计切换函数以满足系统的稳定性.

传统滑模控制中, $c > 0$ 可满足二阶系统稳定性要求. 控制有界下状态单向收敛的滑模控制设计中, 若 c 一定, 则需对系统初始状态的范围进行限定以获得单向收敛特性; 若系统初始状态范围一定, 则可以改变 c , 使系统初始状态位于单向收敛区域以内.

此外, c 的选择还需考虑如下 2 点: 由图 4 知, c 越大, 滑模区和单向收敛区域越小; c 越小, 滑模区和单向收敛区域越大. 所以, 从这个角度看, c 取值不宜过大. 另外, c 的大小会影响系统的动态性能. c 越大, 系统的快速性越好; c 越小, 系统的快速性越差. 由于上述 2 点相互制约, 在实际使用中应根据实际情况酌情考虑.

4 应用

现有的交会对接控制方法中, 大多根据系统的动力学特性采用脉冲控制方法实现^[6-7], 控制精度不高. 由于航天器的轨控发动机多为以开关方式工作的喷气式发动机, 与滑模控制的不连续控制相符, 所以滑

模控制方法适用于交会对接控制系统.

C-W 方程可以描述目标器处于近圆轨道下的航天器之间的相对运动关系, 如下所示^[6-7]:

$$\begin{cases} \ddot{x} - 2\omega\dot{z} = u_x, \\ \ddot{y} + \omega^2 y = u_y, \\ \ddot{z} - 3\omega^2 z + 2\omega\dot{x} = u_z. \end{cases} \quad (10)$$

式中: $x, \dot{x}, y, \dot{y}, z, \dot{z}$ 分别为航天器间的相对距离和速度; ω 为目标器的轨道角速度; $u_c = [u_x, u_y, u_z]^T$ 为轨控加速度.

式(10)是线性方程, 但 x, z 方向运动存在耦合. 一般 ω 值较小, 故式(10)可近似等效为 3 个二阶积分系统, 可采用上述方法设计. 系统的控制律同式(3), 其中 $U_i = 1, i = x, y, z$. 设计切换函数形式为

$$s = c_i \dot{i} + \dot{i}, \quad i = x, y, z. \quad (11)$$

参数 c_i 既要保证 y, z 的收敛速度高于 x 的收敛速度, 又要尽量扩大滑模区域和单向收敛区域的范围. 选取 $c_x = 0.5, c_y = 0.8, c_z = 0.8$. 根据上述方法可以确定系统的单向收敛区域. 但是, 该区域是由式(10)的简化形式确定的, 所以系统初始状态应尽量避开区域边界. 本文选择位于区域内的一组数据 $(2, -1, 0.5)$ 对系统进行仿真, 结果见图 5. 显然, 系统状态单向收敛.

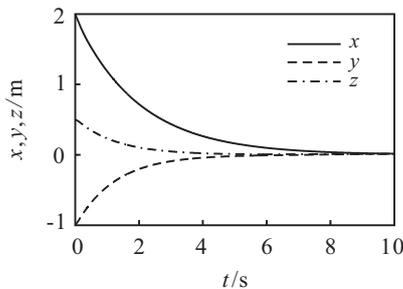


图 5 相对位置的变化

5 结 论

本文通过限定初始状态的范围, 保证了系统状态

单向收敛. 该单向收敛区域的确定对限定滑模控制到达阶段的动态特性有一定的积极作用. 将有界控制下滑模控制设计方法应用于交会对接控制系统, 其设计过程简单、容易实现, 控制效果符合工程要求. 具有类似要求的工程项目比较普遍, 因此该方法具有一定的工程应用价值.

参考文献(References)

- [1] Patel T R, Kumar K D, Behdinin K. Variable structure control for satellite attitude stabilization in elliptic orbits using solar radiation pressure[J]. Acta Astronautica, 2009, 64(2/3): 359-373.
- [2] Bo X, Gao Y. Sliding mode control of space robot formation flying[C]. Proc of the 4th Int Conf on Autonomous Robots and Agents. Wellington: IEEE Press, 2009: 561-565.
- [3] Park K, Lee J. Comments on a robust MIMO terminal sliding mode control scheme for rigid robotic manipulators[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1996, 41(5): 761-762.
- [4] Gao W, Hung J C. Variable structure control of nonlinear systems: A new approach[J]. IEEE Trans on Industrial Electronics, 1993, 40(1): 45-55.
- [5] 李文林. 一种新的滑动模态到达条件[J]. 控制与决策, 1995, 10(4): 322-326.
(Li W L. A new reaching condition of sliding mode[J]. Control and Decision, 1995, 10(4): 322-326.)
- [6] Hablani H B, Tapper M L. Guidance and relative navigation for autonomous rendezvous in a circular Orbit[J]. J of Guidance, Control, and Dynamics, 2002, 25(3): 553-562.
- [7] Weeks A M M. Guidance trajectories for spacecraft rendezvous[J]. J of Optimization Theory and Applications, 2007, 132(3): 377-400.

(上接第472页)

- [9] 李建华, 李彦平, 赵军. 切换拟对称组合系统的降阶方法及稳定性分析[J]. 控制理论与应用, 2006, 23(2): 279-282.
(Li J H, Li Y P, Zhao J. Approach of reducing-order and the analysis of stability for switched para-symmetry composite systems[J]. Control Theory & Applications, 2006, 23(2): 279-282.)
- [10] 刘毅, 赵军. 一类不确定切换模糊组合系统的分散鲁棒

镇定[J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 259-262.

(Liu Y, Zhao J. Decentralized robust stabilization for a class of uncertain switching fuzzy composite systems[J]. Control and Decision, 2010, 25(2): 259-262.)

- [11] Xie L, De Souza C. Robust H_∞ control for linear systems with norm-bounded time varying uncertainty[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1992, 37(8): 1188-1191.