文章编号: 1001-0920 (2011) 01-0049-05

基于非等间距的多变量 MGM(1, m) 模型

熊萍萍[1,2], 党耀国[1], 朱 晖[3]

(1. 南京航空航天大学 经济与管理学院，南京 210016；2. 南京信息工程大学 数理学院，南京 210044；3. 南华大学 数理学院，湖南 衡阳 421001)

摘 要: 针对相互影响的多变量非等间距原始数据序列的模拟预测问题, 对多变量 MGM(1,m) 模型在非等间距情形下进行建模, 建立了非等间距 MGM(1,m) 模型, 以提高模拟预测精度. 应用实例表明了非等间距 MGM(1,m) 模型较各个变量建立单变量非等间距 GM(1,1) 模型的模拟预测精度有显著提高. 该模型适于等间距和非等间距建模, 使非等间距建模具有更广泛的应用价值.

关键词: 非等间距；MGM(1,m) 模型；最小二乘法；建模研究

中图分类号: N941.5 **文献标识码:** A

Research of modeling of multi-variable non-equidistant MGM(1,m) model

XIONG Ping-ping[1,2], *DANG Yao-guo*[1], *ZHU Hui*[3]

(1. College of Economics and Management， Nanjing University of Aeronautics and Astronautics，Nanjing 210016, China；2. College of Mathematics and Physics， Nanjing University of Information Science and Technology，Nanjing 210044，China；3. College of Mathematics and Physics，University of South China，Hengyang 421001，China. Correspondent：XIONG Ping-ping，E-mail：xpp8125@163.com)

Abstract: Based on the problem of simulation and prediction of the non-equidistant raw data series for the multi-variable with interaction, the multi-variable MGM(1,m) model in the case of non-equidistance is modeled and the non-equidistance MGM(1,m) model is constructed in order to improve the accuracy of simulation and prediction. The simulation and prediction accuracy is proved to be higher in multi-variable non-equidistant MGM(1,m) model than in single-variable non-equidistant GM(1,1) models according to an application. The proposed model is suitable in non-equidistant modeling and equidistant modeling, thus, non-equidistant model has broad applying value.

Key words: non-equidistant；MGM(1,m) model；the least square；the research of modeling

1 引 言

自邓聚龙等人[1-3]首次提出灰色系统理论以来, 灰色预测模型在经济管理众多领域得到了广泛的应用. GM(1,1) 模型是一种常用的灰色系统模型, 通过单变量的一阶微分方程模型揭示其内在发展规律, 用于单一时间序列的建模和预测. 而多变量 MGM(1,m) 模型从系统的角度对各变量进行统一描述, 能够较好地反映系统中各变量之间相互影响、相互制约的关系. 自多变量灰色 MGM(1,m) 模型提出以来, 一些学者对该模型进行了改进, 并应用于实际的社会、经济系统中进行模拟预测.

文献 [4] 提出多变量灰色 MGM(1,m) 模型, 通过实例验证了该模型的精度高于利用单变量分别建立的 GM(1,1) 模型的精度. [5] 将多变量灰色 MGM(1,m) 模型利用到变形观测系统中, 统一描述了变形体的整体变形趋势和变形规律. [6] 在多因子灰色模型的几种精确级差格式的基础上, 将误差融入级差格式, 基于理想状态时的相对误差提出了一种新的灰色模型. [7] 分析了多变量灰色模型 MGM(1,m) 中的背景值构造方法, 利用向量连分式理论提出了用有理插值和数值积分中的梯形公式及外推法重构背景值, 从而可以有效地提高模型的模拟精度和预测精度.

上述学者建立模型大多基于等间距序列, 而实际工作中 (如材料工程、遥感测绘和物理学等专业) 所得

收稿日期: 2009-10-27; **修回日期:** 2009-12-24.

基金项目: 国家自然科学基金项目(71071077)；国家社会科学基金重点项目(08AJY024)；南京航空航天大学科研创新基金项目(Y0811－091)；江苏省软科学项目(BR2010065)；江苏省社会科学基金项目(08EYB005).

作者简介: 熊萍萍(1981−), 女, 讲师, 博士生, 从事灰色系统理论的研究；党耀国(1964−), 男, 教授, 博士生导师, 从事灰色系统理论与数量经济等研究.

到的原始数据有些是非等间距的序列, 因此, 建立非等间距序列的灰色预测模型有一定的实际意义和应用价值. 文献[8]对于多变量非等间距数据序列, 建立了一类GM(1,m)预测模型, 但并没有对非等间距多变量MGM(1,m)的建模机理进行具体研究. 本文主要针对非等间距多变量MGM(1,m)模型的建模机理进行具体研究, 进而建立非等间距MGM(1,m)模型, 用以模拟预测变量间具有相互作用、相互制约关系的非等间距的一类原始数据序列. 最后通过应用实例对实际问题进行分析, 对不同吸水率的PA66试样的弯曲强度、弯曲弹性模量及拉伸强度建立非等间距多变量MGM(1,3)灰色预测模型, 以期达到较好的模拟预测效果.

2 非等间距多变量MGM(1, m)模型的建模机理研究

2.1 非等间距多变量MGM(1, m)模型

定义1 设序列 $X_j^{(0)}=\{x_j^{(0)}(k_1),x_j^{(0)}(k_2),\cdots,x_j^{(0)}(k_n)\}, j=1,2,\cdots,m$, 若间距 $\Delta k_i=k_i-k_{i-1}\neq$ const, 则称 $X_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,m)$ 是非等间距序列.

定义2 称序列 $X_j^{(1)}=\{x_j^{(1)}(k_1),x_j^{(1)}(k_2),\cdots,x_j^{(1)}(k_n)\}(j=1,2,\cdots,m)$ 为非等间距序列 $X_j^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, 其中

$$x_j^{(1)}(k_i)=\sum_{l=1}^{i}x_j^{(0)}(k_l)\Delta k_l,$$

$$j=1,2,\cdots,m,\ i=1,2,\cdots,n.$$

定义3 称序列 $Z_j^{(1)}=\{z_j^{(1)}(k_2),z_j^{(1)}(k_3),\cdots,z_j^{(1)}(k_n)\}(j=1,2,\cdots,m)$ 为序列 $X_j^{(1)}$ 的非等间距紧邻均值生成序列, 其中

$$z_j^{(1)}(k_i)=0.5(x_j^{(1)}(k_{i-1})+x_j^{(1)}(k_i)),$$

$$j=1,2,\cdots,m,\ i=2,3,\cdots,n.$$

设原始数据矩阵为

$$X^{(0)}=[X_1^{(0)}\ X_2^{(0)}\ \cdots\ X_m^{(0)}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1^{(0)}(k_1) & x_1^{(0)}(k_2) & \ldots & x_1^{(0)}(k_n)\\ x_2^{(0)}(k_1) & x_2^{(0)}(k_2) & \ldots & x_2^{(0)}(k_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_m^{(0)}(k_1) & x_m^{(0)}(k_2) & \ldots & x_m^{(0)}(k_n)\end{bmatrix}.$$

其中: $X_j^{(0)}$ 为非等间距序列, 表示第 j 个变量在 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 时刻的观测值序列, 即

$$X_j^{(0)}=\{x_j^{(0)}(k_1),x_j^{(0)}(k_2),\cdots,x_j^{(0)}(k_n)\},$$

$$j=1,2,\cdots,m.$$

对序列 $X_1^{(0)},X_2^{(0)},\cdots,X_m^{(0)}$ 分别进行一次累加, 得到新生成的数据矩阵, 称为原始数据矩阵 $X^{(0)}$ 的一阶累加生成矩阵, 记为 $X^{(1)}$, 则有

$$X^{(1)}=[X_1^{(1)}\ X_2^{(1)}\ \cdots\ X_m^{(1)}]^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}(k_1) & x_1^{(1)}(k_2) & \ldots & x_1^{(1)}(k_n)\\ x_2^{(1)}(k_1) & x_2^{(1)}(k_2) & \ldots & x_2^{(1)}(k_n)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_m^{(1)}(k_1) & x_m^{(1)}(k_2) & \ldots & x_m^{(1)}(k_n)\end{bmatrix},$$

其中 $X_j^{(1)}$ 为原始数据序列 $X_j^{(0)}(j=1,2,\cdots,m)$ 的一阶累加生成序列.

非等间距多变量MGM(1,m)模型的一阶白化微分方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t}=a_{11}x_1^{(1)}+a_{12}x_2^{(1)}+\cdots+a_{1m}x_m^{(1)}+b_1,\\ \dfrac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t}=a_{21}x_1^{(1)}+a_{22}x_2^{(1)}+\cdots+a_{2m}x_m^{(1)}+b_2,\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\mathrm{d}x_m^{(1)}}{\mathrm{d}t}=a_{m1}x_1^{(1)}+a_{m2}x_2^{(1)}+\cdots+a_{mm}x_m^{(1)}+b_m.\end{cases}\tag{1}$$

记

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix},$$

则式(1)可记为

$$\frac{\mathrm{d}X^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=AX^{(1)}(t)+B,\tag{2}$$

其中 $X^{(1)}(t)=\{x_1^{(1)}(t),x_2^{(1)}(t),\cdots,x_m^{(1)}(t)\}^{\mathrm{T}}$.

为了辨识参数矩阵 A 和参数向量 B, 将式(1)离散化得到非等间距MGM(1,m)模型为

$$x_j^{(0)}(k_i)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_i)+b_j,$$

$$j=1,2,\cdots,m,\ i=2,3,\cdots,n.$$

2.2 非等间距多变量MGM(1, m)模型建模机理

定理1 设非负非等间距序列 $X_j^{(0)}=\{x_j^{(0)}(k_1),x_j^{(0)}(k_2),\cdots,x_j^{(0)}(k_n)\}$ 为第 j 个变量的原始数据序列, $X_j^{(1)}=\{x_j^{(1)}(k_1),x_j^{(1)}(k_2),\cdots,x_j^{(1)}(k_n)\}$ 为 $X_j^{(0)}$ 的一阶累加生成序列, $Z_j^{(1)}=\{z_j^{(1)}(k_2),z_j^{(1)}(k_3),\cdots,z_j^{(1)}(k_n)\}(j=1,2,\cdots,m)$ 为 $X_j^{(1)}$ 的非等间距紧邻均值生成序列, 则非等间距MGM(1,m)模型差分方程

$$x_j^{(0)}(k_i)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_i)+b_j,$$

$$j=1,2,\cdots,m,\ i=2,3,\cdots,n$$

的最小二乘估计参数列为

$$\hat{\boldsymbol{a}}_j=(\hat{a}_{j_1},\hat{a}_{j_2},\cdots,\hat{a}_{j_m},\hat{b}_j)^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}Y_j.$$

其中

$$P=\begin{bmatrix} z_1^{(1)}(k_2) & x_2^{(1)}(k_2) & \dots & x_m^{(1)}(k_2) & 1 \\ z_1^{(1)}(k_3) & x_2^{(1)}(k_3) & \dots & x_m^{(1)}(k_3) & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ z_1^{(1)}(k_n) & x_2^{(1)}(k_n) & \dots & x_m^{(1)}(k_n) & 1 \end{bmatrix},$$

$$Y_j=\{x_j^{(0)}(k_2),x_j^{(0)}(k_3),\cdots,x_j^{(0)}(k_n)\}^{\mathrm{T}},$$

$$j=1,2,\cdots,m.$$

且可得到参数矩阵 A 和参数向量 B 的辨识值为

$$\widehat{A}=(\hat{a}_{ij})_{m\times m},\ \widehat{B}=(\hat{b}_1,\hat{b}_2,\cdots,\hat{b}_m).$$

证明　将非等间距数据代入 MGM(1,m) 模型

$$x_j^{(0)}(k_i)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_i)+b_j,$$

$$j=1,2,\cdots,m,\ i=2,3,\cdots,n.$$

得到

$$x_j^{(0)}(k_2)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_2)+b_j,$$

$$x_j^{(0)}(k_3)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_3)+b_j,$$

$$\vdots$$

$$x_j^{(0)}(k_n)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_n)+b_j.$$

即有 $Y_j=P\boldsymbol{a}_j,\ j=1,2,\cdots,m$.

对于 $\hat{a}_{j_1},\hat{a}_{j_2},\cdots,\hat{a}_{j_m},\hat{b}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 这一组估计值, 以 $\sum\limits_{l=1}^{m}\hat{a}_{jl}z_l^{(1)}(k_i)+\hat{b}_j$ 代替 $x_j^{(0)}(k_i)(j=1,2,\cdots,m,\ i=2,3,\cdots,n)$, 从而可得误差序列 $\varepsilon_j=Y_j-P\hat{\boldsymbol{a}}_j(j=1,2,\cdots,m)$. 设

$$s_j={\varepsilon_j}^{\mathrm{T}}\varepsilon_j=(Y_j-P\hat{\boldsymbol{a}}_j)^{\mathrm{T}}(Y_j-P\hat{\boldsymbol{a}}_j)=$$

$$\sum_{i=2}^{n}\Big[x_j^{(0)}(k_i)-\sum_{l=1}^{m}\hat{a}_{jl}z_l^{(1)}(k_i)-\hat{b}_j\Big]^2.$$

则使 s_j 最小的 $\hat{a}_{j_1},\hat{a}_{j_2},\cdots,\hat{a}_{j_m},\hat{b}_j(j=1,2,\cdots,m)$ 应满足

$$\frac{\partial s_j}{\partial\hat{a}_{j1}}=2\sum_{i=2}^{n}\Big[\hat{b}_j-x_j^{(0)}(k_i)+\sum_{l=1}^{m}\hat{a}_{jl}z_l^{(1)}(k_i)\Big]z_1^{(1)}(k_i)=0,$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial\hat{a}_{j2}}=2\sum_{i=2}^{n}\Big[\hat{b}_j-x_j^{(0)}(k_i)+\sum_{l=1}^{m}\hat{a}_{jl}z_l^{(1)}(k_i)\Big]z_2^{(1)}(k_i)=0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial\hat{a}_{jn}}=2\sum_{i=2}^{n}\Big[\hat{b}_j-x_j^{(0)}(k_i)+\sum_{l=1}^{m}\hat{a}_{jl}z_l^{(1)}(k_i)\Big]z_n^{(1)}(k_i)=0,$$

$$\frac{\partial s_j}{\partial\hat{b}_j}=2\sum_{i=2}^{n}\Big[\hat{b}_j-x_j^{(0)}(k_i)+\sum_{l=1}^{m}\hat{a}_{jl}z_l^{(1)}(k_i)\Big]=0.$$

解得

$$\hat{\boldsymbol{a}}_j=(\hat{a}_{j_1},\hat{a}_{j_2},\cdots,\hat{a}_{j_m},\hat{b}_j)^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}Y_j.\quad(3)$$

从而可得参数矩阵 A 和参数向量 B 的辨识值为 $\widehat{A}=(\hat{a}_{ij})_{m\times m},\ \widehat{B}=(\hat{b}_1,\hat{b}_2,\cdots,\hat{b}_m)$. □

定理 2　设 $Y_j(j=1,2,\cdots,m)$ 和 P 如定理 1 所示, 且有 $(\hat{a}_{j_1},\hat{a}_{j_2},\cdots,\hat{a}_{j_m},\hat{b}_j)^{\mathrm{T}}=(P^{\mathrm{T}}P)^{-1}P^{\mathrm{T}}Y_j$, 则有:

1) 白化微分方程组 $\mathrm{d}X^{(1)}(t)/\mathrm{d}t=AX^{(1)}(t)+B$ 的时间响应函数为

$$X^{(1)}(t)=\{x_1^{(1)}(t),x_2^{(1)}(t),\cdots,x_m^{(1)}(t)\}^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}(X^{(1)}(t_0)+A^{-1}B)-A^{-1}B.$$

2) 非等间距 MGM(1,m) 模型差分方程

$$x_j^{(0)}(k_i)=\sum_{l=1}^{m}a_{jl}z_l^{(1)}(k_i)+b_j,$$

$$j=1,2,\cdots,m,\ i=2,3,\cdots,n$$

的时间响应式为

$$\widehat{X}^{(1)}(k_i)=\{\hat{x}_1^{(1)}(k_i),\hat{x}_2^{(1)}(k_i),\cdots,\hat{x}_m^{(1)}(k_i)\}^{\mathrm{T}}=\mathrm{e}^{\widehat{A}(k_i-k_1)}(X^{(1)}(k_1)+\widehat{A}^{-1}\widehat{B})-\widehat{A}^{-1}\widehat{B},$$

$$i=2,3,\cdots,n.$$

3) 还原式为

$$\widehat{X}^{(0)}(k_i)=\{\hat{x}_1^{(0)}(k_i),\hat{x}_2^{(0)}(k_i),\cdots,\hat{x}_m^{(0)}(k_i)\}^{\mathrm{T}}=(\widehat{X}^{(1)}(k_i)-\widehat{X}^{(1)}(k_{i-1}))/\Delta k_i,$$

$$i=2,3,\cdots,n.$$

证明　1) 由积分生成变换 (IGT) 原理, 对白化微分方程组 (2) 两边同时乘以积分因子 e^{-At} 得

$$\mathrm{e}^{-At}\Big[\frac{\mathrm{d}X^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}-AX^{(1)}(t)\Big]=\mathrm{e}^{-At}B,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-At}X^{(1)}(t)}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-At}B.\quad(4)$$

将式 (4) 两边在区间 $[t_0,t]$ 上积分得到方程组 (2) 的时间响应函数为

$$X^{(1)}(t)=\mathrm{e}^{A(t-t_0)}(X^{(1)}(t_0)+A^{-1}B)-A^{-1}B.\quad(5)$$

2) 当 t_0 取 k_1 时, 式 (5) 可改写为

$$X^{(1)}(t)=\mathrm{e}^{A(t-k_1)}(X^{(1)}(k_1)+A^{-1}B)-A^{-1}B,\quad(6)$$

其中 $X^{(1)}(k_1)=\{x_1^{(1)}(k_1),x_2^{(1)}(k_1),\cdots,x_m^{(1)}(k_1)\}^{\mathrm{T}}$.

在式 (6) 中, 令 $t=k_i$, 得到 MGM(1,m) 模型的时间响应式为

$$\widehat{X}^{(1)}(k_i)=\mathrm{e}^{\widehat{A}(k_i-k_1)}(X^{(1)}(k_1)+\widehat{A}^{-1}\widehat{B})-\widehat{A}^{-1}\widehat{B},$$

$$i = 2, 3, \cdots, n. \tag{7}$$

3) 由累减还原式可得. □

3 应用实例

参见文献 [9] 中吸水率对于纯 PA66 力学性能的影响数据, 根据对不同吸水率的 PA66 试样进行力学性能测试, 得到 PA66 的弯曲强度、弯曲弹性模量及拉伸强度随吸水率变化的实验数据. $X_1^{(0)}$ 为弯曲强度 (Mpa), $X_2^{(0)}$ 为弯曲弹性模量 (Gpa), $X_3^{(0)}$ 为拉伸强度 (Mpa), 实验数据如表 1 所示. 同时建立关于 $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}$ 和 $X_3^{(0)}$ 的非等间距多变量 MGM(1,3) 模型,并对 $X_1^{(0)}$, $X_2^{(0)}$ 和 $X_3^{(0)}$ 分别建立单变量非等间距 GM(1,1) 模型. 通过两种模型来模拟吸水率从 0∼0.975 6 各变量的真实值, 并给出吸水率为 1.124 3 时对应的预测值.

表 1　吸水率对 PA66 力学性能的影响

编号	吸水率 k_i/%	$X_1^{(0)}(k_i)$	$X_2^{(0)}(k_i)$	$X_3^{(0)}(k_i)$
0	0	83.4	2.63	84.2
1	0.060 7	84.9	2.64	84.4
2	0.107 1	84.5	2.61	86.3
3	0.166 2	84.2	2.65	84.3
4	0.206 9	84.4	2.66	81.3
5	0.434 4	78.4	2.52	74.9
6	0.524 3	75.4	2.32	75.7
7	0.852 4	59.5	1.90	73.2
8	0.975 6	54.1	1.72	66.9

注 1　本文以吸水率作为非等间距的观测值 (表 1 中第 2 列), 第 3∼5 列分别表示弯曲强度 (Mpa), 弯曲弹性模量 (Gpa) 及拉伸强度 (Mpa) 对应非等间距的观测值.

由本例不难看出, PA66 的 3 种力学性能弯曲强度、弯曲弹性模量及拉伸强度之间存在着一定的联系, 因此对三变量建立非等间距 MGM(1,3) 模型, 其白化微分方程组为

$$\frac{\mathrm{d}x_1^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 14.998x_1^{(1)} - 428.76x_2^{(1)} - 1.82x_3^{(1)} + 115.66,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_2^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 0.67x_1^{(1)} - 19.70x_2^{(1)} - 0.05x_3^{(1)} + 3.44,$$

$$\frac{\mathrm{d}x_3^{(1)}}{\mathrm{d}t} = 8.67x_1^{(1)} - 289.62x_2^{(1)} + 0.22x_3^{(1)} + 104.83.$$

序列 $X_1^{(0)}, X_2^{(0)}$ 和 $X_3^{(0)}$ 的非等间距 GM(1,1) 模型的一阶微分方程分别为

$$\mathrm{d}x_1^{(1)}/\mathrm{d}t = -0.52x_1^{(1)} + 133.57,$$

$$\mathrm{d}x_2^{(1)}/\mathrm{d}t = -0.50x_2^{(1)} + 4.11,$$

$$\mathrm{d}x_3^{(1)}/\mathrm{d}t = -0.27x_3^{(1)} + 108.90.$$

非等间距 MGM(1,3) 模型和 GM(1,1) 模型对于 3 个序列的模拟预测值 (非等间距 GM(1,1) 模型的模拟预测还原式公式参照文献 [10]) 和相对误差分别见表 2∼表 4.

表 2　两种模型对序列 $X_1^{(0)}$ 的模拟预测值和相对误差

k_i	$x_1^{(0)}(k_i)$	非等间距 MGM(1,3)		非等间距 GM(1,1)	
		$\hat{x}_1^{(0)}(k_i)$	相对误差/%	$\hat{x}_1^{(0)}(k_i)$	相对误差/%
0.000 0	83.4	83.4	0.000 0	83.4	0.000 0
0.060 7	84.9	85.8	1.097 7	88.6	4.358 1
0.107 1	84.5	85.2	0.770 3	86.1	1.893 5
0.166 2	84.2	84.1	0.104 9	83.8	0.475 1
0.206 9	84.4	83.0	1.661 7	81.6	3.317 5
0.434 4	78.4	78.8	0.527 0	76.1	2.933 7
0.524 3	75.4	73.3	2.780 3	70.0	7.161 8
0.852 4	59.5	64.8	8.903 1	62.7	5.378 2
0.975 6	54.1	54.3	0.373 3	55.8	3.142 3
1.124 3	-	47.0	-	52	-

表 3　两种模型对序列 $X_2^{(0)}$ 的模拟预测值和相对误差

k_i	$x_2^{(0)}(k_i)$	非等间距 MGM(1,3)		非等间距 GM(1,1)	
		$\hat{x}_2^{(0)}(k_i)$	相对误差/%	$\hat{x}_2^{(0)}(k_i)$	相对误差/%
0.000 0	2.63	2.63	0.000 0	2.63	0.000 0
0.060 7	2.64	2.67	0.968 5	2.76	4.545 5
0.107 1	2.61	2.66	1.978 5	2.69	3.065 1
0.166 2	2.65	2.64	0.328 8	2.62	1.132 1
0.206 9	2.66	2.61	1.812 3	2.56	3.759 4
0.434 4	2.52	2.50	0.924 5	2.39	5.158 7
0.524 3	2.32	2.33	0.446 9	2.21	4.741 4
0.852 4	1.90	2.07	8.696 0	2.00	5.263 2
0.975 6	1.72	1.74	0.989 1	1.78	3.488 4
1.124 3	-	1.51	-	1.67	-

表 4　两种模型对序列 $X_3^{(0)}$ 的模拟预测值和相对误差

k_i	$x_3^{(0)}(k_i)$	非等间距 MGM(1,3)		非等间距 GM(1,1)	
		$\hat{x}_3^{(0)}(k_i)$	相对误差/%	$\hat{x}_3^{(0)}(k_i)$	相对误差/%
0.000 0	84.2	84.2	0.000 0	84.2	0.000 0
0.060 7	84.4	84.7	0.349 8	85.3	1.066 4
0.107 1	86.3	84.1	2.580 2	84.0	2.665 1
0.166 2	84.3	83.2	1.247 1	82.8	1.779 4
0.206 9	81.3	82.3	1.181 4	81.7	0.492 0
0.434 4	74.9	79.5	6.104 8	78.8	5.206 9
0.524 3	75.7	75.9	0.214 1	75.5	0.264 2
0.852 4	73.2	71.4	2.443 8	71.3	2.595 6
0.975 6	66.9	67.2	0.399 4	67.0	0.149 5
1.124 3	-	65.0	-	64.6	-

由表 2∼表 4 可以看出, 非等间距 MGM(1,3) 模型具有良好的模拟精度, 其模拟预测效果总体上优于非等间距 GM(1,1) 模型, 这主要是由于非等间距多变量 MGM(1,3) 模型能够较好地反映 PA66 的 3 种力学性能弯曲强度、弯曲弹性模量及拉伸强度之间相互影响、相互联系的关系.

4 结　论

本文针对相互作用、相互制约的多变量非等间距序列建立非等间距多变量模型, 从而有效地提高了模型的模拟预测精度. 该模型主要适用于工程科学、社会科学的研究中, 如材料工程、遥感测绘、自动化和力学等专业, 往往由于实验条件的限制或无法处

处对自然界中的对象进行勘测等原因, 在建模时会出现非等间距序列, 因此非等间距多变量 MGM(1,m) 模型具有一定的实际应用价值和广泛的应用前景. 然而, 并不是所有的问题均可以用非等间距多变量 MGM(1,m) 模型解决, 如原始序列不是非负准指数序列等情况. 另一方面, 在应用中处理实际问题时应注重数据的整理、变换、分析和刷选. 比如, 有些数据受到随机干扰而使数据失真, 则应先对数据进行适当的变换处理; 有些非等间距序列由于数据的严重缺失导致跳跃性很大, 从而致使模拟预测精度下降, 此时应对原始数据进行适当的填补, 方可建模, 以提高模拟预测精度. 对于不同的实际问题, 具有不同规律的数据序列, 如何选择合适的模型以提高模拟预测精度, 仍需进一步的研究.

参考文献(References)

[1] 邓聚龙. 灰理论基础[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2002.
(Deng J L. The basis of grey theory[M]. Wuhan: Press of Huazhong University of Science and Technology, 2002.)

[2] 刘思峰, 党耀国, 方志耕. 灰色系统理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
(Liu S F, Dang Y G, Fang Z G. Grey system theory and its application[M]. Beijing: Science Press, 2004.)

[3] 肖新平, 宋中民, 李峰. 灰技术基础及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2005.
(Xiao X P, Song Z M, Li F. The fundation of grey technology and the application[M]. Beijing: Science Press, 2005.)

[4] 翟军, 盛建明, 冯英浚. MGM(1,n) 灰色模型及其应用[J]. 系统工程理论与实践, 1997, 5(5): 109-113.
(Zhai J, Sheng J M, Feng Y J. The grey model MGM(1,n) and its application[J]. Systems Engineering－Theory and Practice, 1997, 5(5): 109-113.)

[5] 石世云. 多变量灰色模型 MGM(1,n) 在变形预测中的应用[J]. 测绘通报, 1998, (10): 9-18.
(Shi S Y. The application of the grey multi-variable MGM(1,n) in transforming prediction[J]. Bulletin of Surveying and Mapping, 1998, (10): 9-18.)

[6] 李小霞, 同小军, 陈锦云. 多因子灰色 MGM p(1,n) 优化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2003, 4(4): 47-51.
(Li X X, Tong X J, Chen M Y. MGM p(1,n) optimization model[J]. Systems Engineering－Theory and Practice, 2003, 4(4): 47-51.)

[7] 崔立志, 刘思峰, 吴正朋. 基于向量连分式理论的 MGM(1,n) 模型[J]. 系统工程, 2008, 26(10): 47-51.
(Cui L Z, Liu S F, Wu Z P. MGM(1,n) based on vector continued fractions theory[J]. Systems Engineering, 2008, 26(10): 47-51.)

[8] 王丰效. 多变量非等间距 GM(1,m) 模型及其应用[J]. 系统工程与电子技术, 2007, 29(3): 388-390.
(Wang F X. Multivariable non-equidistance GM(1,m) model and its application[J]. Systems Engineering and Electronics, 2007, 29(3): 388-390.)

[9] 李晖, 魏莉萍, 王湘明, 等. 吸水率对尼龙 66 力学性能的影响研究[J]. 工程塑料应用, 2008, 36(8): 64-67.
(Li H, Wei L P, Wang X M, et al. Investgation on the influences of water absorption to the mechanical properties of nylon 66 materials[J]. Engineering Plastics Application, 2008, 36(8): 64-67.)

[10] 王叶梅, 党耀国, 王正新. 非等间距 GM(1,1) 模型背景值的优化[J]. 中国管理科学, 2008, 16(4): 159-162.
(Wang Y M, Dang Y G, Wang Z X. The optimization of background value in non-equidistant GM(1,1) model[J]. Chinese J of Management Science, 2008, 16(4): 159-162.)

下　期　要　目