

文章编号: 1001-0920(2011)04-0571-06

具有模态依赖时延的网络控制系统的 H_∞ 控制

邱 丽, 胥布工, 黎善斌

(华南理工大学 自动化科学与工程学院, 广州 510640)

摘 要: 针对一类模态依赖时延的网络控制系统, 研究其 H_∞ 控制问题. 基于马尔可夫跳变理论, 通过构造随机的 Lyapunov-Krasovskii 函数, 基于自由权重矩阵方法, 得到 H_∞ 指标约束下闭环系统随机稳定的充分条件, 并给出了马尔可夫模态依赖的状态反馈 H_∞ 控制器的设计方法. 仿真实例验证了该设计方法的有效性.

关键词: 网络控制系统; 模态依赖时延; H_∞ 控制; 自由权重矩阵

中图分类号: TP273

文献标识码: A

H_∞ control for networked control systems with mode-dependent time-delays

QIU Li, XU Bu-gong, LI Shan-bin

(College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China.

Correspondent: LI Shan-bin, E-mail: lishb@scut.edu.cn)

Abstract: This paper studies the H_∞ control problem for networked control systems(NCSs) with mode-dependent time delays. Based on the Markovian jump theory, sufficient conditions for stochastic stability of NCSs with H_∞ index constraints are obtained via constructing stochastic Lyapunov-Krasovskii functions and using free-weighting matrix method. Then two-mode-dependent state feedback H_∞ controller is designed. A simulation example shows the effectiveness of the proposed method.

Key words: networked control systems; mode-dependent time-delays; H_∞ control; free-weighting matrix

1 引 言

网络控制系统(NCSs)是通过网络进行闭环反馈控制的系统^[1-3], 其主要特征是系统各部件(如传感器、控制器、执行器等)之间信息(如参考输入、被控对象输出、控制器输入等)的交换都是由网络来实现的^[3]. 与传统的点对点的控制系统相比, 网络控制系统减少了系统的布线, 便于系统诊断和维护, 提高了系统的灵活性和柔性. 但是网络在给控制系统带来众多优势的同时, 网络延迟及数据包丢失使得控制系统的性能下降, 甚至失稳^[3-5]. 因此由时延和数据包丢失引起的网络控制系统的稳定性和可靠性问题已成为网络控制系统研究的一个重点.

文献[4]研究了传感器到控制器(S-C), 控制器到执行器(C-A)之间具有随机时延的NCSs镇定问题. [5]在[4]的基础上研究了马尔可夫链具有时延的情

况. [6]对S-C, C-A之间存在随机时延或报文丢失的NCSs进行了研究. [7]将具有丢包的NCSs建模成马尔可夫跳变系统, 研究了丢包率对系统性能的影响. [8]研究了具有马尔可夫时延特性的闭环NCSs稳定性问题. [9]研究了网络拥塞带来的数据包丢失对系统稳定性的影响. [10]采用马尔可夫链对同时具有随机时延和数据包丢失情况下的网络控制系统进行建模, 通过引入二次性能函数研究了网络控制系统的保代价控制问题. [11]研究了具有随机时延及数据包丢失的网络控制系统随机稳定性问题. [12]研究了网络诱导时延的上界大于或小于一个采样周期的连续时间NCSs的均方稳定问题. [13]研究了随机时延网络的马尔可夫跳变系统的保性能控制问题. [14]研究了具有S-C之间随机时延的NCSs的保性能控制问题. 总之, 以往关于时延NCSs的研究主要集中在系统状

收稿日期: 2010-01-18; 修回日期: 2010-05-13.

基金项目: 国家自然科学基金项目(06105413); 国家自然科学基金-广东联合基金重点项目(U0735003); 国家自然科学基金-海外及港澳合作项目(60828006); 教育部留学回国人员科研启动基金项目; 中央高校基本科研业务费专项资金项目(2009ZM0076).

作者简介: 邱丽(1981-), 女, 博士生, 从事网络控制系统、马尔可夫跳变系统的研究; 胥布工(1956-), 男, 教授, 博士生导师, 从事复杂系统的控制及其应用等研究.

态时延的问题上,对于更为复杂的马尔可夫状态时延NCSs的 H_∞ 控制问题的研究尚未全面展开.

本文针对马尔可夫模态依赖时延的NCSs,研究其随机稳定的条件及 H_∞ 控制器的设计方法.采用马尔可夫跳变理论将该类系统建模成特殊的马尔可夫跳变系统,通过构造随机的Lyapunov函数及自由权重矩阵方法,得到 H_∞ 指标约束下闭环系统随机稳定的充分条件,并给出模态依赖的 H_∞ 控制器的设计方法.

2 问题描述

考虑图1所示的离散时间线性NCS模型,假定传感器是时间驱动的,控制器和执行器是事件驱动的.

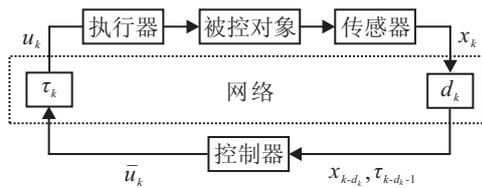


图1 具有网络时延的NCS结构图

设被控对象的状态方程为

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + B_\omega \omega_k, \\ z_k = Cx_k + Du_k + D_\omega \omega_k. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x_k \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $u_k \in \mathbf{R}^m$ 是控制输入; $z_k \in \mathbf{R}^q$ 是控制输出; $\omega_k \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$; $\omega \neq 0$ 是外部扰动; A, B, B_ω, C, D 和 D_ω 是适当维数的常数矩阵.

由于在NCSs中网络带宽的限制,以及共享网络的引入,使得信息传输时不可避免地存在时延.设从传感器到控制器(S-C)的网络时延为 $d_k \geq 0$,从控制器到执行器(C-A)的时延为 $\tau_k \geq 0$.假定 d_k 和 τ_k 是有界的,且满足

$$\begin{cases} 0 \leq d_{\min} \leq d_k \leq d_{\max}, \\ 0 \leq \tau_{\min} \leq \tau_k \leq \tau_{\max}. \end{cases} \quad (2)$$

在实际的通信系统中,系统当前时刻的时延通常与前一时刻的时延有关^[4].因此将随机的通信时延 d_k 和 τ_k 表示成离散的齐次马尔可夫链是合理的. d_k 和 τ_k 的取值范围分别为 $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, M\}$ 和 $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N\}$.令 $d_{\min} = \min \mathcal{M}$, $d_{\max} = \max \mathcal{M}$, $\tau_{\min} = \min \mathcal{N}$, $\tau_{\max} = \max \mathcal{N}$. $\lambda = \{\lambda_{mn}\}$ 和 $\pi = \{\pi_{ij}\}$ 分别表示两个马尔可夫链 d_k 和 τ_k 的状态转移概率矩阵,具有元素 λ_{mn} 和 π_{ij} ,它们定义如下:

$$\begin{cases} \lambda_{mn} = \Pr\{d_{k+1} = n | d_k = m\}, \\ \pi_{ij} = \Pr\{\tau_{k+1} = j | \tau_k = i\}. \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\lambda_{mn} \geq 0$, $\pi_{ij} \geq 0$,且对于所有的 $m, n \in \mathcal{M}$ 和

$i, j \in \mathcal{N}$,有

$$\sum_{n=0}^M \lambda_{mn} = 1, \quad \sum_{j=0}^N \pi_{ij} = 1.$$

控制器为

$$u_k = \bar{u}_{k-\tau_k} = K_{d_k, \tau_k-d_k-1} x_{k-d_k-\tau_k}, \quad (4)$$

其中 K_{d_k, τ_k-d_k-1} 是待设计的两个模态依赖的状态反馈控制器的增益.

注1 网络控制系统的时延信息对控制器的设计是非常重要的.在 k 时刻,控制器的节点可通过时间戳技术获得当前时刻S-C的时延 d_k ^[4],及前一时刻C-A的时延 τ_{k-1} ,且该时延信息(τ_{k-1})需经过S-C之间的时延 d_k 才能到达控制器的节点.因此在 k 时刻,控制器的节点可获得时延 τ_{k-d_k-1} 及 d_k 的信息.系统的状态反馈控制器将依赖于时延 d_k 和 τ_{k-d_k-1} .因此本文研究的是系统状态及马尔可夫链状态时延的模态依赖的状态反馈控制系统.

将式(4)代入(1),可得到闭环系统的状态方程

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + BK_{d_k, \tau_k-d_k-1} x_{k-d_k-\tau_k} + B_\omega \omega_k, \\ z_k = Cx_k + DK_{d_k, \tau_k-d_k-1} x_{k-d_k-\tau_k} + D_\omega \omega_k, \\ x_k = \varphi_k, \quad k = -d_{\max} - \tau_{\max}, \dots, 0, \end{cases} \quad (5)$$

其中 φ_k 是系统的初始值.

注2 因为闭环系统(5)不仅依赖于网络时延 d_k 和 τ_k ,而且依赖于马尔可夫链时延 τ_{k-d_k-1} ,所以系统(5)不能被建模成标准的马尔可夫跳变系统.闭环系统(5)可被建模成由两个马尔可夫链引起的具有模态依赖时延的特殊马尔可夫跳变线性系统.

定义1^[13] 如果存在常数 C ,使得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} E[\|x_k\|^2 | x_0, d_0, \tau_{-d_0-1}, \tau_0] \leq \\ & C \Upsilon(x_0, \varphi_i, -d_{\max} - \tau_{\max} \leq i \leq \\ & 0, d_0, \tau_{-d_0-1}, \tau_0), \end{aligned} \quad (6)$$

则无扰动跳变系统是随机稳定的.其中 $\Upsilon(x_0, \varphi_i, -d_{\max} - \tau_{\max} \leq i \leq 0, d_0, \tau_{-d_0-1}, \tau_0) \geq 0$ 是满足 $\Upsilon(0, 0, \dots, 0) = 0$ 的系统初始值函数.

定义2 给定正常数 $\gamma > 0$,如果:1)闭环系统(5)是随机稳定的;2)在零初始条件下,满足约束条件 $\|z_k\|_2 \leq \gamma \|\omega_k\|_2$.则闭环系统(5)被称为满足 H_∞ 性能指标 γ .

给定扰动衰减性能水平 $\gamma > 0$,进一步给出 H_∞ 性能函数

$$J_\infty = \gamma^{-1} \|z_k\|_2^2 - \gamma \|\omega_k\|_2^2 =$$

$$V(x_k, m, i, s_1) = \sum_{s=1}^5 V_s(x_k, m, i, s_1). \quad (10)$$

其中

$$V_1 = x_k^T P_{m,i} x_k, \quad V_2 = \sum_{l=k-d_k-\tau_k}^{k-1} x_l^T Q_1 x_l,$$

$$V_3 = \sum_{\theta=-\alpha_1+1}^{-d_{\min}-\tau_{\min}} \sum_{l=k+\theta}^{k-1} x_l^T Q_1 x_l,$$

$$V_4 = \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-1} x_l^T Q_2 x_l,$$

$$V_5 = \sum_{\theta=-\alpha_1}^{-1} \sum_{l=k+\theta}^{k-1} y_l^T (Z_1 + Z_2) y_l.$$

这里: $y(l) = x(l+1) - x(l)$; $d_k = m, d_{k+1} = n$; $\tau_{k-d_k-1} = i, \tau_k = s_1, \tau_{k-d_{k+1}} = s_2, \tau_{k+1} = j$; $\Delta V(x_k, m, i, s_1) = \sum_{s=1}^5 \Delta V_s$; $P_{m,i}, Q_1, Q_2, Z_1$ 和 Z_2 满足式 (9).

令 $\xi_k = [x_k^T \ x_{k-d_k-\tau_k}^T \ x_{k-\alpha_1}^T]^T$. 当 $\omega_k = 0$ 时, 沿着闭环系统 (5) 求解, 可得

$$E[\Delta V_1] = x_{k+1}^T \bar{P}_{m,i} x_{k+1} - x_k^T P_{m,i} x_k, \\ \bar{P}_{m,i} = \sum_{n=0}^M \sum_{s_1=0}^N \sum_{s_2=0}^N \lambda_{mn} \Pi_{i,s_2}^{1+m-n} \Pi_{s_2,s_1}^n P_{n,s_2}; \quad (11)$$

$$E[\Delta V_2] \leq x_k^T Q_1 x_k - x_{k-d_k-\tau_k}^T Q_1 x_{k-d_k-\tau_k} + \\ \sum_{l=k-\alpha_1+1}^{k-d_{\min}-\tau_{\min}} x_l^T Q_1 x_l; \quad (12)$$

$$E[\Delta V_3] = \alpha_2 x_k^T Q_1 x_k - \sum_{l=k-\alpha_1+1}^{k-d_{\min}-\tau_{\min}} x_l^T Q_1 x_l; \quad (13)$$

$$E[\Delta V_4] = x_k^T Q_2 x_k - x_{k-\alpha_1}^T Q_2 x_{k-\alpha_1}; \quad (14)$$

$$E[\Delta V_5] = \alpha_1 y_k^T (Z_1 + Z_2) y_k - \sum_{l=k-d_k-\tau_k}^{k-1} y_l^T Z_1 y_l - \\ \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-d_k-\tau_k-1} y_l^T Z_1 y_l - \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-1} y_l^T Z_2 y_l. \quad (15)$$

注意到

$$x_k - x_{k-d_k-\tau_k} - \sum_{l=k-d_k-\tau_k}^{k-1} y_l = 0, \\ x_{k-d_k-\tau_k} - x_{k-\alpha_1} - \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-d_k-\tau_k-1} y_l = 0, \\ x_k - x_{k-\alpha_1} - \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-1} y_l = 0.$$

结合式 (11)~(15), 可得

$$E[\Delta V] \leq x_{k+1}^T \bar{P}_{m,i} x_{k+1} - x_k^T P_{m,i} x_k - \\ x_{k-d_k-\tau_k}^T Q_1 x_{k-d_k-\tau_k} + (\alpha_2 + 1) x_k^T Q_1 x_k +$$

$$x_k^T Q_2 x_k - x_{k-\alpha_1}^T Q_2 x_{k-\alpha_1} + \alpha_1 [(A - I) x_k + \\ BK_{m,i} x_{k-d_k-\tau_k}]^T (Z_1 + Z_2) [(A - I) x_k + \\ BK_{m,i} x_{k-d_k-\tau_k}] - \sum_{l=k-d_k-\tau_k}^{k-1} y_l^T Z_1 y_l - \\ \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-d_k-\tau_k-1} y_l^T Z_1 y_l - \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-1} y_l^T Z_2 y_l + \\ 2\xi_k^T \mathcal{U} \left(x_k - x_{k-d_k-\tau_k} - \sum_{l=k-d_k-\tau_k}^{k-1} y_l \right) + \\ 2\xi_k^T \mathcal{V} \left(x_{k-d_k-\tau_k} - x_{k-\alpha_1} - \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-d_k-\tau_k-1} y_l \right) + \\ 2\xi_k^T \mathcal{W} \left(x_k - x_{k-\alpha_1} - \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-1} y_l \right). \quad (16)$$

进一步简化式 (16), 可得

$$E[\Delta V(x_k, m, i, s_1)] \leq \\ \xi_k^T \Gamma \xi_k - \sum_{l=k-d_k-\tau_k}^{k-1} (\xi_k^T \mathcal{U} + y_l^T Z_1) Z_1^{-1} (\xi_k^T \mathcal{U} + y_l^T Z_1)^T - \\ \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-d_k-\tau_k-1} (\xi_k^T \mathcal{V} + y_l^T Z_1) Z_1^{-1} (\xi_k^T \mathcal{V} + y_l^T Z_1)^T - \\ \sum_{l=k-\alpha_1}^{k-1} (\xi_k^T \mathcal{W} + y_l^T Z_2) Z_2^{-1} (\xi_k^T \mathcal{W} + y_l^T Z_2)^T. \quad (17)$$

其中

$$\Gamma = \\ \begin{bmatrix} A^T \\ (BK_{m,i})^T \\ 0 \end{bmatrix} \bar{P}_{m,i} [A \ BK_{m,i} \ 0] + \Phi + \Theta + \\ \alpha_1 \mathcal{U} Z_1^{-1} \mathcal{U}^T + \alpha_2 \mathcal{V} Z_1^{-1} \mathcal{V}^T + \alpha_1 \mathcal{W} Z_2^{-1} \mathcal{W}^T, \quad (18)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & 0 \\ * & \Phi_3 & 0 \\ * & * & -Q_2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\Theta = [\mathcal{U} + \mathcal{W} \quad -\mathcal{U} + \mathcal{V} \quad -\mathcal{V} - \mathcal{W}] + \\ [\mathcal{U} + \mathcal{W} \quad -\mathcal{U} + \mathcal{V} \quad -\mathcal{V} - \mathcal{W}]^T, \quad (20)$$

$$\Phi_1 = Q_2 + (\alpha_2 + 1) Q_1 - P_{m,i} + \\ \alpha_1 (A - I)^T (Z_1 + Z_2) (A - I), \\ \Phi_2 = \alpha_1 (A - I)^T (Z_1 + Z_2) BK_{m,i}, \\ \Phi_3 = -Q_1 + \alpha_1 K_{m,i}^T B^T (Z_1 + Z_2) BK_{m,i}, \\ \mathcal{U} = [\mathcal{U}_1^T \ \mathcal{U}_2^T \ \mathcal{U}_3^T]^T, \ \mathcal{V} = [\mathcal{V}_1^T \ \mathcal{V}_2^T \ \mathcal{V}_3^T]^T, \\ \mathcal{W} = [\mathcal{W}_1^T \ \mathcal{W}_2^T \ \mathcal{W}_3^T]^T,$$

α_1 和 α_2 在定理 1 中有定义.

由 $Z_1 > 0, Z_2 > 0$ 可知, 式 (17) 的最后 3 项是非

正定的. 根据矩阵的 Schur 补性质, 式 (9) 使得 $\Gamma < 0$ 成立. 则有

$$E[\Delta V] \leq -\lambda_{\min}(-\Gamma)\xi_k^T \xi_k \leq -\beta x_k^T x_k, \quad (21)$$

其中 $\beta = \inf\{\lambda_{\min}(-\Gamma)\}$, $\lambda_{\min}(-\Gamma)$ 表示 $-\Gamma$ 的最小特征根. 由式 (21) 知, 对于任意的 $T \geq 1$, 有

$$E[V_{k+1}] - E[V_0] \leq -\beta \sum_{k=0}^T E[x_k^T x_k]. \quad (22)$$

因此

$$\sum_{k=0}^T E[x_k^T x_k] \leq \frac{1}{\beta} E[V(\varphi, d_0, \tau_{-d_0-1}, \tau_0)].$$

令 $k \rightarrow \infty$, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} E[x_k^T x_k] \leq \frac{1}{\beta} E[V(\varphi, d_0, \tau_{-d_0-1}, \tau_0)] < \infty. \quad (23)$$

根据定义 1 可知, 无扰动闭环系统 (5) 是随机稳定的.

进而, 对于任意非零的 $\omega_k \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, 根据矩阵的 Schur 补性质, 有

$$E[\Delta V] + \gamma^{-1} z_k^T z_k - \gamma \omega_k^T \omega_k \leq \eta_k^T \Psi \eta_k. \quad (24)$$

其中: $\eta_k = [x_k^T \ x_{k-d_k-\tau_k}^T \ x_{k-\alpha_1}^T \ \omega_k^T]^T$, Ψ 如式 (9) 所示. 则在零初始条件下, 即 $x_k = 0, k = -\alpha_1, -\alpha_1 + 1, \dots, -1$, 对于任意的 $N > 0$, 定义

$$J_N = \gamma^{-1} \|z_k\|_2^2 - \gamma \|\omega_k\|_2^2 = \sum_{k=0}^{N-1} E[\gamma^{-1} z_k^T z_k - \gamma \omega_k^T \omega_k]. \quad (25)$$

因为 $V_0(\varphi(\cdot), d_0, \tau_{-d_0-1}, \tau_0) = 0$, 所以

$$E[V_N] = E\left[\sum_{k=0}^{N-1} (V_{k+1} - V_k)\right] > 0. \quad (26)$$

从而

$$J_N \leq E\left[\sum_{k=0}^{N-1} (V_{k+1} - V_k + \gamma^{-1} z_k^T z_k - \gamma \omega_k^T \omega_k)\right] = \sum_{k=0}^{N-1} E[\eta_k^T \Psi \eta_k]. \quad (27)$$

注意到若式 (9) 成立, 则 $\Psi < 0$ 成立, 因此

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} E[\eta_k^T \Psi \eta_k] < 0,$$

且对于任意非零 $\omega_k \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, $z_k \in \mathcal{L}_2[0, \infty)$, 有 $\|z_k\|_2 < \gamma \|\omega_k\|_2$. 故定理得证. \square

4 H_∞ 状态反馈控制器设计

下面在定理 1 的基础上, 给出模态依赖的状态反馈控制器的参数化设计方法. 在设计状态反馈控制器之前, 先对定理 1 的矩阵不等式条件进行等价变换, 式 (9) 等价于如下矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -\alpha_1 Z_1 & 0 & \tilde{\Xi}_1 \\ * & -\alpha_1 Z_2 & \tilde{\Xi}_2 \\ * & * & \Xi_3 \end{bmatrix} < 0. \quad (28)$$

其中

$$\tilde{\Xi}_1 = [Z_1(A - I) \ Z_1 B K_{m,i} \ 0 \ Z_1 B_\omega \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\tilde{\Xi}_2 = [Z_2(A - I) \ Z_2 B K_{m,i} \ 0 \ Z_1 B_\omega \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$\alpha_1, \alpha_2, \Xi_3$ 在定理 1 中有定义.

令

$$Z_1^{-1} = \delta_1 X, \ Z_2^{-1} = \delta_2 X, \ Y_{m,i} = K_{m,i} X,$$

$$\hat{U} = X^T U X, \ \hat{V} = X^T V X, \ \hat{W} = X^T W X,$$

$$\hat{Z}_1 = X^T Z_1 X, \ \hat{Z}_2 = X^T Z_2 X,$$

$$\hat{Q}_1 = X^T Q_1 X, \ \hat{Q}_2 = X^T Q_2 X,$$

$$P(m, i)^{-1} = X(m, i), \ \hat{P}_{m,i} = X^T P_{m,i} X,$$

$$\Delta = \text{diag}\{\delta_1 X, \delta_2 X, X, X, X, I, X, X, X,$$

$$X(m, i), I\},$$

$\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ 是调节因子. 式 (28) 两边同时左乘 Δ^T 和右乘 Δ . 利用 Schur 补变换, 可得如下定理:

定理 2 对于给定的 $\gamma > 0$, 随机有界时延 $d_k \in [d_{\min}, d_{\max}]$, $\tau_k \in [\tau_{\min}, \tau_{\max}]$. 对于任意的模态 $m \in \mathcal{M}, i \in \mathcal{N}$ 和调节因子 $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$, 如果存在适当维数的矩阵 $\hat{P}_{m,i} > 0, \hat{Q}_1 > 0, \hat{Q}_2 > 0, \hat{Z}_1 > 0, \hat{Z}_2 > 0, X > 0, X(m, i) > 0, Y_{m,i}, \hat{U}_s, \hat{V}_s, \hat{W}_s (s = 1, 2, 3)$, 满足下面的线性矩阵不等式:

$$\begin{bmatrix} -\delta_1^2 \hat{Z}_1 & 0 & \mathcal{R}_1 \\ * & -\delta_2^2 \hat{Z}_2 & \mathcal{R}_2 \\ * & * & \mathcal{R}_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (29)$$

则闭环系统 (5) 随机稳定且满足 H_∞ 性能指标 γ, H_∞ 控制器增益为 $K_{m,i} = Y_{m,i} X^{-1}$. 其中

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 =$$

$$[\sqrt{\alpha_1}(AX - X) \ \sqrt{\alpha_1}BY_{m,i} \ 0 \ \sqrt{\alpha_1}B_\omega \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\mathcal{R}_3 = \begin{bmatrix} \hat{\Lambda}_{11} & \hat{\Lambda}_{12} & \hat{\Lambda}_{13} & 0 & \sqrt{\alpha_1}\hat{U}_1 & \sqrt{\alpha_2}\hat{V}_1 \\ * & \hat{\Lambda}_{22} & \hat{\Lambda}_{23} & 0 & \sqrt{\alpha_1}\hat{U}_2 & \sqrt{\alpha_2}\hat{V}_2 \\ * & * & \hat{\Lambda}_{33} & 0 & \sqrt{\alpha_1}\hat{U}_3 & \sqrt{\alpha_2}\hat{V}_3 \\ * & * & * & -\gamma I & 0 & 0 \\ * & * & * & * & -\hat{Z}_1 & 0 \\ * & * & * & * & * & -\hat{Z}_1 \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * & * \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\leftarrow \begin{bmatrix} \sqrt{\alpha_1} \hat{W}_1 & (L_{m,i} \otimes AX)^T & (CX)^T \\ \sqrt{\alpha_1} \hat{W}_2 & (L_{m,i} \otimes BY_{m,i})^T & (DY_{m,i})^T \\ \sqrt{\alpha_1} \hat{W}_3 & 0 & 0 \\ 0 & (L_{m,i} \otimes B_\omega)^T & D_\omega^T \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\hat{Z}_2 & 0 & 0 \\ * & -X(m,i) & 0 \\ * & * & -\gamma I \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= (\alpha_2 + 1)\hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 - \hat{P}_{m,i} + \\ &\quad \hat{U}_1 + \hat{W}_1 + \hat{U}_1^T + \hat{W}_1^T, \\ \hat{A}_{12} &= \hat{V}_1 - \hat{U}_1 + \hat{U}_2^T + \hat{W}_2^T, \\ \hat{A}_{13} &= -\hat{V}_1 - \hat{W}_1 + \hat{U}_3^T + \hat{W}_3^T, \\ \hat{A}_{22} &= -\hat{Q}_1 + \hat{V}_2 - \hat{U}_2 + \hat{V}_2^T - \hat{U}_2^T, \\ \hat{A}_{23} &= -\hat{V}_2 - \hat{W}_2 + \hat{V}_3^T - \hat{U}_3^T, \\ \hat{A}_{33} &= -\hat{Q}_2 - \hat{V}_3 - \hat{W}_3 - \hat{V}_3^T - \hat{W}_3^T, \\ X(m,i) &= \\ &\text{diag}\{X_0(m,i), X_1(m,i), \dots, X_M(m,i)\}, \\ X_n(m,i) &= \\ &\text{diag}\{X_{n,0}(m,i), X_{n,1}(m,i), \dots, X_{n,N}(m,i)\}. \end{aligned}$$

5 数值例子

考虑文献[14]中的仿真对象, 但与其有别. 文献[14]研究了S-C之间随机时延的情况, 而本文则考虑S-C之间及C-A之间同时存在网络时延的情况.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.1 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, B_\omega = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}, D_\omega = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0.1 & 0.3 \end{bmatrix}.$$

S-C之间及C-A之间随机的时延分别为 $d_k \in \{0, 1, 2\}$ 和 $\tau_k \in \{0, 1\}$. 转移概率矩阵为

$$\lambda = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0.2 & 0.6 & 0.2 \\ 0.2 & 0.4 & 0.4 \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0.45 & 0.55 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

系统矩阵 A 的特征根为 1.0414 和 0.7586, 有一特征根在单位圆外, 表明系统是开环不稳定的.

设初始状态为 $x_{-3} = x_{-2} = x_{-1} = x_0 = [-0.25 \ 0.25]^T, d_0 = \tau_0 = 0$. 基于定理2, 当调节因子 $\delta_1 = 0.01, \delta_2 = 100$ 时, 利用 Matlab 中的 LMI 工具箱求得最小 $\gamma_{\min} = 0.3258$, 且相应的控制器(4)的增益分别为

$$K_{0,0} = \begin{bmatrix} -0.8474 & -0.5952 \\ 0.3257 & 0.0501 \end{bmatrix}, K_{0,1} = \begin{bmatrix} -0.8514 & -0.6024 \\ 0.3238 & 0.0462 \end{bmatrix},$$

$$K_{1,0} = \begin{bmatrix} -0.8513 & -0.6022 \\ 0.3235 & 0.0454 \end{bmatrix}, K_{1,1} = \begin{bmatrix} -0.8521 & -0.6035 \\ 0.3234 & 0.0452 \end{bmatrix},$$

$$K_{2,0} = \begin{bmatrix} -0.8477 & -0.5957 \\ 0.3254 & 0.0495 \end{bmatrix}, K_{2,1} = \begin{bmatrix} -0.8476 & -0.5956 \\ 0.3252 & 0.0491 \end{bmatrix}.$$

两个马尔可夫链的值及系统状态轨迹曲线分别如图2~图4所示.

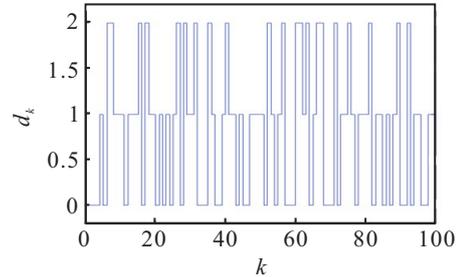


图2 S-C随机时延 d_k

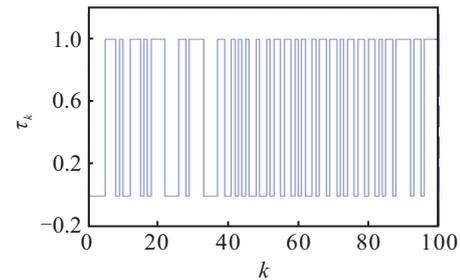


图3 C-A随机时延 τ_k

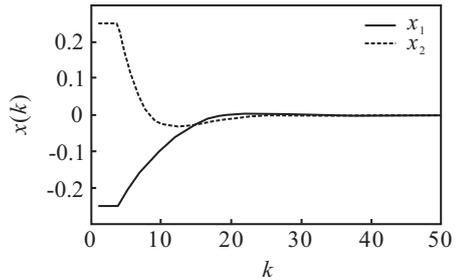


图4 闭环系统状态轨迹

从图4可知, 闭环系统(5)在控制器增益 $K_{m,i} (m \in \mathcal{M}, i \in \mathcal{N})$ 的作用下是稳定的.

6 结 论

本文研究了具有马尔可夫模态依赖时延的NCS的 H_∞ 状态反馈控制问题. 该类系统被建模为特殊的马尔可夫跳变系统, 通过构造随机 Lyapunov 函数及自由权重矩阵方法, 获得闭环系统随机稳定的充分条件, 并给出了模态依赖的 H_∞ 控制器的设计方法. 最后通过数值算例验证了所得结果的有效性.

参考文献(References)

[1] Nilsson J. Real-time control systems with delays[D]. Lund: Department of Automatic Control, Lund Institute of Technology, 1998. (下转第605页)